

Desarrollo del punto de inflexión como objeto escolar; estudio a la obra de L'Hospital

Apolo Castañeda Alonso

CICATA-IPN¹

apcastane@gmail.com

Abstract

Durante el siglo XVII una nueva perspectiva de la difusión de la ciencia alentó en varias ciudades el surgimiento de Academias Científicas, con lo que se fortaleció la comunicación entre los académicos y promovió la instauración de publicaciones científicas vinculadas con las academias. En 1696, cuando la naturaleza del cálculo era un tema de discusión en los círculos académicos, L'Hospital publicó su obra *Analyse des infiniments petits* un trabajo que mostraba, desde una perspectiva diferente a la de Leibniz, el nuevo cálculo.

L'Hospital, (1696) organizó el saber *a manera de un curso* atendiendo a la presentación gradual de las ideas, agregó explicaciones a los conceptos del cálculo y problemas. La conformación de este *discurso* orientado a la difusión (no expertas), obligó la caracterización y definición de los objetos matemáticos como *curva*, *ordenada*, *diferencia*, *máximo*, *mínimo*, *punto de inflexión*. A partir de la publicación de este trabajo el punto de inflexión adquirió un nuevo significado, se configuró como objeto vinculado a la segundas diferencias y evolucionó como objeto escolar hasta nuestros días. (Cantoral, 1998). Esta investigación muestra el tratamiento del punto de inflexión en la obra de L'Hospital, describe su tratamiento, su caracterización y muestra cómo se configuró como objeto escolar.

Introducción

En octubre de 1683 Leibniz escribió para el *Acta Eruditorum* “Nova methodus pro maximis et minimis” un documento que contenía la propuesta de un nuevo método general para el estudio de los problemas de máximos y mínimos. El método expone la naturaleza infinitesimal de las curvas y explica un comportamiento variacional que sólo es posible identificarlo en el análisis de lo infinitamente pequeño. En ella, la noción de *diferencia* se convierte en el argumento central que le permite *medir los cambios* y expresar el comportamiento de la curva.

Leibniz hizo precisiones teóricas importantes sobre *el nuevo cálculo* en el *Acta Eruditorum*, pero dada la brevedad de los escritos y la oscuridad que mostraban no causó mucho impacto entre los matemáticos de la época, más bien, como lo explica Bos, (1974), era casi sorprendente que matemático alguno pudiera entenderlos. Los hermanos Bernoulli (Jakob y Johann) fueron quienes se acercaron con mayor detalle a estos materiales, primero dominando la simbología, tratando de entenderlos e incluso abriendo una correspondencia con el propio Leibniz. Bos escribe ... *para la gente con menos capacidad matemática que los Bernoulli hubiera sido difícil, de hecho, aprender el cálculo de estos dos artículos. Lo que se necesita era un buen libro de texto que explicase el cálculo...*

Grattan-Guinness, (1984) manifiesta que los escritos de 1683 y 1686, este último titulado “De geometría recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum” ... *además de contener errores de imprenta, estos escritos eran oscuros...* sin embargo, esto no representó obstáculo alguno para quienes se interesaron en conocer estas novedosas ideas.

¹ Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

De entre ellos se sabe que los hermanos Bernoulli se acercaran con gran interés al estudio del *nuevo cálculo*.

L'Hospital conoció las ideas del cálculo infinitesimal directamente de los hermanos Bernoulli. Resultado de este encuentro L'Hospital escribió en 1696 el libro *Analyse des infiniment petits*, un tratado de cálculo diferencial en el que organizó las *nuevas* ideas del cálculo a manera de curso; a través de un lenguaje claro y haciendo una exposición gradual de las ideas; desde los fundamentos hasta la presentación de problemas resueltos. En opinión de Bos, (1974) el trabajo de L'Hospital ...*vino a demostrar al mundo culto que el nuevo cálculo era algo con lo que había que contar*.

