DE LA EPISTEMOLOGÍA DE LA FÓRMULA PARA LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE TERCER GRADO DE BOMBELLI-CARDANO A LA CONSTRUCCIÓN DE UNA SECUENCIA DE ACTIVIDADES PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO DEL NÚMERO COMPLEJO

Rocío ANTONIO y Gustavo MARTÍNEZ SIERRA
Programa de Matemática Educativa,
CICATA-IPN, Unidad Legaria,
Calzada Legaria #694 Col. Irrigación
Del. Miguel Hidalgo, C.P.11500, México, D.F.
antonny_81@yahoo.com.m, gamartinezsierra@gmail.com, gmartinezs@ipn.mx

RESUMEN

En el presente artículo se ofrecen resultados de una investigación sobre construcción del conocimiento desde la *aproximación socioepistemológica.* En particular estamos interesados en el estudio de los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de convención y articulación matemática* (Martínez-Sierra, 2005). De manera específica este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. El análisis de la producción de los estudiantes, al trabajar una secuencia de actividades diseñada por nosotros en base a la hipótesis anterior, da evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "las raíces cuadradas de números negativos no existen**",** nuestra secuencia los indujo a operar con ellos y de esta manera construir un significado en el plano operativo.

Palabras clave: Socioepistemología, construcción de conocimiento, convención matemática, número complejo, ecuación de tercer grado.

1. Introducción

En trabajos previos (Martinez-Sierra, 2005) hemos desarrollado algunas nociones teóricas que han sido útiles, por un lado, en la explicación de algunos fenómenos didácticos y, por el otro, en la interpretación de procesos de construcción de conocimiento. En particular, en el plano de la construcción de conocimiento, hemos dado evidencia de que ciertas piezas de conocimiento, a las que hemos llamado convenciones matemáticas, pueden ser entendidas como producto de un proceso de articulación matemática o de un proceso de integración de conocimientos. En este mismo sentido, en el plano de la explicación de fenómenos didácticos, hemos dado evidencia de que algunas de las rupturas conceptuales presentes en la escuela tienen su origen en la desarticulación de cierta parte del corpus de la matemática escolar (Martínez-Sierra, 2005).

De manera específica este trabajo indaga sobre qué alternativas pueden ser factibles para la construcción escolar del significado de los números complejos, bajo la hipótesis de que su significado puede ser construido a través del proceso de convención matemática. Al respecto, a partir de un análisis histórico-epistemológico de la búsqueda de solución general de ecuaciones de tercer grado de la forma $y^3 + py + q = 0$, afirmamos que *el significado del número complejo, en un plano algebraico, puede ser interpretado como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones*.

Para contrastar empíricamente la hipótesis anterior se procedió metodológicamente de la siguiente manera: 1) se diseñó secuencia de actividades, en donde se *traspuso* (en sentido de Chevallard) tal hipótesis constructiva a polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$, 2) se experimentó la decencia con 10 estudiantes del nivel medio superior mexicano (15 a 18 años) y 3) se analizó la producción de los estudiantes.

2. Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

La socioepistemología es una aproximación sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del saber, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización a través de la enseñanza[1] (Cantoral y Farfán, 2004). Más precisamente, dentro de la teoría socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes dimensiones interdependientes son las que condicionan/determinan la construcción y la difusión del conocimiento matemático: las dimensiones cognitivas, didácticas, epistemológicas y sociales. Estas últimas condicionan/determinan, a su vez, las tres primeras. La *dimensión didáctica* atiende a aquellas circunstancias propias del funcionamiento de los diferentes sistemas didácticos y de enseñanza. La *dimensión cognitiva* se ocupa de las circunstancias que son relativas al funcionamiento y la actividad mental de las personas. La *dimensión epistemológica* se aboca a aquellas circunstancias *que* son propias de la naturaleza y significados del saber matemático. La *dimensión social* atiende a las circunstancias conformadas por las normativas y valoraciones sociales del saber y la manera en como éstas influyen en las demás dimensiones. En este sentido, las prácticas del artesano, del ingeniero, del médico, del profesional, o más ampliamente de una época o una cultura, son consideradas como constituyentes indisociables del saber escolar.

