RESIGNIFICACIÓN DE LA DERIVADA EN LA INGENIERÍA POR MEDIO DE LA CONCEPCIÓN LAGRANGIANA

TERESA GUADALUPE PARRA FUENTES, FRANCISCO CORDERO OSORIO
Cinvestav IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508 Col. San Pedro Zacatenco
C.P. 07360, México, DF
tparra@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

ABSTRACT

En este escrito presentamos un marco de referencia para resignificar la derivada en un dominio diferente a la matemática misma, como la Ingeniería. Tratando de dar cuenta de la relación entre ambos dominios ya que coincidimos con Cantoral y Farfán (2003) cuando mencionan que la matemática, en especial la del nivel superior, está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia en donde adquiere sentido y significación. Para lograr tal fin seleccionamos el tema "Conservación de la masa" de Mecánica de Fluidos en donde está presente la derivada, y para favorecer tal resignificación usamos la idea de Lagrange sobre ésta. Este trabajo está fundamentado en la Aproximación Socioepistemológica que incorpora de forma sistémica cuatro componentes para la construcción social del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

Problemática

El conocimiento matemático que se enseña en la escuela no logra hacerse un conocimiento funcional en los estudiantes, es decir, no logra transformar su realidad y al estudiante mismo.

Constantemente escuchamos a los estudiantes preguntándose para qué les sirve aprender matemáticas. Para ellos lo más importante es que ésta satisfaga las necesidades de su vida diaria, llevando de esta forma al conocimiento a un nivel utilitario. Y es de esperarse ya que el estudiante no le encuentra sentido ni significado a la matemática que se le enseña a través de algoritmos y secuenciaciones, lo cual es resultado de que el discurso matemático escolar está fuertemente anclado a los conceptos. El centrarse en los conceptos y formalismos, lleva a concebir a la matemática sin sentido encerrada en sí misma, y no apreciar que se va desarrollando y resignificando al paso de la vivencia institucional. Es decir, que en el recorrido escolar la matemática va adquiriendo sentido y significación, en especial la matemática del nivel superior. Ya que esa matemática es aplicada y llevada a un escenario en donde es contextualizada, adquiriendo razón de ser. Este sentido y significado será en función de la actividad humana que desarrolle el dominio que se trate, por lo que al haber una variedad de dominios existe una variedad de resignificaciones.

Sin embargo estos desarrollos y diferentes resignificaciones no se hace evidente, ya que parecería que existe una ruptura entre la matemática y otros dominios, como por ejemplo el dominio de la ingeniería. Omitir estas relaciones obscurece a los estudiantes la funcionalidad[1] de la matemática.

De alguna manera tal discurso presenta al conocimiento como preexistente a la experiencia del ser humano, esto es, presenta a la matemática como un producto material acabado que siempre ha existido, por lo que sólo debemos tomarlo y

[1] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario.

aprenderlo, haciendo a un lado la esencia de esa matemática a las situaciones que le dan sentido. Soslaya el desarrollo y diferentes resignificaciones que ha tenido a través del tiempo: a lo que la ha llevado a ser como es y no de otra forma, esto es, a las prácticas sociales que norman el conocimiento, de tal manera que éste se incorpora al individuo transformando su realidad. Desde esta perspectiva podemos ver que hay ausencia de situaciones que le permitan al estudiante usar su conocimiento, que a través de su experiencia construya argumentos para dar sentido a sus procedimientos y de esta forma construir un conocimiento que no esté basado en la memorización sino en su práctica.

Un ejemplo de las consecuencias que el discurso matemático escolar ha generado en los estudiantes es el caso de la derivada, a la cual el estudiante no le incorpora mayor significado que "la pendiente de la recta tangente a una curva" la cual no se resignifica y algunas veces es el "obstáculo" para que se resignifique (Rosado, 2004). Además se ha encontrado en algunos casos, que aún los estudiantes de ingeniería siguen teniendo dificultades con el concepto de pendiente (Mirón, 2000). Así, investigaciones como éstas hacen notar que lo que se enseña a los estudiantes no los transforma sino que por el contrario se les mete en un sendero de dificultades. Aspectos variacionales que son fundamentales en la esencia de la derivada no forman parte de los significados que el estudiante pudiera incorporarle. Esto ocurre por la ausencia de marcos de referencia que permitan que el estudiante resignifique la derivada, ausencia de situaciones que centren la atención en la noción de variación. La cual nos rodea cotidianamente a través del movimiento y que el discurso matemático escolar nos presenta a través de fórmulas. Cabe señalar lo que en la perspectiva socioepistemológica entendemos por resignificación que es el uso del conocimiento ante una situación específica.

