DIDACTICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Aplicando Situaciones Didácticas

Gurrola Ramos Francisco, Jáuregui Cota Rita Lizbeth
Universidad de Sonora, Hermosillo, Son., México
fcogurrola@hotmail.com y atir_22@hotmail.com

RESUMEN

Este material pretende ser un material para la reflexión didáctica a partir de la obra matemática denominada "Teorema de Pitágoras", consiste de una secuencia didáctica propuesta como taller con una semana de duración utilizando diferentes técnicas demostrativas e interactivas, con actividades donde se reconstruyen algunas de las demostraciones mas famosas de este teorema que consideramos el mas conocido y didáctico de los teoremas matemáticos. Permite la elaboración de situaciones didácticas que tienen una recuperación histórica, las cuales serán objeto de un proceso de análisis utilizando ingeniería didáctica.

ABSTRACT

This material is intended to be a didactic material for reflection from the mathematical work called "Pythagoras Theorem," consists of a sequence didactic proposal as a workshop with a weeklong demonstration using different techniques and interactive, where activities are reconstructed some of demonstrations of this most famous theorem believe that the most famous and teaching of mathematical theorems. Allows development of teaching situations that have a historic recovery, which will be subjected to a process of analysis using engineering teaching.

1 Introducción:

El problema detectado dentro del CBTIS 206, partiendo de un análisis situacional del plantel, el currículo actual, las didácticas aplicadas, los medios y recursos didácticos de este bachillerato, con la reforma del bachillerato tecnológico, implementado e año a partir del año 2004, y considerando las evaluaciones en todos los niveles (estatal, nacional e internacional) detectamos que es necesario un programa de formación docente en matemáticas, por lo que diseñamos un taller sobre el Teorema de Pitágoras, que se propone ilustrar la utilización de las situaciones didácticas, empleando estrategias centradas en el aprendizaje, que tomen como base el constructivismo social y la utilización de múltiples representaciones y hacerlo utilizando todos los recursos disponibles en el plantel.

2 Marco Teórico:

La ingeniería didáctica, metodología de este trabajo nace de la didáctica de las matemáticas francesa, recuperando en ella las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de las Situaciones Didácticas de BROUSSEAU y de la Transposición Didáctica de CHEVALLARD , que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.
"Con la teoría de las situaciones didácticas se estudian y modelan fenómenos didácticos que ocurren cuando un profesor se propone enseñar un teorema…", es decir, esta teoría "permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clase concebidas por el profesor

con le fin de disponer de un medio para realizar un cierto proyecto de aprendizaje". La teoría propone que se estudien las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos y a partir del control de estas condiciones se reproducen y optimizan los procesos de adquisición del conocimiento escolar. Es deseable que el profesor se convierta en un investigador para que observe y analice estas condiciones y a partir de sus resultados de investigación, diseñe, implemente y analice los resultados. Es esencial el carácter intencional de las secuencias construidas con el propósito específico de que alguien aprenda algo. Aun cuando una situación didáctica fracase su análisis puede aportar a la didáctica[i].

Para poder iniciar el estudio de cualquier objeto matemático es necesario abordar el aspecto cognitivo que esto implica y recurrimos a la teoría de VERGNAUD quien nos afirma: "*La teoría de los campos conceptuales supone que el amago del desarrollo cognitivo es la conceptualización" y también especifica "Campo conceptual es, para él, un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición"*[ii]. Esta teoría también nos permite el estudio del aprendizaje de competencias complejas. Otros conceptos importantes de esta teoría son el esquema y el invariante operatorio (teorema en acción). VERGNAU define el concepto como un triplete de tres conjuntos: Situaciones (referente), invariantes (significado) y representaciones (significado), Los ingredientes de los esquemas son las metas y anticipaciones, que permiten descubrir la finalidad de las situaciones, las reglas de acción que proporcionan continuidad de las secuencias de acción; los invariantes operatorios obtiene la información pertinente para deducir la meta y las reglas; y las posibilidades de inferencia.

3 Propuesta Didáctica:

La secuencia didáctica desarrolla un conjunto de situaciones, ubicadas según los siguientes contenidos, utilizando la modelación con las técnicas de: tablas, cortar y pegar, tablas, geometría, algebra y geometría dinámica, empleando las nuevas tecnologías.