3. El proceso de convención matemática

Un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este

[1] "La socioépistémologie procède d'une approche systémique qui permet d'aborder les phénomènes de production et diffusion de la connaissance dans une perspective multiple, qui intègre l'étude des interactions entre l'épistémologie du savoir, sa dimension socioculturelle, les procédés cognitifs asocies et les mécanismes de l'institutionnalisation *via* l'enseignement" (Cantoral y Farfán 2004, p. 139).

caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2003, 2005).

En el sentido anterior entonces, una convención matemática puede ser entendida como un consenso al seno de la comunidad que trabaja por dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. Dos ejemplos en relación a los exponentes, extraídos de la historia de las ideas matemáticas, servirán para precisar nuestro planteamiento del "principio de conveniencia" en el que descansa nuestra caracterización de convención matemática (primer ejemplo) y su carácter relativo al conjunto de conocimientos de referencia (segundo ejemplo).

Primer ejemplo. Hacia finales del Siglo XVI se sabía que las curvas $y = kx^n$ (n = 1, 2, 3, 4,…), llamadas de índice n, tenían una propiedad que era llamada su "razón característica". Este conocimiento era parte general de la problemática fundamental de la época referente al cálculo de áreas determinadas por distintas curvas, tanto mecánicas como algebraicas (Bos, 1975), y a los significados que las áreas guardan en contextos de variación[2]. Tomando como ejemplo la curva $y = x^2$ se decía que tiene razón característica igual a 1/3; ya que si tomamos un punto **C** arbitrario de la curva (Figura 1) el área de **AECBA** guarda una proporción de 1:3 con respecto al área del rectángulo **ABCD** o lo que el mismo que la proporción entre el área de **AECBA** y el área **AECDA** es de 1:2. En general se sabía de que la razón característica de la curva de índice n es $1/(n+1)$ para todos los enteros positivos n[3].

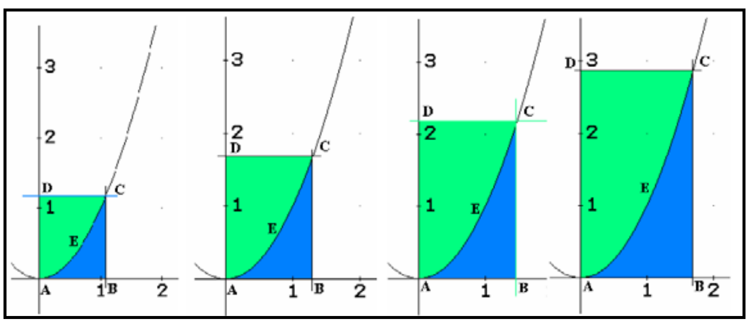


Figura 1. Razón Característica de la curva $y = x^2$

En sus investigaciones acerca de la cuadratura de las curvas John Wallis (Struik, 1986) utilizó lo anterior para hacer el siguiente razonamiento, que en el fondo es una manera de convenir que el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ debe ser igual a 1/2 con el objetivo de unificar la noción de razón característica con la noción de índice (aquí presentamos una paráfrasis del razonamiento):

[2] Por ejemplo es bien conocida la forma en que Galileo estableció su ley de caída de los cuerpos a través de entender el área determinada por una gráfica velocidad-tiempo como la distancia recorrida por el cuerpo.