La importancia de la historia para la didáctica actual

La aproximación socioepistemológica es un marco teórico que plantea una visión alternativa, ya que permite el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión sociocultural y los procesos cognitivos asociados a los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza, permite replantear la epistemología de la construcción del conocimiento, para permitir explicar la construcción social del conocimiento matemático a la luz de las prácticas sociales y las fuentes de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004).

Esta aproximación pone especial interés sobre lo que permitió que los objetos matemáticos surjan, aquellas prácticas que *norman* el nacimiento de un conocimiento. A las que denominamos prácticas sociales, y con base a ellas tratar de explicar los procesos de construcción, adquisición y difusión del saber matemático **(Cantoral, et al (2006)).** Esto conduce a estudiar la génesis histórica de los conceptos en donde el interés radica en conocer las circunstancias que permitieron construir el conocimiento y no sólo las que dieron origen a su evolución y eventualmente rescatar lo que pudiera ser asimilable a una didáctica actual. Por ello Cantoral (2001) señala la importancia de conocer qué elementos permitieron pensar al concepto en su estado original, que lo plantee circunstancialmente como natural, los cuales son justamente los constructos asociados al concepto, la fenomenología intrínseca y la didáctica de antaño, y con ellos se plantea la reconstrucción de los conceptos asociados y su evaluación en el sistema educativo. De tal forma que se recuperen los significados inherentes al concepto y las intuiciones primarias del sujeto que le permitan acceder al concepto aunque provengan de diferentes fuentes de referencia (Marcolini y Perales, 2005). Este planteamiento nos dirige a buscar nuevas herramientas y considerar otras concepciones sobre los conceptos matemáticos que han sido soslayados por el discurso matemático escolar. Como es la concepción de Lagrange sobre la derivada que consiste en el coeficiente del término lineal en el desarrollo de la serie de potencias esto es, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{3}+...$

Su idea era fundamentar el análisis de manera rigurosa pero lejos de los infinitesimales. Consigue definir las derivadas de una función sin recurrir ni a límites ni a infinitésimos, pero sólo gracias a que supone que toda función se puede desarrollar en serie de potencias en la que no aparecen, además, exponentes irracionales.

Introduce algunas de las notaciones y la terminología que se conservan en uso en la actualidad. Por ejemplo, los términos función primitiva, funciones derivadas y funciones analíticas así como las notaciones $f'x, f''x, f'''x$, etc., para las funciones derivadas.

En su primer capítulo de Teoría de las funciones analíticas, explica la forma en que se obtiene el desarrollo en series de potencias de una función. Tomando a la función f_x, e incrementando *x* en *x+i*, donde *i* es una cantidad cualquiera indeterminada, la función devendrá en *f(x+i)* y por la teoría de series se tendría:

$$f(x+i)=f(x)+pi+qi^2+ri^3+etc$$

en la que *f(x)* es la función primitiva y *p, q, r,* etc., las funciones derivadas de la primitiva. A continuación da un argumento con el que excluye la presencia de términos de la forma $ui^{m/n}$ en la serie, en base a que darían *n* distintos valores para el sumando del que forman parte, que al combinarlo con aquellos valores que tendrán *f(x)* llevaría a una contradicción.

En el siguiente párrafo del mismo capítulo, observa que $f(x+i)$ tendrá por valor a *f(x)* para el valor particular *i = 0,* de ahí que $f(x+i)$ deba ser de la forma:

$$f(x+i)=f(x)+iP$$

Siendo *P* una función de *x* y de *i*, tal que no devendrá infinita cuando *i=0*. Análogamente, se tiene para *P*

$$P=p+iQ$$

Donde iQ deviene nula cuando $i=0$ y *Q* es función de *x* e *i*, del mismo modo se continúa sucesivamente el proceso. Esto es:

$$\begin{aligned} f(x+i) &= f(x)+iP \\ &= f(x)+ip+i^2Q \\ &= f(x)+ip+i^2q+i^3R \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Del desarrollo anterior, comenta que en cada caso, se proporciona el valor exacto del residuo (Pi, Qi^2, Ri^3, etc) y sólo el número de sumandos que se quieran. Este comentario y el párrafo siguiente indican completamente su concepción en cuanto al uso que se espera tener de la serie y, por ende, del papel que en ella desempeña el residuo. Esta observación consideramos que arrojan una información distinta sobre la evolución de las concepciones asociadas a la serie de Taylor. Un ejemplo de obtener la derivada de esta forma es:

Sea $f(x) = x^3$, entonces tendremos que $f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$ por lo que $f'(x) = 3x^2$

Pero la principal ventaja del método que acabamos de exponer, consiste en que se hace ver cómo las funciones p, q, r, etc. Resultan de la función principal f_x, y sobre todo en que prueba que los restos iP, iQ, iR, etc. son las cantidades que debieran volverse nulas cuando *i=0*, de donde se obtiene esta consecuencia importante, que en la serie $f_x + pi + qi^2 + n^3 + \ldots$ que nace del desarrollo de $f(x+i)$ siempre se puede tomar bastante pequeña para que un término cualquiera sea mayor que la suma de todos los términos que le siguen; y que ello tenga lugar de este modo para todos los valores más pequeños de i[19].

Nótese el objetivo de la incorporación del residuo en la serie, pues al colocarlo en el desarrollo puede limitar el número de términos de la serie según se requiera y, simultáneamente, tener la garantía de que para valores pequeños de i, cualquier sumando es más grande que la suma de todos los términos que le siguen. Sin lugar a dudas, esto hace de la serie un importante instrumento de uso en una gran diversidad de problemas que, muy particularmente, las ciencias físicas planteaban. En este sentido, el papel que juega el residuo de Lagrange en su presentación de la fundamentación, es lo que hoy conocemos con la frase Orden de desigualdad que permite, como ya decíamos, detenerse en el sumando que el problema requiera. Eventualmente, por ejemplo, en un problema de cinemática en el que se requiere conocer la posición de un cuerpo en un tiempo dado, sólo se necesita la función posición en el instante inicial y la velocidad y aceleración, por lo que bastará detenerse en la segunda derivada.

En los siguientes capítulos, muestra de una manera algebraica la relación que guardan p, q, r, etc. con la función f(x), adquiriendo entonces la forma en derivadas

$f'(x), f''(x)\frac{1}{2!}, f'''(x)\frac{1}{3!}$, etc.

Finaliza su libro con una gama de aplicaciones en las que efectivamente se observa a la serie truncada en algún sumando.

Un ejemplo de obtener la derivada de esta forma es:
Sea $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3$, entonces tendremos que $\mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{h}) = (\mathrm{x}+\mathrm{h})^3 = \mathrm{x}^3 + 3\mathrm{x}^2\mathrm{h} + 3\mathrm{x}\mathrm{h}^2 + \mathrm{h}^3$ por lo que $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^2$.

Marco de referencia para resignificar la derivada con la concepción de Lagrange en el dominio de la ingeniería

Como mencionamos anteriormente nos dirigimos hacia el dominio de ingeniería para seleccionar un tema en que esté presente la derivada, para crear un marco de referencia en donde sea resignificada. Por la dimensión de este dominio nos enfocamos únicamente en la Mecánica de Fluidos en donde seleccionamos el tema “La conservación de la masa”. La cual explicamos a continuación:

La conservación de la masa es una de las leyes básicas que rigen el movimiento de un fluido. Es expresada en función de un sistema, un conjunto fijo de partículas de un material. Sin embargo, el interés se concentra con más frecuencia en un dispositivo, o una región del espacio, en el cual entra el fluido y/o desde el cual sale, identificada como un volumen de control. Una de las razones es que como los medios fluidos son capaces de una distorsión y una deformación continuas, a menudo es en extremo difícil identificar y seguir la misma masa de fluido todo el tiempo (como debe hacerse para aplicar la formulación del sistema) (Fox y McDonald ,1993).

La figura I nos muestra ejemplos de 3 sistemas que circulan a través de un volumen de control.

