ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLOGICO DE LA TANGENTE

Luis Arturo SERNA MARTÍNEZ
CICATA-IPN, Legaría # 694, Col. Irrigación, D.F., México
luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx

RESUMEN

El presente trabajo de investigación nos habla acerca de la dificultad que tienen los estudiantes de Cálculo en poder establecer un vinculo entre la noción de recta tangente vista en cursos anteriores al de Cálculo y una noción de recta tangente dinámica como se requiere en Cálculo, por tal motivo se lleva a cabo un análisis documental tomando como marco de referencia a la socioepistemología, la cual es una aproximación teórica que toma en cuenta cuatro componentes que son: la didáctica, la cognitiva, la epistemológica y la social. En nuestro trabajo se emplearon dos componentes que son la epistemológica y la social. Se tomaron en cuenta por lo tanto los escenarios socioculturales propios de los diferentes escenarios científicos de cada época. Con motivo de llevar a cabo el análisis se divido el trabajo en tres momentos de acuerdo a el uso que se le daba a la recta tangente los cuales son: tangente geométrica, tangente variacional y tangente implícita. Con el presente trabajo se pueden recatar elementos que se han perdido en la historia y que pueden contribuir a resignicar el Discurso Matemático escolar.

Introducción

El concepto de recta tangente visto en Cálculo Diferencial requiere que los estudiantes puedan conceptualizarla dinámicamente ya que la recta tangente a una función es diferente en cada punto de la misma, (claro esta que este no es el caso de una recta), sin embargo se ha visto que la mayoría de los estudiantes no crean tal vinculo entre la concepción que tienen de recta tangente vista en cursos anteriores (Geometría y Geometría Analítica) y una recta tangente variable tal y como es requerida en Cálculo Diferencial, Artigue (1998) y Cantoral (2000) han demostrado que tal reconstrucción no es hecha por los estudiantes, por otro lado la idea de D´Alambert de que la tangente es el límite de las secantes, ocasiona dificultades en el aprendizaje tal y como es reportado en Dolores (1998) citado en Cantoral (2000).

La socioepistemología es una aproximación teórica que toma en cuenta las componentes didáctica, cognitiva y epistemológica, pero además considera una componente más, la social la cual afecta sustancialmente a las otras tres, ya que consideramos que los escenarios socioculturales propician el nacimiento de las ideas matemáticas. Nuestro trabajo de investigación toma como marco de referencia a la Socioepistemología en donde retomamos básicamente dos componentes de esta aproximación teórica que son: la epistemológica y la social.

Con objeto de realizar este estudio vamos a dividir en etapas los diferentes momentos históricos por los cuales ha pasado la tangente, la primera etapa considera el periodo que va desde el surgimiento de la noción tangente, como problema geométrico, desde la época de Cópernico hasta antes de Newton y Leibniz. En esta etapa tratamos con la *tangente geométrica*. La segunda etapa se sitúa, básicamente, a finales del siglo XVII y principios del XVIII con los trabajos de Newton y Leibniz, donde ubicamos a la *tangente variacional*. A partir de aquí se observa un arduo trabajo en la formalización de las ideas del Cálculo naciente, se construyen argumentos de tipo analítico y aunque se observa un abandono del término “recta tangente”, aun podemos encontrar cierto uso en los desarrollos matemáticos. De aquí que hablemos de la *tangente implícita*.

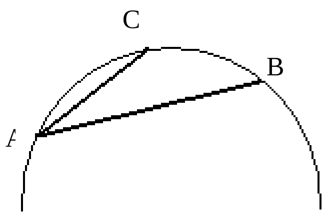
Análisis documental

Tangente Geométrica

Al situarnos en el siglo XVI vemos que había cobrado gran importancia la astronomía, se había aprendido que la observación de los cuerpos celestes servía para diferentes actividades de la vida humana como por ejemplo en la pesca, agricultura, navegación y comercio en aquella época se consideraba que la tierra era el centro del universo, Nicolás Copérnico astrónomo y matemático demostró lo contrario en su obra “Sobre las revoluciones de las orbes celestes”.