[3] En términos modernos la noción de razón característica se apoya en que (a > 0) $\left(\int_0^a x^n dx\right) : a^{n+1} = 1:(n+1)$

‘Como la curva $y = x^2$ tiene una razón característica de 1/3, la curva $y = \sqrt[2]{x}$ también debe poseer una razón característica y debe ser igual a 2/3 (baste observar que las áreas debajo de ambas curvas se complementan para formar el rectángulo). Además, como la curva de índice 2 posee razón característica es de suponer que una curva que posea razón característica también posea un índice, entonces ¿Qué índice debe tener la curva $y = \sqrt[2]{x}$? Como 2/3=1/(1+1/2) el índice debe ser 1/2’

Segundo ejemplo. Wallis también interpreta a los números negativos como índices[4]. Define el índice de $1/x$ como -1, el índice de $1/x^2$ como -2, etc. A continuación el intenta dar coherencia a estos índices y a la noción de razón característica (Confrey & Dennis, 2000). En el caso de la curva $y = 1/x$ la razón característica característica debe ser $\frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$[5]. Wallis aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva $1/x$ diverge; el cual, al parecer, era un hecho conocido en la época. Lo anterior puede ser interpretado como que la proporción entre el área de **ABCEFA** (Figura 2) y el área del rectángulo **ABCD** es de 1:0. Cuando la curva es $y = 1/x^2$ la razón característica debe ser 1/(-2+1)=1/-1. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de la aritmética moderna de números negativos. Él no utiliza la igualdad 1/-1 = -1, más bien él construye una coherencia entre diversas representaciones; que es en esencia una convención matemática. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y = 1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva $1/x$, concluye que la razón 1/-1 es mayor que infinito (*ratio plusquam infinita*). Continúa concluyendo que 1/-2 es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual, la traducción más adecuada sería “La Aritmética de los Infinitos”.

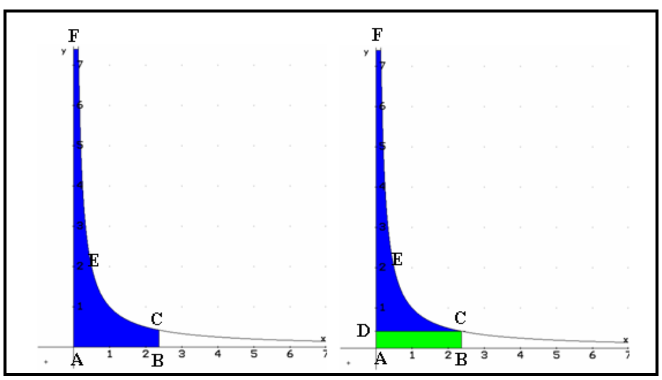


Figura 2. Razón Característica de la curva $y = 1/x$

[4] Deseamos aclarar que a través de la literatura consultada no fue posible determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para realizar hacer tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones de los exponentes que ya se trabajaban en esa época en el contexto algebraico (Martínez, 2003).

[5] Lo que hoy se entiende por fracciones, en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como ∞ es a 1.

Lo anterior motiva a centrar nuestra atención en los procesos de integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Teóricamente, desde un principio, esta búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir, cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

En nuestros ejemplos respecto a las formulaciones de Wallis, la búsqueda de coherencia entre la noción de índice y de razón característica (en donde la razón/proporción posee significados específicos que difiere de considerarla como número) provoca dos convencionalismos: el índice de $y=\sqrt[2]{x}$ como 1/2 y diversos tipos de infinito representados por 1/0, 1/-1, 1/-2, etc. Esto señala el carácter *conveniente y relativo* de la convención matemática respecto a la integración de las nociones de índice y razón característica y las representaciones algebraicas y gráficas.

4. Una epistemología de los números complejos a través del proceso de convención matemática

A lo largo de la historia se identifican cuatro grandes etapas, caracterizadas por los cambios observados en las concepciones epistemológicas de los números complejos (Gómez y Pardo, 2005; Rosseel y Schneider, 2003, 2004): 1) *Algebraica*. Primeras apariciones de las raíces cuadradas de cantidades negativas, 2) *Analítica*. Aceptación y generalización del uso de las expresiones imaginarias gracias al desarrollo del análisis infinitesimal, 3) *Geométrica*. Introducción de un eje de imaginarios que tiene asociado $\sqrt{-1}$ como unidad perpendicular a 1 y 4) *Formal*. Formalización de los números complejos. Nuestro análisis histórico epistemológico se ubica en el contexto de la etapa algebraica.