Aquí se presentan en conjuntos de actividades, ordenadas en situaciones didácticas que favorezcan su posterior análisis y estudio GARCIADIEGO significo una motivación para este taller por su comentario:

"…el estudio de la historia y filosofía de las matemáticas puede arrojar luz para percatarse sobre la existencia de conflictos cognitivos en la práctica docente. Cuando por fines didácticos se simplifica un concepto matemático, surgen confusiones metodológicas que se convierten en barreras infranqueables para el estudiante. Tanto maestros como alumnos no sólo desconocen los orígenes y las causas de un conflicto de esta naturaleza en el aprendizaje de las matemáticas, sino que en ocasiones tal confusión es inadvertida."[iii]

Divulgar diferentes demostraciones, sensibilizar a los profesores sobre diferentes representaciones lo que denomina VERGNAUD esquemas y asegura que el desarrollo cognitivo se logra a través del desarrollo de una amplia variedad de esquemas.

Este taller se diseño con el objeto de atender la necesidad formar maestros de matemáticas en el Bachillerato Tecnológico y en este sentido tomamos como guía a GODINO el cual es un referente necesario al darnos a conocer los principios y estándares del NTCM de la enseñanza de las matemáticas: Equidad entendida como excelencia en la enseñanza para todos, sobre el currículo que debe ser coherente de interés e importante, la enseñanza proponer desafíos reales y constante observación y de apoyo, el aprendizaje basado en estrategias constructivas que impliquen actividades de reflexión y colaboración, evaluación que aporte información y de importancia, el empleo de Tecnología que estimule y motive para continuar conociendo la gran obra de las matemáticas.[iv]

Contenido de la Secuencia Didáctica:
1. Representaciones Tabulares (Triadas babilónicas)
2. Representaciones Geométricas y Cartesianas. (Descartes)
3. Representaciones en Geometría Dinámica (Euclides y Pappus)
4. Representación Lenguaje Natural
5. Representaciones Algebraicas. (Vieta)
6. Elaboración de carteles. (Ibn Qurra, Da Vinci)

3.1 ¿Pitágoras en Babilonia?

"La tableta PLIMPTON 322 (figura 1) se recuperó de un lugar desconocido en el desierto de Iraq, al parecer originalmente fue escrito alrededor de 1800 AC. Ahora se encuentra en la Universidad de Columbia. Esta tableta se ha interpretado como una relación de tripletas pitagórica." [v]
No es probable que sea una coincidencia que tanto los valores de p y q asociados a las filas de la tableta son regulares, y en el hecho de que en todos menos uno de los casos la expansión de 1/p y 1/q aparecen en los cuadros de recíprocos que se han encontrado. Parece plausible, que los babilonios supieron generar tripletas pitagóricas primitivas. Sabemos cómo se construyó la pastilla, pero no conocemos exactamente la razón por la que fue construido. La orden de las filas en función del tamaño de la primera columna sugiere que podría haber sido utilizado en una forma de la trigonometría. Quizás fue construido a partir de Pitágoras triples sólo para hacer más fácil la aritmética.

SECUENCIA 1 DESCUBRIENDO RELACIONES EN TRIANGULOS

ACTIVIDAD 1 En forma individual construye la TABLA 1:
ACTIVIDAD 2 En forma personal dibuja los triángulos rectángulos (según indique el mediador), tomando como catetos los valores de las columnas 3 y 4 y mide la hipotenusa (el lado mas largo)
ACTIVIDAD 3 Trabajando individualmente con los triángulos obtenidos en el punto anterior, bisecta los ángulos de cada triangulo y dibuja el circulo interior, mide su radio.
ACTIVIDAD 4 A partir de las figuras construidas, júntense en equipos para llenar la siguiente tabla. Donde obtiene midiendo a **c** la hipotenusa y **d** el diámetro del círculo.
TABLA 2.
ACTIVIDAD 5 En forma individual analiza y resuelve los siguientes tres pasos.
Busca una relación lineal entre las cuatro columnas del paso anterior, exprésala algebraicamente.
ACTIVIDAD 6 Regresa a los triángulos rectángulos obtenidos en el paso 3 y escribe una ecuación que exprese mas claramente tu descubrimiento.
ACTIVIDAD 7 Encuentra alguna relación algebraica entre los lados del triangulo a, b y c.
ACTIVIDAD 8 Comparte tus resultados con tu equipo y socializa las siguientes reflexiones:
¿Por qué corresponde la hipotenusa al valor p2+q2? ¿Expliquen las coincidencias? ¿Son equivalentes los resultados de las actividades 5, 6 y 7?