Alrededor de su obra podemos observar que utiliza a la geometría y a las matemáticas como uno de las herramientas fundamentales para llevar acabo sus análisis demostraciones, conjeturas y predicciones. En este contexto Copérnico lleva a cabo una conjetura acerca de la recta tangente en una parte de su obra, mostramos a continuación lo siguiente:

> ***Teorema Sexto***
>
> *La razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].*
>
> *Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, AB y BC, y sea el mayor BC. Afirmo que la razón de BC a AB es mayor que la de las subtensas BC a AB.*



Nicolás Copérnico, Sobre las revoluciones de las orbes celestes

A hombros de Gigantes, 1543, pp. 48 y 49

Posteriormente revisa un problema el cual consiste en ir acercando cada vez más y más a los puntos A y B y observar si sigue cumpliendo el teorema sexto, con respecto a lo cual dice lo siguiente:

> *Luego, como vemos hemos llegado a un punto, en el que la diferencia entre recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, como convertidos en una sola línea,…*
>
> *(Nicolás Copérnico, 1543, pp. 50)*

Al ir disminuyendo cada ves más los arcos y las subtensas correspondientes, llega un momento en que la desigualdad anterior propuesta en el teorema sexto deja de cumplirse y se convierte en una igualdad, esto sucede cuando los arcos son muy pequeños en comparación con el diámetro de la circunferencia. La recta tangente a la circunferencia significa para Copérnico aquella línea recta que en una muy pequeña región es una misma con la curva, por otro lado el uso que se le da es para establecer una relación entre la subtensa y el arco que la contiene para que con base en esa relación se puedan establecer para diferentes arcos, diferentes subtensas y poder crear una tabla de arcos y subtensas, que servirán para hacer cálculos astronómicos.

La tangente surge en este problema al estar muy cercanos dos puntos de una circunferencia. El interés por determinar posiciones de los cuerpos celestes es lo que genera que surja el conocimiento de la tangente.

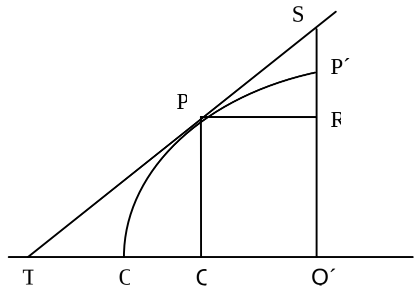
Fermat y Barrow vivieron en una época en donde había varios problemas matemáticos como son el cálculo de la tangente a una curva, los máximos y mínimos y problemas de cuadraturas entre otros. Si bien se estaban retomando problemas de la antigua Grecia, en esta época se contaba ya con otros elementos matemáticos, de hecho Fermat introdujo las coordenadas rectangulares y la aplicación a la geometría de los métodos algebraicos. Es decir, se abordan los mismos problemas matemáticos con una nueva perspectiva, por ejemplo se plantean problemas de cinemática en donde a las trayectorias de los cuerpos se le hacia corresponder con curvas geométricas. En este contexto Fermat da a conocer su método para encontrar la tangente de una curva.

En su método, Fermat utiliza ideas que denominamos de tipo variacional, ya que calcula diferencias $f(x+\varepsilon)-f(x)$. A partir de esta diferencia obtiene un polinomio con términos en ε el cual se divide entre la misma variable, después aquellos términos que contienen a la ε son eliminados, también utiliza argumentos de tipo gráfico y geométricos entre ellos la semejanza de triángulos, aunque no utiliza los infinitesimales si emplea ideas cercanas a ellos ya que en sus expresiones matemáticas en el cálculo de la tangente elimina los términos que contienen a la ε.

En Cantoral y Farfán (2004) se reporta el método utilizado por Fermat para encontrar a la tangente.