En 1545 Cardano publicó Stillwell (1989) en su *Ars Magna* el método de solución de Tartaglia. Esta solución se conoce como el método de Cardano, la cual para el caso $y^3+py+q=0$ toma la forma:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

En términos modernos la fórmula implica a los números complejos cuando $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$. Sin embargo, no es posible considerar esto como un caso sin solución, *porque una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real*. Así la fórmula de Cardano plantea el problema de convenir un valor real, encontrado por la inspección, digamos, con una expresión de la forma: $y=\sqrt[3]{a+b\sqrt{-N}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-N}}$ (siendo N un número natural).

Cardano no hizo frente a este problema (la simplificación de $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-N}}$, llamado el caso irreducible) en su *Ars Magna*, consideró que estos números eran “tan sutiles como inútiles”; fue incapaz de hacer algo con el llamado “caso irreducible” de la ecuación cúbica, en el cual hay tres soluciones reales que aparecen como la suma o diferencia de lo que ahora llamamos números complejos.

Esta dificultad fue resuelta en el siglo XVI por Rafael Bombelli, cuya *Algebra* apareció en 1572 (Struik, 1986, *pp.121-124*). De esta manera Bombelli calculó el álgebra formal de números complejos (llegando a formular las cuatro operaciones con los números complejos en la forma actual) con el objetivo particular de reducir expresiones $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-N}}$ a la forma $c+d\sqrt{-1}$, así su método le permitió mostrar la “realidad” de algunas expresiones que son resultado de la fórmula de Cardano. Por ejemplo, la solución, dada por la fórmula de Cardano, de $y^3 = 15y+4$ es

$$y = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \text{ --------------------- (I)}$$

Por otra parte, la inspección da la solución y = 4, Bombelli tenía el presentimiento que las dos partes de y en la fórmula de Cardano eran de la forma $2+n\sqrt{-1}$, $2-n\sqrt{-1}$ y él encontró por cubos estas expresiones formalmente, usando $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$:

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = (2)^3 + 3(2)^2\left(\sqrt{-1}\right) + 3(2)\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 2+11\sqrt{-1}$$

Esto ciertamente sería:

$$y = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} = 2+\sqrt{-1} \text{ --------------------- (II)}$$

$$y = \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = 2-\sqrt{-1} \text{ ---------------------- (III)}$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) se obtiene:

$$y = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4 \quad \text{por lo tanto} \quad (4)^3 = 15(4)+4$$

En conclusión, nuestra hipótesis de construcción de conocimiento se basa en la consideración de que la primera formulación (Bombelli-Cardano citados en Stillwell; 1989, Struik; 1986 y Dunham, 1999) en relación a los números de la forma $A+B\sqrt{-N}$ (Siendo N un número natural) fueron *aceptados* en un dominio limitado algebraico; porque ellos aparecieron como útiles en la solución de ecuaciones de tercer grado $y^3+py+q=0$ (y no en las ecuaciones de segundo grado como se presentan en los libros de texto). Nuestra interpretación es que *se aceptó* la existencia de la raíz cuadrada de números negativos, junto a su operatividad, para *articular* una fórmula algebraica:

$y = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}\right)}\right)}$, con el hecho de que una ecuación cúbica siempre tiene al menos una raíz real. Es decir, la existencia del número complejo puede admitirse a tanto elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones. A tal proceso lo caracterizamos con lo que hemos llamado *convención matemática*.