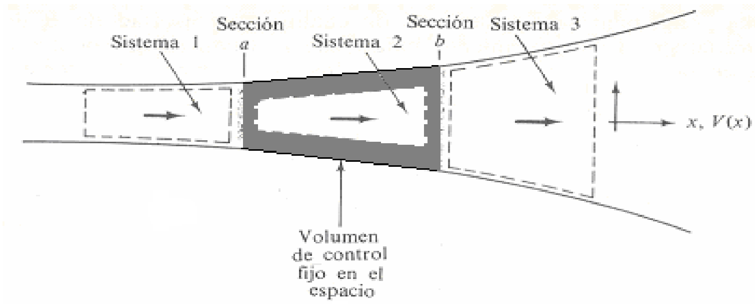


Figura I

Podemos ver, que la relación que existe entre ellos es que el volumen de control se mantiene fijo y por él circulan los sistemas, que están en movimiento.

La conservación de la masa establece simplemente que la masa, *M*, del sistema es constante, planteándose como:

$$\frac{DM_{sistema}}{Dt} = 0$$

La masa de un sistema permanece constante

Por la dificultad de seguir los sistemas se tiene que encontrar una transformación que permita expresar la derivada sustancial del sistema en función de cantidades asociadas con un volumen de control.

Por ello nos interesa expresar esta ley establecida para un sistema en términos de un volumen de control, que se establece de la siguiente forma:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{sistema} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Igualándolo a cero que nos representa que las variaciones de la cantidad de masa son nulas, tenemos

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho d\forall + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Esta transformación, basándose en los conceptos físicos, se puede establecer en palabras:

$$0 = \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que sale del} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \textit{gasto másico} \\ \textit{que entra al} \\ \textit{volumen de control} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textit{rapidez de cambio} \\ \textit{de la masa dentro} \\ \textit{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

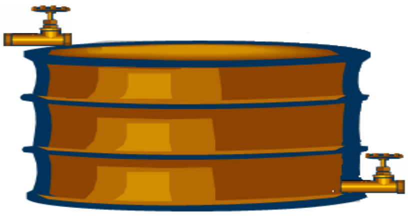
Se establece que para conservar la masa, la razón de cambio con respecto al tiempo de la masa en el volumen de control más la razón de flujo neto de masa a través de la superficie de control debe se igual a cero. En realidad, el mismo resultado se obtiene más directamente igualando la razón de flujo de masa hacia dentro y hacia fuera del volumen de control a las razones de acumulación y agotamiento de masa dentro del volumen de control.

Esta formulación física la describimos en términos de la serie de potencia:

$$f(x+h) \approx f(x) - f'(x)h$$

En donde:
$f(x+h)$ es el gasto másico que sale del volumen de control.
$f(x)$ es el gasto másico que entra al volumen de control
$f'(x)h$ es la rapidez de cambio de la masa dentro del volumen de control

Con base a estas ideas planteamos una secuencia didáctica, que inicia presentando al estudiante un contenedor o volumen de control con una entrada y una salida, como se muestra a continuación:



A partir de esta idea, se proponen 5 situaciones:
La primera es una introducción para que el estudiante establezca la correspondencia entre las manipulaciones de las llaves con lo que sucede en el volumen de control presentándose a los estudiantes situaciones como: *Si la llave de entrada se encuentra más abierta que la llave de salida y se empieza a cerrar de tal forma que quede más cerrada que la de salida y nuevamente se vuelva a abrir hasta superar a la llave de salida.* Se le pide que grafique el registro de la cantidad de agua en el volumen de control. Siendo la relación: Manipulación $\rightarrow$ gráfica.
La segunda tiene como objetivo que el estudiante reconozca la *acumulación* o *agotamiento* que se realiza en pequeños intervalos de tiempo, esto es, cuánto creció o decreció la cantidad de masa en el volumen de control de un instante a otro. Para lo cual necesita conocer dos estados: la cantidad de masa en el volumen de control en algún momento y un instante después, cuya diferencia dará la acumulación o agotamiento en ese instante. Observándose que al crecer la cantidad de fluido en el volumen de control entonces habrá una acumulación, por lo que la gráfica de las diferencias será positiva; y cuando decrece habrá un agotamiento por lo que la gráfica de las diferencias será negativa. Se les pide que realicen un bosquejo de estas cantidades con respecto a las gráficas que trazaron en la situación anterior.