3.2. La Media Geométrica

DESCARTES nos muestra en el inicio del anexo de su obra “El Discurso del Método”, aun cuando se sugiere que este discurso es un prologo a su obra principal, como podemos obtener la raíz cuadrada de una cantidad dada utilizando únicamente la geometría *“Si la raíz cuadrada de GH es deseada, agrego a lo largo de la misma línea recta, una línea FG igual a la unidad; entonces, bisecto FH a K, describo el circulo FIH con K como centro, dibujo desde G una perpendicular que se extienda hasta I, así GI es la raíz requerida*.”[vi](figura2)

Euclides nos habla en la proposición 14 del libro II de “Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada” y el trabajo por él desarrollado en su demostración es el equivalente al significado actual de la media geométrica.

SECUENCIA2

ACTIVIDAD 1 Dibuja en forma individual semicircunferencias con diámetros de 3 a 17 cm. Traza una perpendicular en un punto D sobre el diámetro a una distancia de una unidad de uno de los extremos B. Mide la recta perpendicular DS (como en la figura 3). Construye una tabla con AD y DS

ACTIVIDAD 2 Dibuja en forma individual 5 semicircunferencias de 17 cm de diámetro. Llena cinco tablas trazando la perpendicular en diferentes puntos sobre el diámetro. Construye una tabla con AD, DB y DS.

ACTIVIDAD 3 Dibuja en forma individual 5 semicircunferencias con diámetro. Llena cinco tablas trazando la perpendicular en diferentes puntos sobre el diámetro. Construye una tabla con CD, CB y DS.

ACTIVIDAD 4 Analiza con tus compañeros los resultados y socializa tus conclusiones presentando una hoja de rotafolio con los esquemas y dibujos que ilustren su conclusión de equipo.

3.3 Nuevas Tecnologías y Pitágoras.

GARCIADIEGO muestra en este articulo a profundidad la demostración geométrica que hizo Euclides, la traduce de la versión en ingles de HEATH, hace comentarios sobre los problemas cognitivos que tienen los estudiantes, como el hecho de que cumple solo para algunos números, con el objeto de tener un enunciado verbal (representación natural) colocamos aquí *“La proposición 47 del primer libro de Euclides, que se conoce como teorema de Pitágoras, afirma que en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto. En otras palabras, en todo triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos (véase Figura 4). Si A es el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y B y C son las áreas correspondientes a los cuadrados construidos sobre los catetos, entonces A=B+C”*

Al efectuar un breve análisis sobre la obra de Euclides, nos da la impresión de que se encuentra redundante, en bastantes proposiciones, incluso según algunos autores hasta en libros completos, pero cuando un estudioso de esta obra toma en cuenta el contexto espacio tiempo, encuentra fácilmente la razón.

SECUENCIA 3 (DESPUES DE UNA INTRODUCCION PREVIA AL CABRI)
ACTIVIDAD 1

Investiga la demostración de Euclides sobre el Teorema de Pitágoras y reprodúcela con CABRI
ACTIVIDAD 2
Investiga la demostración de Pappus sobre el Teorema de Pitágoras y reprodúcela con CABRI
ACTIVIDAD 3
Obtenga conclusiones trabajando en equipo respecto a sus observaciones de estas actividades, socialicen su conclusión de equipo por medio de una hoja de rotafolio.

3.4 La Potencia en Geometría.

Se define la potencia de un punto P con respecto a una circunferencia como el producto de las longitudes de los segmentos formados al trazar una secante por dicho punto a la circunferencia. Potencia D = DA*DC, en el caso extremo de que esta secante se recorra hasta cortar en un solo punto se obtiene la tangente y en este caso la potencia queda expresada por la relación: potencia D=DB*DB (figura 6. En el libro 3 de los "Elementos", Euclides nos dice: "**Proposición 36**. Si se determina un punto exterior a un círculo y del punto al círculo caen dos rectas, y una de ellas corta al círculo y la otra le toca, el rectángulo comprendido por la secante entera y la parte exterior determinada entre el punto y la circunferencia convexa es igual al cuadrado de la tangente."[vii]