5. Diseño, puesta en escena y análisis de una secuencia de actividades

Para la construcción de la secuencia de actividades a la hipótesis constructiva anterior la hemos *transpuesto*[6] a polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$. En particular, el objetivo de la secuencia es *propiciar la aceptación de los números complejos y la operatividad de la raíz cuadrada de números negativos* en estudiantes de nivel medio superior, dentro de un contexto de cálculo de raíces de polinomios, de manera específica con polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$. Consideramos que mediante este contexto es posible construir el significado de número complejo y su operatividad (en el proceso algorítmico-algebraico del cálculo de las 'n-raíces' de una ecuación) como convención matemática, es decir, como elemento unificador entre el grado de la ecuación y sus soluciones. Nuestra hipótesis es que la aceptación puede apoyarse en la idea de que tales polinomios tienen '*n*-raíces diferentes'; idea que a su vez puede ser apoyada con la aceptación de la operatividad de las raíces cuadradas de números negativos.

El diseño de nuestra secuencia consta de trece actividades, las cuales están agrupadas en tres fases: I. *Recordar* el cálculo de raíces de una ecuación (únicamente con raíces reales), II. *Identificar* el conocimiento previo que tiene el estudiante sobre la raíz cuadrada de un número negativo, III. *Aceptar y operar* con raíces cuadradas de números negativos en el cálculo de raíces; polinomios de la forma $x^n - 1 = 0$.

5.1 La puesta en escena

La exploración de la secuencia fue realizada en el plantel de nivel medio superior en de la ciudad de Chilpancingo, (Capital del estado mexicano de Guerrero), donde se trabajó con diez estudiantes (6 alumnas y 4 alumnos) de segundo grado por tres horas y media. Con los estudiantes se formaron tres equipos de trabajo: dos de ellos contaron con tres estudiantes (equipo 1 y 3) y uno de cuatro integrantes (equipo 2). Aquí únicamente se reportan los resultados del equipo 1 y 2. El tiempo abarcado, estuvo determinado por el rendimiento de la participación de los estudiantes en la secuencia, la cual les permitió llegar hasta la actividad diez de la tercera fase.

Observamos que los objetivos propuestos de las dos primeras fases (Recordar el cálculo de raíces "reales" y el de identificar el conocimiento previo de las raíz cuadrada de un número negativo) sí se alcanzaron, pero, el objetivo de la tercera fase (el de aceptar y operar con las raíces cuadradas de números negativos) no se alcanzó de manera general; ya

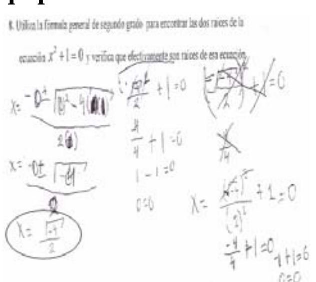
[6] Utilizamos este término en el sentido de la Trasposición didáctica de Chevallard ().

que en cada equipo no llegó abarcar todas las actividades que contempla esta fase, además no todos los integrantes realizaron las operaciones solicitadas en la actividad 9 y 10 (la comprobación de las raíces encontradas), por motivos del factor tiempo.

5.2 La producción de los estudiantes

Fase II. Identificar el conocimiento previo que tiene el estudiante sobre la raíz cuadrada de un número negativo.

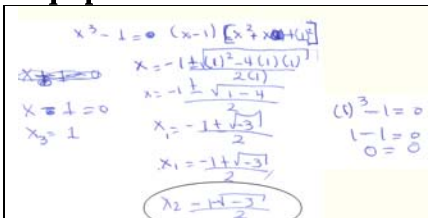
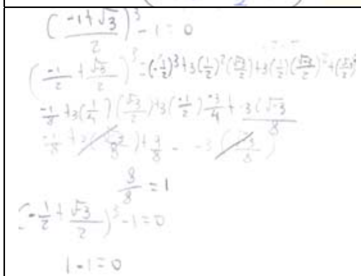
La segunda fase (Actividades 7 y 8) tiene como objetivo identificar el conocimiento previo (como denota a la raíz cuadrada de un número negativo y la familiaridad que tiene con ella) de los estudiantes, al calcular las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+1=0$ a través de la petición explícita del uso de la fórmula general de segundo grado. El resultado general encontrado es que el conocimiento previo identificado en los dos equipos es que *"las raíces cuadradas de números negativos no existen"*. En la tabla siguiente mostramos la descripción e interpretación de la producción de los estudiantes.