Cincuenta y dos años más tarde, la matemática de origen italiano María de Agnesi, escribió en 1748 *Institutioni Analitiche*, una obra en dos tomos en el que aborda el cálculo diferencial con un tratamiento similar al que le dio el Marqués de L'Hospital. La cuidadosa presentación de las ideas responde al interés de los autores por aportar ...*claridad apropiada y simplicidad*...² a los nuevos conceptos del cálculo, así, un lector no necesariamente experto, podía conocer estas novedosas ideas y usarlas para resolver los viejos problemas.

El esfuerzo didáctico de selección y organización del saber configuró un nuevo *discurso matemático* (Castañeda, 2006) caracterizado por un nuevo tratamiento de las ideas, sistematizado y dosificado dentro de un volumen impreso con secciones y apartados para facilitar su lectura.

Este nuevo saber *dispuesto para la difusión* toma una eventual *distancia*³ del saber que aborda Leibniz; dado que la intencionalidad con la que fueron escritos es diferente. En L'Hospital y Agnesi se exponen, junto con las reglas del método del cálculo infinitesimal, otras ideas y argumentos que amplían las explicaciones y enriquecen el discurso, como las representaciones gráficas de la naturaleza poligonal de las curvas, de la magnitud de las diferencias de orden superior, explicaciones verbales del comportamiento de la curva en vecindades infinitesimales, por citar algunas.

Esta visión didáctica del cálculo es un ejercicio creativo de organización y selección; una *transposición didáctica* para llevar desde el seno erudito a otros ámbitos este conocimiento. Los autores reconocieron que al escribir sus libros no bastaría sólo incluir las definiciones del cálculo (aún en construcción), se precisaba de un método expositivo que le permitiera ser accesible a más personas. Es natural pensar que las múltiples explicaciones a una misma idea fuera un signo de la necesidad de expresar desde varios enfoques para atender la diversidad de los lectores.

Este tratamiento múltiple de las ideas se mantiene a lo largo de la obra, incluso es posible observar en la sección de problemas un planteamiento diversificado (de problemas más representativos). L'Hospital aclara en su introducción ... *hago solamente algunos ejemplos seleccionados* ... queriendo dar cuenta de la existencia de un amplio universo de problemáticas.

En la obra de L'Hospital, los problemas planteados así como la solución aparecen al final de cada capítulo. En ellas sobresale un abordaje gráfico en combinación con los métodos algebraicos del nuevo cálculo; esto representa un doble funcionamiento de la parte gráfica

² Agnesi, 1748

³ En el sentido de Chevallard, (1991)

en su obra, para explicar el comportamiento infinitesimal de la curva y para ilustrar el fenómeno de variación.

Aceptar la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas y poder compararlas en órdenes de magnitud, escapaba a toda lógica; las cantidades infinitesimales incluso podían desvanecerse. Más aún, L'Hospital argumentó la posibilidad de descomponer las curvas hasta llegar a los principios que la conforman; ... *sólo un análisis de la naturaleza podría conducirnos hasta los verdaderos principios de las líneas curvas* (L'Hospital, 1696).

Este tratamiento configuró una aproximación geométrica del cálculo, heredado en gran parte por su propio origen epistemológico, pues desde mediados del siglo XVII el desarrollo de la geometría analítica (o método de coordenadas) permitió plantear problemas relacionados con las curvas, por ejemplo de tangentes, máximos y mínimos e incluso de integración como los planteados por Cavalieri o Toricelli.

El cálculo constituyó un nuevo método *general* para abordar estos viejos problemas y L'Hospital, de forma natural, incorporó la geometría al replantear esos viejos problemas en su libro, siendo las gráficas también una forma ilustrar y explicar la naturaleza infinitesimal de las curvas.

El estudio de las curvas es anterior a la formulación del cálculo y en el momento en el que el cálculo surge como una poderosa herramienta tiene sus primeras aplicaciones para esos viejos problemas. Las ideas de máximo, mínimo, tangente o punto de inflexión son preexistentes al cálculo, se redefinieron cuando el método de estudio se modificó. El *nuevo cálculo* dio nuevos significados a los puntos singulares en las curvas al observar las regularidades y relacionar las diferencias infinitesimales con la ubicación de la posición de los puntos.