El método para trazar tangentes que establece Fermat consiste en encontrar la subtangente la cual esta representada por un segmento TQ, que es la distancia de un punto T el cual se encuentra en la intersección de la tangente con el eje de las abscisas y un punto Q que es la abscisa del pie de la perpendicular trazada desde el punto P, con la curva dada. El encontrar la subtangente es equivalente a encontrar la recta tangente, para lograr tal efecto debe de existir una relación de dependencia explícita entre la variable y y la variable x de la forma $y = f(x)$.

Observemos la siguiente figura:



(Cantoral y Farfán, 2004, pp. 71)

En la figura anterior vemos representad a la recta tangente PT y la curva OPP' se observa que los triángulos TPQ y PSR son semejantes, en base a esto y dos consideraciones importantes las cuales son: $PR = QQ' = \varepsilon \quad y \quad SR \approx P'R$ se puede llagar a la expresión que se encuentra reportada en Cantoral y Farfán (2004):

$$TQ \approx \frac{\varepsilon \bullet PQ}{P'Q' - PQ}$$

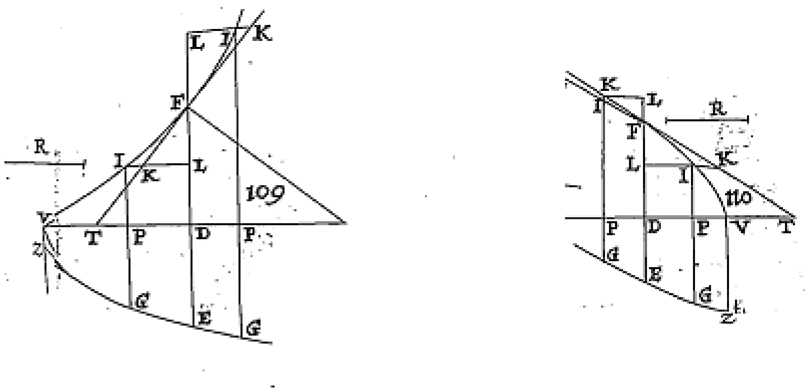
Al observar la figura podemos ver que si ε se hiciera cada vez más y más pequeño consecuentemente también el SR será cada vez más parecido en longitud al segmento $P'R$ de tal manera que vamos a tener un triángulo infinitamente pequeño cuya hipotenusa esta sobre la recta tangente PT en el punto P, notamos también que el arco PS se va a parecer cada vez más a una línea recta conforme ε se hace muy pequeño. De lo expuesto vemos que se requiere que la curva sea representada por una relación de la forma $y = f(x)$ también notamos que la gráfica tiene un solo eje, aunque, Fermat no menciona explícitamente que ε tiende a cero. Consideramos que el resolver el problema de la tangente propicia que nazcan ideas cuyo desarrollo posterior llevarían al concepto de derivada por lo tanto son precursoras a las tratadas por Newton y Leibniz posteriormente. El uso que se le daba, muestra que encontrar **la recta tangente** a la curva en un punto era, en la época de Fermat, un problema en sí mismo.

La obra que revisamos en este trabajo de Isaac Barrow se llama “Lecciones de Geometría”, en ella se ven reflejados aspectos de tipo geométrico pero también hace uso de las gráficas en donde hay un eje coordenado.

Isaac Barrow publica su obra en 1670, del capítulo X de su obra podemos decir que muestra la relación existente entre la tangente y el área bajo la curva, Barrow nos demuestra que hay una relación entre los conceptos tangente (de una curva) y área. Barrow (1670). En su obra notamos que se utilizan argumentos geométricos, como el de semejanza de triángulos, para demostrar que la recta tangente deja a la curva a un lado o esta por debajo de ella. En otro parte de su obra Barrow enuncia el siguiente corolario:

“*Debe ser notado que* $DE \bullet DT = \acute{a}rea VDEZ$ ”

(Barrow, 1670, p. 78)



(Barrow, 1670, p. 78)

Al observar este corolario encontramos que la inclinación de la recta tangente va a depender del área, la idea de tangente a una curva es concebida por Barrow dejando ver a el lector que la recta tangente a la curva, la toca a esta en un punto, pero también deja a la curva por un lado de la recta tangente lo cual como sabemos no necesariamente tiene que ser así, por lo tanto a pesar de que se puede apreciar de su análisis que la inclinación de la recta tangente es cambiante puesto que dependiendo del área cambia, también vemos que persiste la idea en donde todavía se maneja la perspectiva de los griegos de la antigüedad en donde la recta tangente a una curva toca a la misma en un solo punto dejándola de lado con respecto a la recta tangente.

