El libro Geografía General y el Conocimiento Matemático Del siglo XVII[1]

Arlete de Jesus Brito
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (UNESP)
Rio Claro, Brasil
arlete@rc.unesp.br

Resumen

Las matemáticas, en los inicios de la Edad Moderna, se clasificaban en "puras", como por ejemplo, la geometría, la aritmética y trigonometría y en "mixtas", que también abordaban aspectos empíricos y, por eso, se consideraban físico-matemáticas. Entre esas últimas estaban la música, la mecánica, la óptica y la geografía, cuyos textos nos muestran conocimientos matemáticos "puros" utilizados y difundidos, en aquella época. Vamos a analizar las matemáticas contenidas en un libro de ese contexto, el Geografía General (1650) de Bernhard Varenius, publicado, por la primera vez en Holanda. Ese libro, considerado el primero de geografía científica, tuvo entre los años de 1650 y 1750 veinte y cuatro ediciones. La primera de ellas la he hecho Newton, en 1672. En ese libro, las matemáticas, como las comprendemos hoy, tienen destaque especial y su análisis nos muestra como, en la época, se representaban los números decimales no enteros, como se elaboraban algunos conceptos trigonométricos y como ocurrían algunas aplicaciones de la geometría proyectiva.

El libro Geografía General y su contexto histórico

En los Países Bajos, en el siglo XVI, el comercio causó la demanda por rutas comerciales marítimas nuevas e, por lo tanto, el desarrollo de la navegación. La educación científica que comenzó a desarrollarse en el siglo XVI en Holanda, con énfasis en el conocimiento necesario al arte para navegar, por ejemplo la astronomía, la cartografía y la geografía, alcanzó el apogeo por la primera mitad del siglo XVII. Fue en este contexto que Bernard Varen (1622-1650), también conocido como, Varenio publicó sus obras en la geografía y, entre ellos, la *Geografía General*: *donde se explican las características generales de la Tierra*.

Varenio nació en Alemania, estudió medicina en Hamburgo, entre 1640 y 1642 y en Konigsberg hasta 1645. Debido a la Guerra de los Treinta Años, él migró para Holanda, donde se estableció en Leiden. En esta ciudad, continuó sus estudios de medicina y tuvo influencia indirecta de las ideas del matemático y astrónomo Willebrord Snell (1581-1626) En 1646, se transfirió a Ámsterdam, donde fue publicado, en 1650, exactamente año de su muerte, su *Geografía General* que, según el Dictionnaire Universel D´Histoire et de Géographie (1878, p. 1945) era, aún en aquel siglo, "*excelente tratado de la geografía física y matemática, que se puede considerar como primer de su tipo*". El carácter innovador de este libro consiste en ser el primero de geografía general a adoptar el sistema copernicano y las ideas de la física moderna, lo que llevó a Issac Newton a darle una edición latina en Cambridge, en 1672. Nosotros estamos haciendo nuestros análisis a partir de esta edición, junto con la de 1650.

[1] Presentación hecha con auxilio financiero de la FUNDUNESP, Fundación Para El Desarrollo De La UNESP, São Paulo, Brasil.

En 511 páginas, divididas en tres libros e 40 capítulos, el *Geografía General* presenta conocimientos relativos a las dimensiones, al movimiento y a la localización de la Tierra en el Sistema Solar; a la sustancia y a la constitución de la Tierra; a las montañas, a las aguas minerales, a los desiertos, a la atmósfera, a los vientos, a los lagos, a los ríos y a los océanos; la determinación de la latitud y de la longitud; a la cartografía y al arte de la vela.

Las matemáticas, como las entendemos hoy, tienen lugar importante, tanto en el capítulo II todo dedicado al conocimiento de la geometría euclidiana, cuánto en otros capítulos en los cuales se le utiliza en usos diversos.

Según la definición de Varenio (1672, p. 1) la geografía sería una "*ciencia matemática mixta, que explica las propiedades de la Tierra y de sus partes relacionadas con la cantidad, esto es, su figura, su posición, su grandeza, su movimiento, fenómenos celestes y otras propiedades similares*". El adjetivo "mixta" se refiere a los principios que darían la base de este campo del saber:

> 1º las proposiciones de la geometría, de la aritmética y de la trigonometría; 2º las reglas y los teoremas de la astronomía; 3º la experiencia, pues la mayor parte de la geografía y, sobre todo la geografía particular, no es sino establecida por la experiencia y observación de los que les han dado la descripción de diversos países" (VARENIO, 1672, p 3).