La formulación de este *discurso escolar* acontece cuando aún el cálculo estaba en proceso de formulación y se juzgaba su validez (Berkeley, 1980). Grupos científicos como la *Académie des Sciences* en Francia (a partir de 1700) centraron sus discusiones sobre la validez de las suposiciones que parecían de orden metafísico. Fontenelle, secretario de la *Académie des Sciences*, ante la aceptación que gozaba el texto de L'Hospital, trató de enfrentar a la oposición haciendo notar dos ideas importantes; el carácter esclarecedor de la obra ante las cuestiones del infinito, y la postura innovadora que asumió L'Hospital al escribir su libro; ... *El señor L'Hospital decidió comunicar sin reserva los secretos ocultos de la nueva geometría, y lo hizo en el famoso libro Analyse des infiniment petits, que publicó en 1696. En él fueron revelados todos los secretos del infinito geométrico y del infinito del infinito.* (Cambray, R., 1998)

Este ejercicio de *difusión* no fue un intento aislado de comunicación, Fontenelle publicó en 1686, diez años antes que la obra de L'Hospital, *Entretiens sur la pluralité des mondes* en la que plantea la necesidad de la búsqueda de un lenguaje explicativo que satisficiera a la vez al mundo sabio y a la gente del pueblo.⁴

Marco teórico

La socioepistemología, o *epistemología de las prácticas*⁵ problematiza el origen del conocimiento a partir de dos componentes básicas de análisis; el referido a su construcción

⁴ <http://www.imim.es/quark/26/026004.htm>

⁵ Esta definición se puede consultar en <http://es.wikipedia.org/wiki/Socioepistemolog%C3%ADa>

social y las prácticas asociadas. Esto le permite ofrecer explicaciones de las circunstancias socioculturales por las que se generan, formulan, validan y difunden las ideas matemáticas.

En esta perspectiva, la variable sociocultural aporta explicaciones sobre la génesis de los contextos de significación y las manifestaciones de ideas *germinales* socialmente compartidas que en conjunto motivan el surgimiento de los objetos matemáticos.

La investigación centró la atención en conocer los mecanismos por los que se *definió* la idea de punto de inflexión al seno del discurso escolar del cálculo (en aquella época, discurso para la difusión), considerando que el origen del concepto de punto de inflexión es previo al cálculo Leibniziano. Por ello se destacó la importancia de caracterizar la forma en que L'Hospital y Agnesi usan esta idea en sus obras, las diferentes formas de definirlo en los varios escenarios, las prácticas asociadas y los métodos para su estudio. El objetivo es el reconocimiento y búsqueda del origen didáctico del punto de inflexión, analizándolo integrado como componente del primer discurso escolar del cálculo. Eventualmente esto permitirá hacer un ejercicio de resignificación del concepto de punto de inflexión.

La metodología de investigación que responde ampliamente a esta búsqueda es la *sociopistemología*, a través de la cual se ha manifestado la posibilidad de rediseñar aspectos específicos de la matemática escolar del nivel superior (Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Farfán, 1993; Farfán, 1997a) a través de la construcción y experimentación de actividades de clase, que estén mejor adaptadas a una situación escolar y permitan la incorporación de diversas prácticas que conformen un acercamiento amplio al estudio de la matemática.

Esta posibilidad de incidir en el discurso escolar y afectarlo benéficamente es el argumento principal de la tesis. Ubicamos entonces al punto de inflexión alojado dentro de este discurso y reconocemos que tienen un tratamiento escolar limitado a las situaciones en las que es necesario *aplicar* las segundas derivadas.

