¿CÓMO DECIDIR QUÉ MATEMÁTICA DEBERÍA SABER UN FUTURO DOCENTE?

Aportes desde la Historia de la Matemática

Cristina OCHOVIET **Mónica OLAVE**
Instituto de Profesores "Artigas", Av. Libertador 2025, Montevideo, Uruguay
CICATA-IPN, Legaria 694, Col. Irrigación, Del. M. Hidalgo, México D.F., México
cristinaochoviet@gmail.com, matemoni@adinet.com.uy

RESUMEN

Presentamos el análisis de una situación de clase del nivel secundario en la que se están enseñando los números complejos. Esta situación da cuenta de cómo algunos conocimientos de Historia de la Matemática pueden ser de gran utilidad a los docentes en su desempeño profesional y permiten además obtener información acerca de la matemática que podría incluirse en un plan de estudios para formar profesores de matemática.

1 Introducción

Cómo decidir qué matemática debería saber un futuro profesor, es una cuestión ineludible a la hora de diseñar un plan de formación de profesores de matemática que atienda las dificultades y exigencias de la vida profesional. Si bien la formación profesional es un proceso que se da a lo largo de toda la vida, no podemos evitar tener que decidir cuáles deberían ser los contenidos a abordar en la formación inicial de profesores. Prueba de ello es el trabajo realizado por la CBMS (2001).

Para poder decidir qué matemática debería saber un futuro docente surgen diversas fuentes. A modo de ejemplo podemos mencionar algunas: qué cultura matemática debe formar parte del bagaje de conocimientos del profesor, si hay matemáticas nuevas que deberían incorporarse, qué conocimientos son imprescindibles para desempeñar la labor docente y así podríamos seguir con una larga lista de consideraciones.

Nosotras proponemos otra posible fuente que está relacionada con la especificidad de la tarea a desempeñar: el trabajo matemático con los estudiantes.

La fuente a la que nos referimos se nutre del pensamiento de los estudiantes, de sus estrategias, de sus dificultades, del tipo de preguntas que realizan, de sus propuestas, de sus concepciones.

2 Marco teórico

En este trabajo planteamos una reflexión, a partir de elementos que surgen de la fuente antes mencionada, para decidir algunos contenidos matemáticos que podrían resultar útiles para el trabajo en clase de los futuros docentes. Nuestro punto de partida, en esta oportunidad, es la respuesta de una alumna frente a una pregunta de su profesor. Esto es: un profesor formula una pregunta, un estudiante responde algo que no es matemáticamente correcto, ¿cómo sigue la clase?

Para esta pregunta varias respuestas son posibles:

- el profesor toma la respuesta del estudiante y a partir de ella propone al grupo una actividad de investigación para que puedan validarla o refutarla,

- el profesor le dice al estudiante que su propuesta no es acertada y da la respuesta correcta,
- el profesor plantea un contraejemplo para que el alumno perciba el error y da la respuesta correcta,
- el profesor dice que está mal y pide a la clase un contraejemplo,
- el profesor devuelve la respuesta del alumno al grupo y pregunta a los estudiantes si esto les parece correcto a la espera de una respuesta negativa,
- el profesor decide no hacer más preguntas y plantea directamente el resultado matemático.

De todas ellas elegimos la primera. Nuestra postura frente al aprendizaje es constructivista. Jerarquizamos el desarrollo de las ideas matemáticas de los estudiantes frente a una enseñanza tradicional que valora sólo las técnicas y conceptos matemáticos establecidos. Compartimos con Clements y Battista (1990) que:

> Ellos [los estudiantes] sienten que sus ideas y métodos intuitivos no están relacionados con la matemática *real*. En contraste, en la instrucción constructivista, los estudiantes son alentados a usar sus propios métodos para resolver problemas. A ellos no se les pregunta por qué no adoptan el pensamiento de otro sino que se los alienta para que refinen el propio. Aunque los profesores presenten tareas que promuevan la invención o la adopción de técnicas más sofisticadas, todos los métodos son valorados y apoyados. A través de la interacción con tareas matemáticas y con otros estudiantes, el propio pensamiento matemático intuitivo del estudiante gradualmente se vuelve más abstracto y poderoso.

3 Análisis de una situación de clase

Nos ubicaremos en una clase de matemática, de alumnos de 16-17 años de edad, en la que se está enseñando los números complejos.

La docente presenta a los estudiantes una misma ecuación a resolver en dos conjuntos distintos para que estos observen que en un conjunto tiene solución y en el otro no. Utiliza esta excusa para ir realizando la ampliación de los conjuntos numéricos. Por ejemplo: $x + 7 = 2$, no tiene solución en el conjunto de los números naturales mientras que sí la tiene en el conjunto de los enteros.

Con esta misma idea, plantea la ecuación $x^2 +1 = 0$ para resolver en R, a lo que los estudiantes responden que no tiene solución. Se plantea entonces, la necesidad de crear nuevos números para que esta ecuación tenga solución. Es así que se introduce la unidad imaginaria i tal que $i^2 = -1$. Se resuelven otras ecuaciones como $(x + 3)^2 = -25$, que permiten introducir naturalmente la notación binómica. Se continúa con la representación en el plano complejo, la igualdad de complejos, la notación polar, la conversión entre uno y otro sistema de representación. Luego se comienza con el tratamiento de las operaciones entre números complejos trabajando con la notación binómica.