Equipo 1 	Estos estudiantes necesariamente querían obtener el valor de $\sqrt{-4}$, lo introducen a la calculadora para obtener su valor y dicen que marca: "*error*", concluyen que "*no existe*". Al principio les fue difícil aceptar a este número como solución pero al hacer la comprobación dado a los procedimientos operacionales utilizados (por ejemplo al elevar una potencia a una fracción) y recordando que dependiendo del grado de la ecuación son las raíces a encontrar, concluyen que es "*una raíz con signo menos y otra con signo más*".
Equipo 2 	En este equipo se da dos casos para obtener las raíces de esta ecuación, el primer caso es utilizando la fórmula general tal como se lo pedíamos y el segundo caso es despejando directamente a x en la ecuación. Al utilizar la fórmula de segundo grado argumentan que "no existe la raíz". Se les apoya en este aspecto para encontrar la solución mediante la fórmula general de segundo grado y concluyen en cada caso con sus resultados encontrados que "sí" son raíces de la ecuación porque "se pueden igualar".

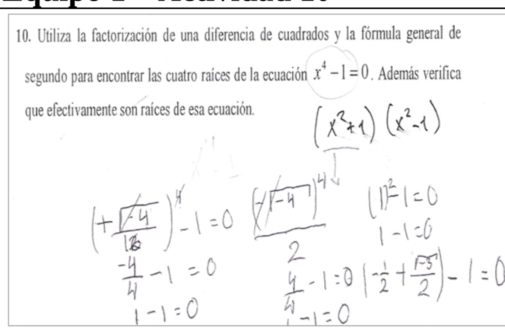
Fase III. Aceptar y operar con raíces cuadradas de números negativos en el cálculo de raíces, de polinomios de la forma $x^n=1$

En esta tercera fase (Actividades. 9, 10, 11 y 12) se esperaba que el estudiante opere y acepte a las raíces cuadradas de números negativos como soluciones de estas ecuaciones. Para motivar a ellos se les pide que verifiquen si satisfacen a la ecuación las raíces encontradas. Aquí se utilizarán las herramientas del desarrollo de un binomio, factorización y la fórmula general de segundo grado. El objetivo de estas actividades es que al realizar las factorizaciones de los polinomios en las actividades 10, 11 y 12 los estudiantes podrían darse cuenta que ya se tienen algunas de sus raíces, las cuales encontraron en las actividades anteriores. En las tablas siguientes mostramos la descripción e interpretación de la producción de los estudiantes en los dos equipos aquí reportados.

Equipo 1 – Actividad 9

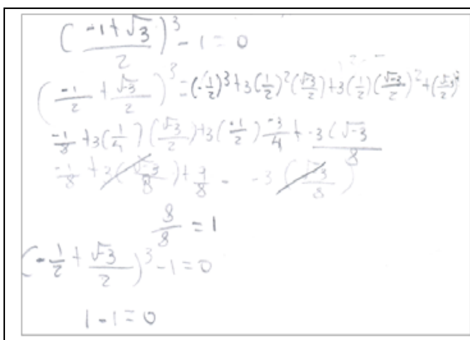
	Al igual que en la actividad 8, este equipo trata de simplificar la solución obtenida $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$
	La reacción que tuvieron estos estudiantes fue peor a la de la actividad 8 con la obtención de este valor y más cuando se les pidió que verificaran si era raíz de la ecuación cúbica; para ellos no fue nada sencillo realizarla por los cálculos requeridos, en especial $\left(\frac{\sqrt{-a}}{b}\right)^n$

Equipo 1 – Actividad 10

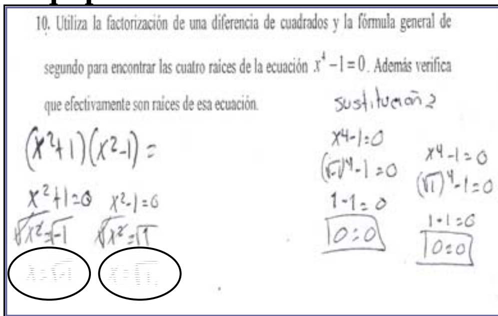
	En la actividad 10. Podemos observar que en las dos comprobaciones elimina directamente la raíz cuadrada con el exponente cuatro y elevan al denominador al cuadrado.