Formación de un discurso escolar

El discurso matemático que aparece en las obras de L'Hospital y Agnesi se distingue del trabajo de Leibniz al reconocer que las ideas del cálculo se abordan de forma distinta. La divulgación del saber atiende a intereses diferentes, cambia su intencionalidad y se reconstruye el discurso generando un programa de estudio para aquellos interesados en abordar el *nuevo cálculo*. Este nuevo sentido se advierte en la introducción de la obra de Agnesi, que explica la intención al abordar las ideas de forma clara y accesible *...doto de claridad apropiada y simplicidad... que los beneficios con ese orden natural que proporciona, quizás el de mejor instrucción y agrandar más la luz.*

Este novedoso tratamiento del cálculo, al que hemos denominado *discurso escolar del cálculo*, ubica a las obras de L'Hospital y Agnesi como los primeros *libros escolares* del cálculo. En ellos las ideas matemáticas se presentan en capítulos y se enuncian definiciones, proposiciones y postulados en cada apartado. El discurso está construido para abordar los conceptos a través de múltiples explicaciones, y por primera vez, se incluye un apartado para tratar problemas relacionados en los contenidos abordados. La intención de L'Hospital no era el repetir el discurso erudito de Leibniz, sino movilizar al lector a través del planteamiento, en un primer momento, de ejemplos que ilustraran las ideas del nuevo cálculo, después, como Agnesi lo muestra, con problemas de aplicación a situaciones específicas de la geometría euclidiana.

Uno de los argumentos del nuevo cálculo, es aceptar la existencia de las cantidades infinitamente pequeñas y no sólo eso, además poder compararlas en órdenes de magnitud y poder hablar del infinito de los infinitamente pequeños. Es de suponer que para la época estas ideas causaran impacto pues se requería pensar sobre supuestos o actos metafísicos de fe, sin embargo, detrás de todo esto existe el argumento analítico de suponer que un hecho complejo puede ser descompuestos en fenómenos simples para su estudio y ese es una de las explicaciones que L'Hospital hace en el prefacio de su obra con respecto a las líneas curvas; *...sólo un análisis de la naturaleza podría conducirnos hasta los verdaderos principios de las líneas curvas. Pues las curvas, al ser poligonales de una infinidad de lados, y al diferir entre ellas sólo por la diferencia de los ángulos que estos lados infinitamente pequeños forman entre sí, al análisis de los infinitamente pequeños únicamente corresponde determinar la posición de los lados para determinar la curvatura que ellos forman...* (en Cambray, 1998).

Notamos entonces que el discurso del cálculo se argumenta y se explica desde la geometría, pero esto tiene que ver con el propio origen epistemológico del cálculo. Desde mediados del siglo XVII el desarrollo de la geometría analítica (o método de coordenadas) permitió plantear problemas relacionados con las curvas, por ejemplo de tangentes, máximos y mínimos e incluso de integración como los planteados por Cavalieri o Toricelli.

El cálculo desarrolló un nuevo método general para abordar todos estos problemas por lo que se percibió inmediatamente como una nueva herramienta para resolver viejos problemas. El discurso de L'Hospital incorporó naturalmente a la geometría a través del planteamiento de los viejos problemas pero además funcionó como método ilustrativo.

Planteamos así la primera hipótesis; el estudio de las curvas es anterior a la formulación del cálculo y en el momento en el que el cálculo surge como una poderosa herramienta tiene sus primeras aplicaciones para esos viejos problemas. Entonces las curvas son las que se problematizan y el cálculo (entendido como un nuevo método) afronta las problemáticas. En esta perspectiva, son preexistentes las ideas de mínimo al cálculo al igual que la de máximo, tangente o punto de inflexión porque están en las curvas y no se problematizan desde el *nuevo cálculo*. El punto de inflexión existe como cualidad en las curvas por lo que al pensar en su resignificación habrá que argumentarlo desde la geometría.

El escenario que L'Hospital describe en el prefacio de su obra, muestra el nuevo paradigma del pensamiento que él mismo y los académicos de su época afrontan; en principio una crítica sobre el conocimiento griego casi perpetuo durante toda la edad media, con acercamientos muy próximos a la superstición y el respeto de alguna divinidad, dice él; *todos los trabajos de varios siglos han conducido a llenar el mundo de comentarios respetuosos y de traducciones repetidas de originales a menudo demasiado detestables* (Cambray, 1998). Pero dice L'Hospital acerca de Descartes; *la valentía para abandonar a los antiguos*, sus trabajos (sobre análisis y geometría) contribuyeron en encontrar la solución a una cantidad enorme de problemas *entonces fue que se abrieron los ojos y se corrió el riesgo de pensar*.