SECUENCIA 4 APLICANDO ALGEBRA EN GEOMETRIA

ACTIVIDAD 1
Apoyándose en la figura 6, en forma personal dibuje tres circunferencias con tres secantes y su tangente.
ACTIVIDAD 2
Utilizando las mediciones de DC, DA y DB construya una tabla.
ACTIVIDAD 3
En trabajo en equipo obtenga conclusiones y muestren sus resultados al grupo.
ACTIVIDAD 4
Apoyándose en la figura 7, en forma personal intente una demostración algebraica del teorema de Pitágoras.
ACTIVIDAD 5
Escriba la demostración sobre un rotafolio y explíquela a sus compañeros de equipo.
ACTIVIDAD 6
Socialice sus conclusiones de estas actividades.

3.5 ¡¡¡¡¡Pitágoras puede ser divertido!!!!!!

El grupo Alquerque de Sevilla nos muestra como podemos emplear los puzles para introducir a los niños de primaria o para reforzar a los de secundaria en el conocimiento del teorema, tomamos de su colección presentada el puzle mas simple atribuido al hindú BHASKARA (1114-1185), así como el puzle mas conocido él del ingles PERIGAL(1801-1898)[viii]

SECUENCIA 5 ROMPECABEZAS
ACTIVIDAD 1
Apoyándose en la figura 8, en forma personal compruebe el teorema de Pitágoras.

ACTIVIDAD 2
Escriba la demostración sobre un rotafolio y explíquela a sus compañeros de equipo.
ACTIVIDAD 3
Socialice sus conclusiones de estas actividades.

4. Conclusión

Dar a conocer estas secuencias que se integrarán dentro de un programa de formación de maestros del sistema de bachillerato tecnológico y donde puedan ser útiles, con el objetivo implícito de motivar y buscar convencer a los profesores frente a grupo sobre la necesidad de abordar la investigación tanto disciplinar para conocer como se construye el conocimiento matemático, como para interpretar los resultados de nuestra implementación dentro del aula con los estudiantes. Este trabajo surge por una pregunta específica de mi maestro de Desarrollo del Pensamiento Matemático ¿Cuántas demostraciones del teorema de Pitágoras conoce?, reconocer que solo sabia la que estudiábamos en ese momento la que proporciona HEATH en el libro de los Elementos, me hizo involucrarme en su estudio y exponer dentro de estas secuencias que serán objeto de un estudio de Ingeniería Didáctica para obtener el grado. Fue muy importante la página web de ARRANZ [ix]para el inicio de este trabajo.

Referencias:

[i] Cantoral, R. "Desarrollo del pensamiento matemático" 2000, México, Edit. Trillas
[ii] MOREIRA Marco Antonio, 2005, *"La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud"*, Instituto de Física Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, ww.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf
[iii] Garciadiego, Alejandro , *2002,* El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica, *Relime Vol.5, Núm. 3, pp. 251-270*
[iv] GODINO Juan D., *Didáctica de las Matemáticas para maestros* Universidad de Granada 2004
[v] Casselman, Bill. 2006, University of British Columbia, "*The Babylonian tablet Plimpton 322*" http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/pl322.html
[vi] *Descartes, René (1596-1650). La géométrie http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k29040s*
[vii] HEATH, Thomas *"The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary."* University Press, Cambridge, 1908. Second edition: University Press, Cambridge, 1925. Reprint: Dover Publ., New York, 1956. Reviewed: *Isis* 10 (1928), 60-62.
[viii] DUVULGAMAT, http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/Juegos/Rompecabezas.asp
[ix] ARRANZ, José Manuel, 2005,Educativa, "Teorema de Pitágoras" http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/cabriweb/1triangulos/teoremapitagoras.htm

ANEXOS:

TABLA 1

$a=p^2-q^2$	**b=2pq**	**c**	**d**

TABLA 2

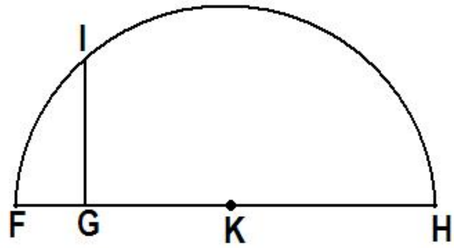
<table>
<tr>
<td>
Figura 1 Tableta PLIMPTON 322</td>
<td>