Equipo 2 – Actividad 9

En este equipo no hubo argumentos concretos al término de estas actividades (9 y 10), en por qué son raíces los valores encontrados de las ecuaciones propuestas, lo único que nos dijeron fue lo que observaron al calcularlas: *son difíciles de hacer, siguen un procedimiento largo y que algunas son más difíciles que otras de menor potencia.*

	En este equipo solamente una de las integrantes realizó las operaciones de la **actividad 9** y explicó a los demás las operaciones realizadas, pero no logró que las demás realizaran los cálculos de comprobación.

Equipo 2 – Actividad 9

	Se observa los cálculos obtenidos por un integrante del equipo. La cual argumenta su comprobación: "*es raíz a la cuatro* $\left(\sqrt{-1}\right)^4=\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ *y las raíces iguales se suman y tienes doble raíces, tienes cuatro raíces y son dos, ésta y ésta sería* $\left(\sqrt{-1}\right)^2$ *y ésta igual, esta se elimina, menos por menos da más, sería uno, menos uno, sería cero igual a cero*" Algunos integrantes comprueban solamente una raíz, la positiva y verifican si son raíces de la ecuación propuesta, por último se les pregunta que si son raíces de esa ecuación, lo cual dicen que "*si porque se pueden igualar*".

6. A manera de Conclusión

En los resultados de la puesta en escena se evidencia de que a pesar que los estudiantes insistían en que "*las raíces cuadradas de números negativos no existen*"**,** nuestra secuencia los indujo a operar con ellos para encontrar las raíces de algunos polinomios propuestos en las actividades y así, aceptándolos de manera operativa en las actividades 8 y 9 que los valores obtenidos son raíces. El argumento básico es que "se pueden igualar" es decir, que al sustituir los valores en la ecuación su resultado es cero. Lo anterior considerando que no comprobaron todos los valores obtenidos en las ecuaciones solamente algunos de ellos. Consideramos que nuestra secuencia de actividades da indicios de que es posible construir el significado del número complejo y su operatividad en tanto el proceso de convención matemática.

Bibliografía

- Antonio, R., 2008, *Una construcción del significado del número complejo y su operatividad a través del proceso de convención matemática***.** Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Guerrero-Maestría en Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas.
- Bagni, G., 2001, 'La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior'. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* **4(1)**, 45-62.
- Cantoral, R. & Farfán, R. M. ,2004,. "La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe". *Recherches en Didactique des Mathématiques* **24(2.3)**, 137 - 168.
- Dunham, W.,1999. *Euler. The master of us all.* The Dolciani mathematical expositions, N.22, EEUU: The Mathematical Association of America.
- Goméz, A. and Pardo, T., 2005, 'La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos. Un estudio en el nivel universitario'. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, pp.251-260.
- Martínez-Sierra, G., 2005, "Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **8 (2)**, 195-218.
- Martínez-Sierra, G.,2003, *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de*

construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponents. CICATA Doctoral Thesis - IPN. México.

- Rosseel H. ; Schneider M.,2003, 'Ces nombres que l'on dit "imaginaires"'. **Petit X 63**, 53-72.
- Rosseel H. ; Schneider M.,2004, 'Des nombres qui modélisent des transformations'. **Petit X 66**, 7-34.
- Stillwell, J.,1989, *Mathematics and its history*. New York: Springer-Verlag.
- Struik, D. J. ,1986, *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.