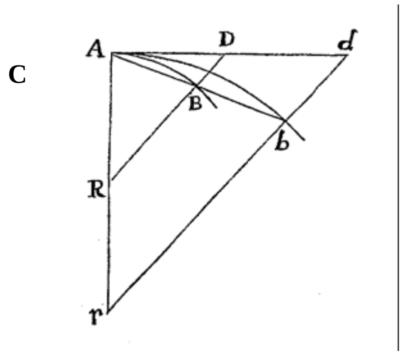
Tangente Variacional

Newton llega a resolver un conjunto de problemas que se encontraban presentes en su época, como son el problema de las tangentes, de los máximos y mínimos, la cuadratura de curvas, la relación existente entre la tangente y la cuadratura de una curva, problema que no había podido resolver su antecesor Barrow de quien fue discípulo.

En la época de Newton la geometría y el trazar tangentes a las curvas, así como las áreas comprendidas por ellas era de gran importancia ya que eso permitía relacionar a la geometría con el mundo real, que en ese entonces tenía que ver con la mecánica. Consideramos se pueden observar intereses de la época en poder determinar las causas y efectos, es decir predecir estados futuros de fenómenos físicos de los cuales se les quería representar por medio de una ecuación la cual a su vez representaba figuras geométricas de la que también se estaba interesados en conocer su comportamiento en un instante dado.

Ahora vamos a observar un lema expuesto en los Principios Matemáticos para ver cual es el manejo que Newton le daba a la tangente.

Sección I, Lema VI:



*Si cualquier arco **ACB**, en una posición dada, es subtendido por su cuerda **AB**, y en cualquier punto **A** situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta **AD** prolongada en ambos sentidos, si los puntos **A** y **B** se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que al ángulo **BAD** contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia.*

Porque si ese ángulo no desapareciese, el arco ACB contendría con la tangente AD un ángulo igual a algún ángulo rectilíneo y, por tanto, la curvatura en el punto A no será continua, cosa contraria a la hipótesis.

Isaac Newton, 1713, Traducción de Antonio Escohotado, p. 64

Vemos que la idea de lo infinitamente pequeño que se encuentra presente y donde al llevarse acabo este proceso la cuerda subtendida tiende a ser la tangente a la curva en el punto A, encontramos también presente la idea del paso al límite ya que la tangente a la curva es el límite al que llegara la cuerda AB, en esta parte ya se tiene una definición desde un punto de vista geométrico y utilizando ideas de tipo variacional que se encuentran presentes cuando menciona si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, miramos también el uso que se hace de las figuras como un argumento necesario para dar las explicaciones ya que estas son hechas con base precisamente a ellas.

En el libro tratado de métodos y series de fluxiones se trata también el tema utilizando las fluxiones.

Citaremos tan solo un caso en donde se muestra un método para encontrar la tangente de una curva en un punto dado.