El capítulo II del libro llamado I "Conocimientos geométricos previos", es todo dedicado a los conceptos y a los procedimientos matemáticos que serán utilizados en capítulos posteriores. Segundo Varenio, esta inserción se hace porque el autor no busca

> permitir el mal hábito que tienen los jóvenes de aplicar imprudentemente a las otras partes de la filosofía, sin tener un conocimiento, al menos superficial, de la aritmética y de la geometría. Esto, frecuentemente es más un error de sus maestros, que ignorancia de ellos mismos, y por consecuencia, nosotros tendremos el cuidado de colocarlos contra esta mala costumbre. (VARENIO, 1672, p. 9)

En este capítulo se fornecen las definiciones del diámetro y del semidiámetro, arco, cuadrante, complemento del arco, círculo y se explicita la diferenciación entre el círculo y su periferia. Enseguida, se inicia una sección llamada Problemas, donde se presentan los problemas siguientes (VARENIO, 1672, p. 10 y 11):

1) Dada una línea recta y un punto fuera de ella, trazar la perpendicular.

En la resolución, se describe la manera de la construcción de perpendiculares, no obstante el método no se justifica.

2) Dividir el círculo y su periferia en cuatro porciones.

Se abroga al problema anterior a él para justificarse como se hace esta división.

3) Dividir la periferia del círculo en grados.

La solución de este problema se inicia explicando que los matemáticos dividen la circunferencia en 360 porciones, afirma inmediatamente luego que el grado se divide en sesenta minutos y éste en sesenta segundos y que un cuadrante posee 90 grados, semiperiferia 180^0 y la sexta parte de la periferia tiene 60^0. Para determinar este último, se plantea una cuerda con la misma medida del semidiámetro (rayo). Ésta en dos es reiteradamente dividida hasta alcanzar el ángulo de 15^0. Enseguida, se utiliza un instrumento para medida de arcos, y se divide el ángulo en quince porciones de un grado. Este instrumento, en la edición 1755, es llamado por "línea de cuerdas".

4) Dado un rectángulo cuadrado, calcular su superficie, dado sus lados.

El texto dice a lector que multiplica un lado por el otro.

5) Dado el semidiámetro del círculo o el diámetro, medir la periferia del círculo. Dada la periferia, calcular el diámetro.

Se afirma que la solución de este problema depende de un cociente entre el diámetro y la circunferencia, eso estaría de 7 para 22 o más necesariamente de 10000000000 para 31415926535. Utiliza la regla de tres, o como se llama en el texto, la "regla del oro", 7 está para 22 tan bien como el diámetro está para la circunferencia, o 10000000000 están para 31415926535, tan bien como el diámetro está para la circunferencia. Para determinar el valor del diámetro, se sugiere que se haga el cociente de 22 para 7 o 31415926535 para 10000000000. Es interesante observar que la época en que Varenio escribió su libro, Ludolf Van Ceulen[2] (1540-1610) ya había llegado a las treinta y cinco casas decimales del valor del pi.

6) Dada la periferia del círculo y del diámetro en pies o millas, o solamente a la periferia o solamente al diámetro, calcular el área del círculo en pies o millas cuadradas.

Para resolver la primera situación, el autor dice al lector que multiplique la circunferencia por la cuarta parte del diámetro, o el semiperifería por el semidiámetro. En la notación actual tendríamos: A = $\frac{P}{2}.\frac{d}{2} = \frac{2\pi\, r}{2}.\frac{2r}{2} = \pi\, r^2$.

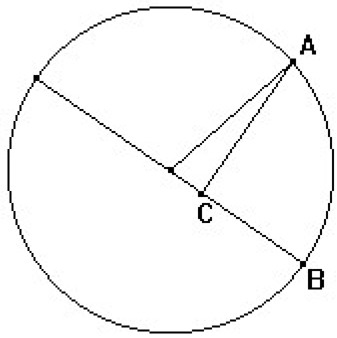
En el caso de ser dada solamente la medida de la circunferencia o del diámetro, el autor nos remite al problema antecedente.

7) Dado al semidiámetro o el diámetro del globo, calcular su superficie en medida cuadrada y su volumen en medida cúbica.