Para introducir la suma, se presentan a los estudiantes dos complejos particulares y se les pregunta cómo sumarlos. Los estudiantes proponen sumar las partes reales y las partes imaginarias de los complejos dados. Luego se analiza qué propiedades cumple esta operación.

En forma análoga, se presentan dos complejos particulares y se pregunta a los estudiantes cómo podríamos multiplicarlos, a lo que la alumna María responde: *"Multiplicamos las partes reales y las partes imaginarias"*. Utilizando notación binómica, lo que la estudiante está planteando es que el producto de $a + bi$ por $c + di$ es $ac + bd\,i$.

Desde la postura pedagógica planteada más arriba, nos preguntamos qué tipo de trabajo matemático puede hacer un docente frente a la respuesta dada por María, con el objetivo de que los estudiantes valoren la pertinencia de esta definición.

Creemos que la respuesta a la siguiente pregunta nos permitirá relevar contenidos importantes a incluir en la formación inicial de los futuros profesores de matemática:

¿Por qué no definir multiplicación de complejos como lo propone María?

Para responder a esta pregunta presentamos a continuación diferentes aspectos de la operación definida por María que podrían investigarse, como por ejemplo, qué propiedades cumple.

3.1 Investigamos algunas propiedades

Si analizamos el problema planteado desde un punto de vista matemático, es posible deducir que la operación planteada por la alumna María es asociativa, es conmutativa, tiene neutro, no tiene inverso y admite divisores de cero. Esto hace que la estructura generada por la operación que plantea la estudiante, sea diferente de la estructura de cuerpo que sabemos posee el conjunto de los número complejos con las operaciones adición y multiplicación.

Los resultados antes mencionados se derivan del análisis matemático que realizamos a partir de la operación propuesta por María y que simbolizaremos con $\otimes$.

Dados $z = (a, b)$ y $w = (c, d)$ con a, b, c y d reales, se define $\otimes$ de la siguiente forma $z \otimes w = (a.c, b.d)$ donde "**.**" indica la multiplicación en R. A continuación iremos investigando qué propiedades cumple esta operación.

- *Asociativa*

$$(z\otimes w) \otimes v = (a.c, b.d) \otimes (e, f) = ((a.c)e, (b.d)f) \underset{\text{Asociativa de . en R}}{=} (a(c.e), b(d.f)) =$$

$$= (a,b)\otimes(c.e, d.f)=z\otimes(w\otimes v)$$

$\otimes$ es asociativa.

- *Conmutativa*

$$z\otimes w = (a.c, b.d) \underset{\text{Conmutativa de . en R}}{=} (c.a, d.b) = w\otimes z$$

$\otimes$ es conmutativa.

- *Existencia de Neutro*

Investigamos si existe $n = (c, d)$ tal que para todo $z = (a, b)$ se cumple que: $z\otimes n = z$, esto es que $(a, b)\otimes(c, d) = (a, b)$.

Aplicando la definición de $\otimes$ tenemos que: $(a, b)\otimes(c, d)=(a.c, b.d)$

$$(a.c, b.d) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} ac = a \\ bd = b \end{cases} \underset{\text{Neutro de . en R}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

De donde $\otimes$ tiene neutro que es n = (1, 1). La estructura tendría un neutro diferente al neutro en los reales.

- *Existencia del inverso*

Investigamos si para todo z = (a, b) existe z´= (c, d) tal que z $\otimes$ z´= n, esto es que (a, b) $\otimes$ (c, d) = (1, 1).

$$(a.c, b.d) = (1, 1) \Rightarrow \begin{cases} ac = 1 \\ bd = 1 \end{cases} \underset{a \neq 0 \text{ y } b \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} c = \dfrac{1}{a} \\ d = \dfrac{1}{b} \end{cases} \Rightarrow z´= \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$$

Como podemos observar los reales y los “imaginarios puros” no tienen inverso. La estructura no es un cuerpo.

- *Propiedad Distributiva de la multiplicación respecto de la suma*

(a,b) $\otimes$ [(c,d)+(e, f)]= (a, b) $\otimes$ (c+e, d+f) = (a(c+e), b(d+f)) =
= (a.c+a.e, b.d+b.f) = (a.c, b.d) + (a.e, b.f) = (a, b) $\otimes$ (c, d) + (a, b) $\otimes$ (e, f)

- *Propiedad de absorción*

$$(a,b) \otimes (0,0) = (a.0, b.0) \underset{\text{Absorción en R}}{=} (0,0)$$ para todo (a, b) con a y b reales

- *Propiedad del producto nulo*

$$¿\ z \otimes w = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} z = (0, 0) \\ \vee \\ w = (0,0) \end{cases} ?$$

La propiedad no se cumple, presentamos a continuación un contraejemplo:
(0,5) $\otimes$ (3,0) = (0.3, 5.0) = (0, 0)