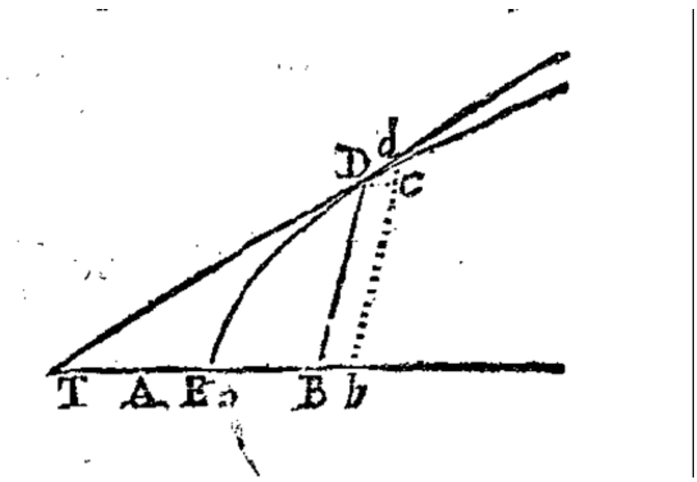
PROBLEMA 4

TRAZAR LAS TANGENTES DE LAS CURVAS

MÉTODO 1

Las tangentes se trazan de varias formas, según las relaciones de las curvas con las líneas rectas. En primer lugar sea la línea recta BD de modo que forme un ángulo con otra línea recta AB, tomada como base, y que sea ordenada en la curva ED. Muévase esta ordenada un espacio infinitamente pequeño hacia la posición bd, de modo que ésta incrementa con el momento cd mientras AB incrementa por el momento de Bb, que es igual Dc. Ahora prolónguese Dd hasta que encuentre a AB en T; ésta cortará a la curva en D o en d, y los triángulos dcD y DBT serán semejantes, por lo que TB: BD = Dc: cd.

Cuando la relación de BD a AB es exhibida a través de una ecuación que determine a la curva, se busca, por el problema 1, la relación entre las fluxiones, y se toma TB a BD en la misma razón de la fluxión de AB a la fluxión de BD; entonces TD tocará a la curva en D.



Isaac Newton, 1671, Traducción de Iztaccíhuatl Vargas
Edición en español, 2001, p. 121

Vemos que Newton maneja ideas de lo infinitamente pequeño, además notamos también como la razón existente en el triángulo *DBT* que es semejante con el triángulo infinitamente pequeño *dcD*, (ambos formados con ayuda de la tangente) sigue presente, tal y como los menciona en Los Principios Matemáticos en donde se refiere a la razón última de las cantidades evanescentes. Notamos también que hay ideas muy parecidas a las del Cálculo actual, ya que como sabemos al evaluar la derivada en un punto de una curva, esto equivale a calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, si decimos que: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y comparamos con la expresión anterior, la cual puede ser rescrita como: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{BD}{BT}$ en ambas expresiones se maneja la misma idea con respecto a triángulos formados con la tangente de una curva y es que el triángulo formado por segmentos infinitesimales guarda la misma razón que aquel que es formado por la tangente con respecto a un punto dado.

Newton maneja argumentos de tipo geométricos ya que habla de semejanza de triángulos, así como la tangente a una curva, el dibujo mostrado es una herramienta indispensablemente necesaria para poder dar las explicaciones pertinentes, la tangente aquí juega un papel importante ya que sin ella prácticamente no se podría dar las explicaciones en este contexto geométrico.

Otro gran pensador de la época fue Leibniz, quien por su parte también es responsable de la formulación del Cálculo Diferencial e Integral, encuentra un método general para determinar las rectas tangentes a las curvas. Leibniz utiliza el Cálculo, y hace un análisis de los diferenciales, encontrando un conjunto de reglas para poder operar con ellos, determinando un algoritmo, que simplifica los cálculos; para el desarrollo de sus ideas utiliza argumentos geométricos los cuales los ocupa con los diferenciales, utiliza también a la tangente como una herramienta fundamental para poder determinar los máximos y mínimos de una curva. El discurso que se utiliza en esa época es de tipo geométrico, la tangente esta fuertemente ligada al nacimiento formal del Cálculo.

La obra de L´Hospital tiene la intención de difundir el Cálculo naciente a gente con no necesariamente una formación científica pero interesada en conocer las ideas del Cálculo naciente, la obra tiene una intencionalidad didáctica. En el libro de "Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas" se trata también el tema de la recta tangente. Inicialmente empieza a describir la idea de lo infinitamente pequeño auxiliado de figuras geométricas, en una sección posterior se trata el tema de la recta tangente.