Este nuevo pensamiento caracterizó una época en la que se produjo un renacimiento de las ciencias, al mismo tiempo que se creó una conciencia de la importancia de la divulgación del conocimiento. En el seno de la Academia de Ciencias las reflexiones de Fontenelle (cuya obra *Entretiens sur la pluralité des mondes* (1686) alcanzó más de cien años de

vigencia)⁶ construyeron un ambiente en el que las obras de difusión del conocimiento, como la de L'Hospital y Agnesi, fueron acogidas con interés, así la obra de Agnesi fue considerada por la *Academia* como una obra de trascendencia.

Con estas condiciones favorables para la difusión de la ciencia, se hizo propicia la *publicación* como medio para la *comunicación* de las ideas. Bajo la perspectiva socioepistemológica se plantea la segunda hipótesis del trabajo: la formulación del discurso escolar del cálculo no sólo proviene de la transposición didáctica del saber erudito sino que se involucran otros factores, diferentes a la noosfera, para la selección y conformación de un saber a enseñar; entre ellas las prácticas socialmente compartidas que se toman en cuenta para adaptar un saber a su versión “didáctica” permitiendo que un mayor número de personas lo puedan estudiar.

El nuevo paradigma de la difusión de la ciencia y el interés por mostrar un nuevo método general para el estudio de las curvas, crearon un escenario propicio para la publicación de *Analyse des Infiniment petits*. Sin embargo no se asumió el ejercicio de la *difusión* como la reimpresión y publicación a gran escala de los originales de Leibniz; L'Hospital no redujo la tarea a una transcripción fiel de Leibniz ni compiló sus escritos.

L'Hospital asume el reto de estructurar un nuevo discurso del cálculo; claro en la exposición de las ideas y con un lenguaje accesible. Esto produjo la primera Transposición Didáctica del cálculo en el que las ideas aparecieron adaptadas a una circunstancia específica (de difusión) y se organizaron en una secuenciación lógica (atendiendo a la evolución y profundidad de las ideas).

El resultado fue doble, por un lado la difusión de las ideas del cálculo y por otro una *estructura-modelo* para la escritura de libros para difusión. No sabemos del impacto y de la dimensión de influencia, pero asumimos que esta forma de abordar un saber para fines de difusión (o didácticos) produjo un impacto; tanto para las siguientes publicaciones así como en el conocimiento mismo, pues en el intento de definir los conceptos del cálculo se convierten en motivo de estudio otros objetos que inicialmente no eran de interés tal como el *punto de inflexión*⁷. (Tercera hipótesis)

Referencias

- Berkeley, G. (1980). *Principios del conocimiento humano*. (1ª. Ed. 1710). Buenos Aires, Argentina: Aguilar, Argentina.
- Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Arch. His. Exact. Sci.* 14, 1-90.
- Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propios del pensamiento físico de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.
- Cantoral, R. (1998). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 12, I, pp. 41-48. México: Editorial Iberoamérica.
- Cambray, R. (1998). L'Hospital y el primer libro de texto de cálculo diferencial. En L'Hospital, *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (pp 1-14). México: UNAM (colección Mathema).
- Castañeda A. (2006). Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y Agnesi. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. CLAME: México. Vol. 9, Núm. 2, 253 - 265.
- Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso*

⁶ <http://www.prbb.org/quark/26/default.htm>

⁷ El punto de inflexión no era objeto de estudio, era considerado como un punto característico en la curva, es decir, como una cualidad en la curva.

matemático escolar). Tesis Doctoral, Cinvestav –IPN, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor S.A.

De Semir, V., Introducción a la divulgación de las ciencias. [Editorial] (2002, Diciembre). *Quark*. Extraído el 14 de Febrero de 2008 desde <http://www.prbb.org/quark/26/default.htm>

Farfán, R. (1997a). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería: estudio de casos*. Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos: 1630-1910. Una Introducción histórica*. Madrid, España: Alianza Editorial.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France, ACL-Editions.

Socioepistemología. (2007, 8) de septiembre. *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 20:25, febrero 15, 2008 from : <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Socioepistemolog%C3%ADa&oldid=11171152>.