- *Propiedad cancelativa*

$$¿\ \left.\begin{array}{l} z \otimes w = z \otimes v \\ \text{z, w, v pares ordenados de reales con } z \neq (0, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow w = v\ ?$$

La propiedad no se cumple, veamos un contraejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(5,0)\otimes(0,2)=(0,0)\\ \\ (5,0)\otimes(0,7)=(0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\ (5,0)\otimes(0,2)=(5,0)\otimes(0,7)\ \text{ pero } (0,2)\neq(0,7)$$

Hemos investigado diferentes cuestiones. Vemos que la opción de la alumna María nos conduce a una operación que no cumple con algunas de las conocidas propiedades de la multiplicación en R. Ahora bien, si lo que buscamos es una ampliación del conjunto de los reales, ¿por qué debemos elegir una estructura que mantenga, por ejemplo, las propiedades que tenía la multiplicación en ese conjunto?

Creemos que recurrir a la Historia de la Matemática nos brindará interesantes elementos.

4 Aportes desde la Historia de la Matemática

Históricamente el conocido *principio de permanencia* fue el criterio utilizado para ampliar los conjuntos numéricos.

Al respecto, Luque, Mora y Torres (en http://www.usergioarboleda.edu.co/matematicas/memorias/memorias14/16.N%C3%BAmeros%20Negativos.pdf) señalan que:

> Hermann Hankel alrededor de 1867, en su obra *Teoría del sistema de los números complejos*, establece que “la condición para construir una aritmética universal es, la de una matemática intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles y afirma que las matemáticas son una creación humana, y por tanto sus conceptos no se deducen de manera empírica, sino que son construcciones intelectuales y como tales, *no han sido descubiertas sino inventadas*; formula el *principio de permanencia de las leyes formales*, que establece un criterio para ampliar el concepto de número:
>
> 1. La palabra número responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido; sino que su significado puede ser cualquiera.
> 2. Se definirán para el nuevo campo numérico las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como caso particular de las nuevas definiciones y que subsistan las leyes fundamentales de uniformidad, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del elemento neutro.
>
> Y con eso abrió el camino para que los números negativos fueran admitidos y ocuparan un sitio reconocido dentro de las matemáticas, aunque no tuvieran una definición rigurosa y explícita. Sólo eran símbolos con los que se operaba respetando unas leyes preestablecidas.

Consideramos que compartir este tipo de información histórica con los estudiantes puede ayudarlos, por un lado, a entender mejor a la matemática como creación intelectual hecha por mujeres y hombres, y por otro, permitirles tomar contacto con un principio que guió históricamente la ampliación de los conjuntos numéricos. Conocer el *principio de permanencia* será un elemento más a tener en cuenta al momento de decidir sobre la pertinencia de la definición aportada por la alumna María.

5 Algunas conclusiones

De los diferentes aspectos que investigamos a partir de la propuesta de María, entendemos que algunos de ellos podrían ser trabajados con alumnos de 16-17 años y quizás otros no. Cada docente conoce a sus alumnos y en el momento indicado podrá decidir qué tipo de actividades son oportunas para trabajar con ellos. Consideramos que varios de los aspectos investigados ayudarían a los estudiantes a desistir de la definición dada por la alumna María.

En base al tipo de trabajo matemático que podría realizarse con los estudiantes, ¿qué conocimientos matemáticos debería conocer un profesor para manejar una situación como la planteada y desde la perspectiva educativa adoptada?

De nuestro análisis surgen algunos temas que consideramos deberían incluirse en la formación inicial de un futuro profesor de matemática y que creemos favorecerían su desempeño en clase:

- Los conjuntos numéricos. Posibilidades y limitaciones del trabajo en cada uno de ellos.
- La Historia de la Matemática, en este caso a través del *principio de permanencia*.
- Concepto de operación, propiedades.
- Las estructuras algebraicas.
- Resolución de ecuaciones en diferentes estructuras.

6 Reflexiones finales

A través de la propuesta realizada por una estudiante del nivel secundario, hemos elaborado una pequeña lista de temas que creemos serían útiles para el desempeño de un profesor en su clase.

¿Cómo podríamos obtener más información sobre el conocimiento matemático que necesita un profesor para desempeñarse en su tarea docente entendida como la de un guía del aprendizaje que ofrece tareas a sus estudiantes que les permiten realizar un trabajo matemático de investigación e invención?

Generando conocimiento sobre las formas de pensamientos de los estudiantes, de los obstáculos en el aprendizaje, de los errores más frecuentes y en general, de sus concepciones. La investigación educativa es un camino ineludible hacia el conocimiento. No abrirle las puertas es quedar librados a la improvisación.

REFERENCIAS

- Clements, D.H., & Battista, M.T. (1990). Constructivist learning and teaching. *Arithmetic Teacher*, 38(1), 34-35.
- Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS). (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. Providence RI and Washington DC: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.
- Luque, C., Mora, L. & Torres, J. Una presentación de los números negativos. Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética. En http://www.usergioarboleda.edu.co/matematicas/memorias/memorias14/16.N%C3%BAmeros%20Negativos.pdf (24/02/07)