Una definición de la recta tangente dice lo siguiente:

Si se prolonga uno de los pequeños lados Mm de la poligonal [fig. 2] que compone a una línea curva, este pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto M o m.

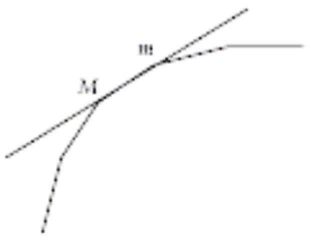


Fig. 2

(L´Hospital, 1696, p. 41)

Esta idea acerca de la tangente no se encuentra presente en el Discurso Matemático Escolar, y desde nuestro punto de vista didácticamente hablando aporta una idea intuitiva del concepto de recta tangente a una curva, es una idea que también nos muestra de manera natural el carácter variacional de la recta tangente a la curva puesto que para cada lado infinitesimal de la curva se tendrá una diferente recta tangente.

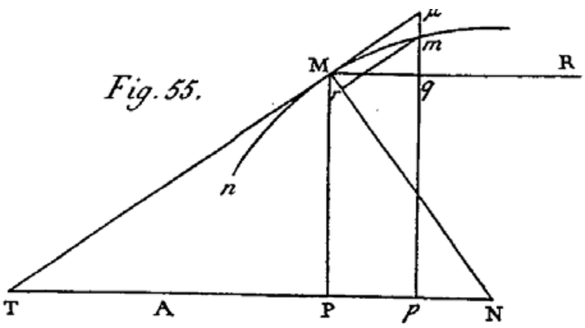
En esta obra la recta tangente es utilizada también para el cálculo de los máximos y mínimos en donde se puede percibir el carácter variacional de la recta tangente, puesto que la pendiente de la misma va a ir cambiando de signos antes y después de los puntos críticos pasando por el valor de cero o infinito en los máximos y mínimos.

Tangente implícita

Euler fue un gran matemático del siglo XVlll y con respecto a el tratamiento que le da a la tangente en la parte de su obra que analizamos que es "INTRODUCTION A L' ANALYSE INFINITESIMALE, TOME SECOND" nos hemos percatado que sus explicaciones son con base a argumentos de tipo infinitesimal, en donde se utiliza el desarrollo de ecuaciones algebraicas, con el desarrollo del nuevo Cálculo y ya que este todavía no tenia bases muy firmes, hacían falta argumentaciones de mayor rigor para fortalecerlo, los argumentos geométricos, no ayudaban para tal objetivo, podemos ver entonces en Euler un abandono por las ideas precedentes, a las argumentaciones geométricas aunque no en una forma total.

Euler nos explica como entiende a la tangente a una curva, él nos comenta que esta se va a confundir con la curva propuesta en un espacio muy pequeño, dice que se va a examinar una porción cualquiera de una curva y se buscara a la recta con la cual ella se va a confundir al menos en un espacio muy pequeño.

Lo que nos presenta Euler en su obra *(Euler, 1748, pp. 152-,153)*es un polinomio que sirve para expresar cambios, y es el análisis de tal polinomio el que le permite encontrar la expresión con la cual se podrá determinar la recta tangente, la expresión esta dada por el polinomio: $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$, donde t y u representan los cambios que experimenta una curva al dejarla transcurrir un tiempo muy pequeño, Euler encuentra una relación entre una expresión algebraica la cual representa a una recta y que es obtenida a partir del trabajo que se hace con el polinomio en donde están representados los cambios que están en términos de t y u así y despreciando a los términos que son muy pequeños, es decir aquellos términos con un exponente superior a uno, la expresión obtenida gráficamente representa a la hipotenusa de un pequeño triángulo la cual al extenderse en ambos sentidos se convertiría en la tangente de la curva en el punto M, es importante también resaltar el hecho de que Euler es el primero en mencionar explícitamente el carácter variacional de la recta tangente a una curva, esto es relevante puesto que uno de los intereses de nuestro trabajo de investigación es mencionar el momento en que nace la tangente variacional de una curva, sabemos que de las ideas de Newton y Leibniz ya se podía inferir el carácter variacional de la tangente, pero en su discurso no se explicitaba esta cuestión a diferencia de Euler, el cual menciona de manera explicita la tangente es variable.