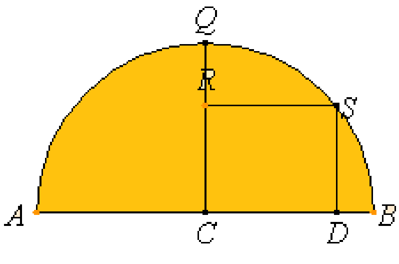
figura2 trazo de Descartes
para construir la raíz cuadrada</td>
</tr>
<tr>
<td>

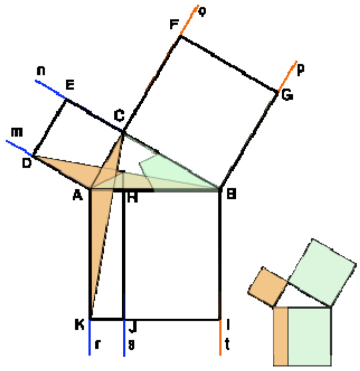
Figura 3 Proposición 36, libro II de “Los Elementos”</td>
<td>

Figura 4 Demostración de Euclides</td>
</tr>
</table>

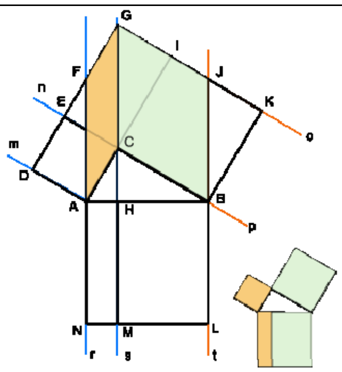
<table>
<tr>
<td>

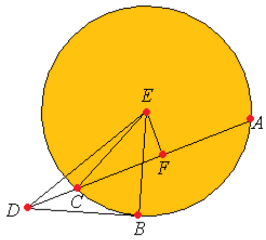
Figura 5 Demostración de Pappus</td>
<td>

Figura 6 Potencia Geométrica</td>
</tr>
</table>

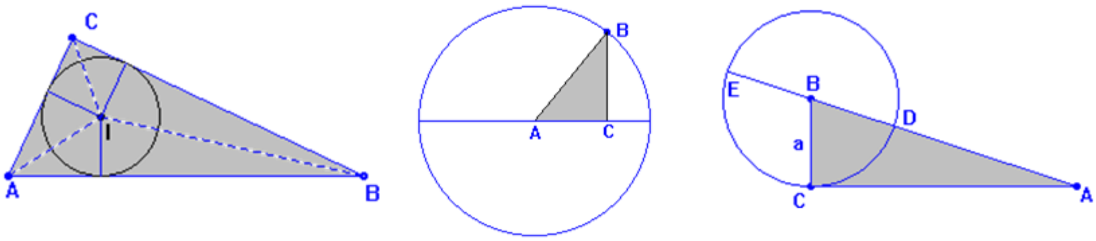


Figura 7 Representación Algebraica

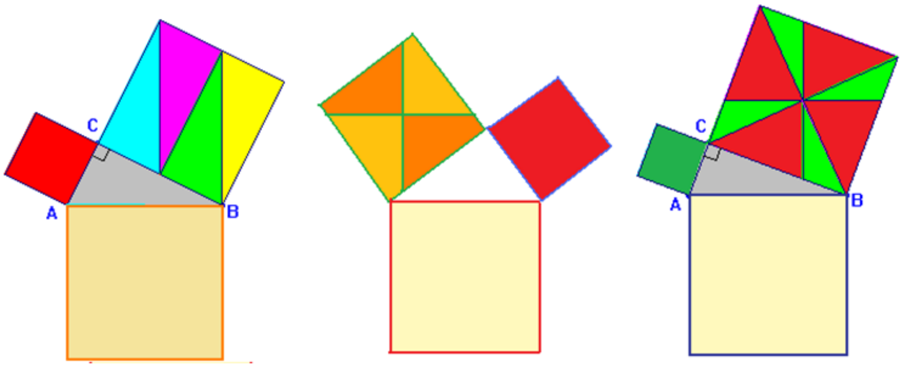


Figura 8 *Puzles del Teorema de Pitágoras*