En la tercera se presentan al estudiante gráficas como las que trazaron en la situación 2 que corresponden a diferencias, es decir, gráficas sobre la acumulación o agotamiento, que corresponden a la derivada. Teniendo como finalidad que los estudiantes confronten las gráficas de las diferencias con las manipulaciones de las llaves, esto es, cómo tendrían que ser éstas últimas para obtener las gráficas que se les dan. Entre las cuales están:

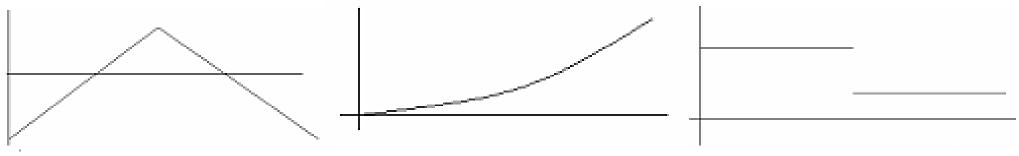


Figura 7

De esta forma la relación de las manipulaciones de las llaves con la gráfica se dará en sentido contrario al del inicio, esto es: Gráfica $\rightarrow$ Manipulaciones

En la cuarta se espera que el estudiante establezca la conservación de la masa de forma implícita, esto es, que establezca las relaciones entre los datos dados que estarán regidos por la misma conservación de la masa. Ya que se tiene que cumplir que la cantidad que sale menos la cantidad que entra sea igual a la cantidad acumulada en ese instante. Para ello se presentan al estudiante 3 columnas como las que se muestran en la figura 8, en las que se dan 2 datos y él tiene que establecer el tercero, usando las gráficas como un medio argumentativo para tal fin.

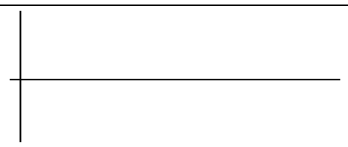
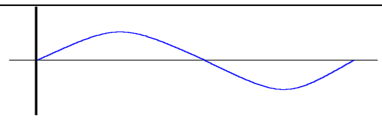
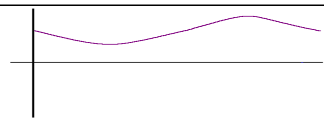
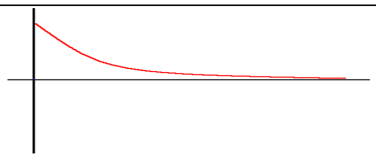
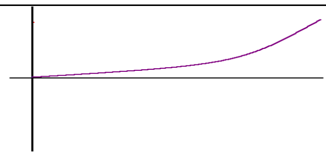
Flujo de entrada	Acumulación o agotamiento	Flujo de salida
		
		

Figura 8

La última situación tiene como finalidad que el estudiante establezca la conservación de la masa a través de la expresión lineal de la serie de Taylor, esto es, f(x+h)=f(x)+(-f´(x)h). Esto es, que identifique una cantidad primitiva o flujo de entrada de la cual se van a derivar las demás. Para ello se le guía por medio de preguntas sobre gráficas que se le muestran sobre flujo de entrada, acumulación instantánea y flujo de salida con el fin de que establezca las diferentes relaciones que existen entre ellos.

Resultados

Esta secuencia didáctica ha sido aplicada a estudiantes de ingeniería, actualmente nos encontramos en la fase de análisis de los datos. Entre los resultados hallados principalmente destacan darle sentido a las gráficas de la acumulación o agotamiento, que corresponde a la derivada, con base a dos estados: la entrada y la salida de flujo. Que favorece los aspectos variacionales que han sido soslayadas por el discurso matemático escolar. Además, dan significado a los puntos máximos, mínimos, cero, a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la gráfica de la derivada que se manifiesta en sus argumentos. Por ejemplo, en los puntos donde la acumulación es cero identifican que es cuando coinciden el flujo de entrada y salida; cuando hay un máximo es porque hay un cambio en las llaves, es decir, que la llave de entrada de estarse abriendo empieza a cerrarse pero sin superar a la llave de salida; y en el caso de un mínimo es porque la llave de salida de estarse abriendo se empieza a cerrar pero sin superar la llave de entrada.

Conclusiones

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabaja con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. En un escenario en el cual puede construir argumentos y significados con base en su experiencia y en una situación usual, usando las gráficas como argumentos para realizar sus procedimientos.

REFERENCIAS

- Cantoral R. (2001). Matemática Educativa. *Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México, D. F., México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2-3), 137-168.
- Cantoral, et al. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial, pp. 83 – 102
- Marcolini, M & Perales, J. (2005). La Noción de Predicción: Análisis y Propuesta Didáctica para la Educación Universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 8. pp (25-68)*
- Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en una ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones* f *y* f' *en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas.* Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.