(Euler, 1748, p. 152)

Lagrange considerado junto con Euler uno de los dos más grandes matemáticos del siglo XVIII, sus contribuciones al Cálculo son con base a el tratamiento que le da a las funciones ya que consideraba que toda función podía ser expresada como una serie de Taylor, además considera a la derivada como una función, en cuanto a la tangente variacional vamos a observar que la idea se encuentra presente de manera implícita, sin embargo en las argumentaciones algebraicas que hace se manifiesta la idea de tangente, aunque no es mencionada como tal, el punto de partida de Lagrange es que cualquier función de una variable $f(x)$, admite un desarrollo de la serie de Taylor.

Lagrange hace la consideración de que $f(x+i) = f(x) + iP$ en la cual se considera que la función evaluada en un punto $x+i$ es igual a la función original $f(x)$ la cual es independiente de i o que permanece cuando i se vuelve cero. Lagrange hace una descripción de como va a obtener la expresión analítica que representara a la función, en el párrafo anterior se menciona que se va a buscar en la expresión de $f(x+i)$, aquello que es independiente de i, es decir aquello que permanece cuando $i = 0$, si ahora observamos el término P de la expresión anterior, notamos que: $P = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$, vemos que en ella se encuentra la definición de tangente, pero es una tangente variable ya que la x puede tomar diversos valores.

Finalmente observamos como al aplicar reiteradamente el mismo proceso se obtiene una expresión desarrollada en serie de Taylor en donde se encuentra presente las funciones derivadas.

Cauchy tuvo gran trascendencia, ya que marco el discurso educativo de su época, incluso su influencia se encuentra presente hasta nuestros días, (Cantoral, 2001; Ferrari, 2001). "*Se reconoce en su obra la influencia de las ideas de Euler, pero a su vez un distanciamiento de ellas hacia un enfoque más analítico que algebraico*" Ferrari (2001). A continuación vamos a transcribir algunos fragmentos de su obra "Curso de análisis" en donde vemos la definición de derivada, y se observa que se encuentra presente de manera implícita la idea de tangente:

> *Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable **x** y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, los dos términos de la razón de las diferencias*
>
> *(1)* $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$
>
> *serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultanea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x.*
>
> *Agustin-Louis Cauchy, 1823, Traducción de Carlos Alvarez Jiménez, p. 235*

Notamos que ya se encuentra presente en la explicación la noción de límite, también vemos que se menciona la palabra incremento, a diferencia de Newton y Leibniz que hablaban de puntos infinitamente cercanos, o las diferencias entre dos puntos infinitamente cercanos, Cauchy menciona en este párrafo que la variable *x* al tener un incremento infinitamente pequeño, provoca un incremento infinitamente pequeño en la función, por otro lado también se encuentra presente la noción de función en donde se menciona que una variable depende de la otra, además se menciona que la razón misma podrá converger a un límite que es el valor de la derivada para un punto, es decir el valor de la tangente en ese punto, también se dice que este límite puede ser positivo o negativo, por lo tanto se esta hablando de una función creciente o decreciente comprendida entre los dos límites mencionados aunque esto último no se menciona explícitamente ni se muestra gráficamente, otra situación importante que se menciona es el carácter variacional que tiene la tangente, pues dice claramente que cuando la razón tiende a un límite, este tiene un valor determinado para cada valor particular de la *x*, notamos que también se encuentra presente la idea de que el segmento curvilíneo que va del punto $f(x)$ a el punto $f(x + i)$ es igual a el segmento rectilíneo que se encuentra presente entre esos mismos puntos, siempre y cuando $\Delta x = i$ sea un incremento infinitamente pequeño, ya no se menciona la palabra tangente, tampoco hay una gráfica explicativa con figuras geométricas en donde se represente a una función conformada por los segmentos infinitesimales que para el caso de lo que estamos hablando sería el límite mencionado "*la razón misma podrá converger a un límite*" *(Agustin-Louis Cauchy, 1823, Traducción de Carlos Alvarez Jiménez, p. 235)*

En cuanto a el discurso de Cauchy en lo que se refiere a la explicación de la inclinación de una curva, esas ideas manejadas por el son prácticamente iguales a lo que actualmente se maneja en los textos escolares como la interpretación geométrica de la derivada, aunque en los libros de texto contemporáneos utilizados en el nivel medio superior en el sistema escolar en México, como por ejemplo el Cálculo Diferencial e integral de Granville o el Cálculo de Swokowski, además utilizan una gráfica en donde se representa una función y la secante que conforme $\Delta x \to 0$ su límite es el de la recta tangente a la curva. Cauchy define a la recta tangente a la curva en un punto como el valor numérico de la función derivada en el punto en cuestión. Lo anterior muestra que efectivamente la obra de Cauchy se ve reflejada hoy en día en nuestros sistemas escolares.

Conclusiones

Con respecto a este trabajo de investigación se trabajaron dos componentes de la aproximación teórica que es la socioepistemología que fueron la componente epistemológica y la componente social, solo se estudiaron algunos momentos históricos donde fue utilizada la tangente quedaría pendiente por revisar a varios más matemáticos que contribuyeron a el desarrollo del Cálculo, por ejemplo a Lacroix, Huygens, Weierstrass, Dedekind, D´Alambert, Taylor, Bernoulli, entre otros. Queda pendiente por trabajar la componente didáctica y la componente cognitiva, el producto de nuestra investigación puede contribuir para solucionar el problema planteado en la tesis de Martínez (2005) que se refiere a establecer un vinculo entre la pendiente de la recta tangente vista como un número y como variable de tal forma que después de trabajar estas dos componentes(la epistemológica y la social), nos proporciona elementos significativos para crear secuencias de aprendizaje con las cuales el alumno pueda construir la tangente dinámica desde un punto de vista variacional, al hacer esto consideramos se le facilitara construir el concepto de derivada, estamos proponiendo que para abordar el concepto de derivada, así como algunos otros conceptos vistos en Cálculo como funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos desde un punto de vista variacional, esto se haga a partir de una caracterización de lo que significa la *tangente variacional*, por lo tanto al utilizar nuevos elementos que se pueden rescatar del análisis realizado en este trabajo de investigación consideramos podemos resignificar el Discurso Matemático escolar.

Bibliografía

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 1 (1), 40-55

Barrow, I. (1670). *Lectiones Geometricæ*. Londres: J. Dunmore.

Cantoral, R., (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* Thomson: México.

Cauchy, A. (1823). *Curso de Análisis*. (Trad. Carlos Jiménez) Edit. UNAM (1994)

Copérnico, N. (2003) *Sobre las revoluciones de los orbes celestes (C. Mínguez y M. Testal, Trad.)* Madrid, España: Editora Nacional. (Obra original publicada en 1543 bajo el título *De revolutionibus orbium coelestium)* Edición comentada por Stephen Hawking, A Hombros de Gigantes.

Euler, L. (1835). *Introduction a l'analyse infinitesimale.* Paris, France: Cliez Bachelier,
Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Lagrange, J.L. (1797), *Théorie des fonctions analytiques.* Francia : Journal de l'Ecole polytechnique.

L'Hospital, A. (1696). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curva*s (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). Edit. UNAM (1998). México.

Newton, I. (1687). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. (Trad. Antonio Escotado) Edit. Altaza (1993). España.

Newton, I. (1671). *Tratado de Métodos de Serie y Fluxiones.* (Trad. Iztaccíhuatl Vargas) Edit. UNAM (2001). México