Primeramente se define el círculo, el centro, el rayo y el círculo máximo de la esfera, se multiplica la medida de la circunferencia por la medida del diámetro, lo cual en nuestro lenguaje actual sería: $A = 2\pi r.2r = 4\pi r^2$. Para determinar el volumen de la esfera, se dice que se multiplique el área de la esfera por la sexta parte de la medida del diámetro, que es: $V = 4\pi r^2.\ \frac{2r}{6} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

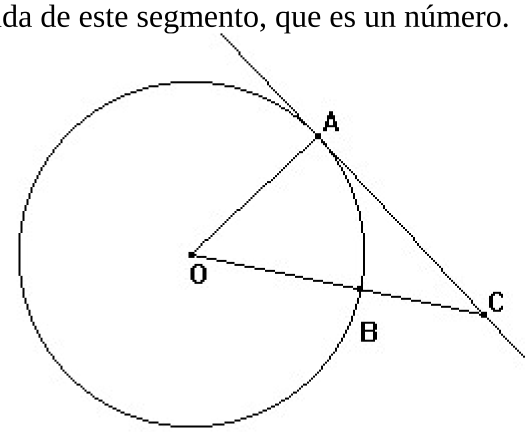
El texto continúa con algunas clarificaciones sobre ángulos, arcos y sus medidas para después definir los conceptos trigonométricos del sinus, tangente y secante: *El "sinus de un arco es una línea recta que pasa por una de las extremidades del arco, y se proyecta perpendicularmente al diámetro que pasa por la otra extremidad"* (VARENIO, 1672, p. 11). Ninguna figura acompaña esta definición del sinus. Nuestra interpretación de tal definición es la siguiente:

[2] Ludolf van Ceulen (1540-1610) matemático nacido en Alemania, pero ése pasó la mayor parte de su vida en Holanda. Estudió en Breda, Amsterdã y en Leiden.



En este caso, la medida AC sería el valor del sinus del arco AB.

Segundo Varenio, tangente de un arco sería *"una línea recta que tangencia en una de las extremidades del arco y, en los finales, la línea recta que pasa por el centro y la otra extremidad del mismo arco. La última recta que fue diseñada es la secante"* (1672, P. 11). Es interesante notar aquí que no hay diferenciación entre segmento de la línea recta, el ente geométrico, y la medida de este segmento, que es un número.



Podemos interpretar tales definiciones así: la tangente del arco AB sería CA, por lo tanto en el triángulo recto CAO, en vista del rayo unitario, tendremos:

tg $C\hat{O}A$ = AC, mientras que sería el secante: sec $C\hat{O}A$ = OC.

Se observa que el autor no utiliza el termino "cosinus" en ningún momento, sólo, en algunos pasajes, al sinus del ángulo complementario, como por ejemplo, en la página 12 cuando se ocupa de problemas trigonométricos, o en otros, utiliza el inverso del secante, como en la página 61 cuando explica un proceso de la determinación de la altura de montañas. El término "co-sinus" fue sugerido por el profesor de Astronomía en Londres, Edmund Gunter (1581-1626) en su libro Canon Triangulorum (cf. SMITH, 1951, P. 394). Viéte (1540-1603) mencionaba el término "residuae del sinus" en su libro Canon Mathematicus (1579), citado por Varenio. Al final de esta parte, Varenio explicita la existencia de triángulos llanos y esféricos. Afirma que no irá a tratar los últimos, debido a la dificultad de comprensión de los mismos por parte de los posibles lectores.

Después de esta sección de problemas, encontramos otra intitulada "teoremas del uso frecuente en la geografía", que son declaraciones, sin demostraciones, de los resultados: la adición de los tres ángulos de un triángulo es igual el 180^0. La adición de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo es igual los 90^0. Si del punto de la tangencia de una línea recta en un círculo, se diseña otra línea recta que pase por el centro, ellas son perpendiculares.

Enseguida, se exhiben problemas según el texto, “frecuentes” donde se utilizan conceptos trigonométricos. En los teoremas y en la resolución de los problemas no hay justificaciones del procedimiento, es decir, las soluciones toman el aspecto de reglas y se dice al lector “hace así”.

El uso de los conceptos y de los procedimientos matemáticos, básicamente trigonométricos, se hace a partir del capítulo IV del libro I, “Sobre las dimensiones y grandeza de la Tierra”. Se exhiben diversos métodos para la medida de la circunferencia de la Tierra, cuáles sean, el método de los árabes, el de Eratóstenes, el de Posidônio, el de Snell, y tres otros métodos que Varenio llama de “terrestre”. Después de esto, hay una tabla con la medida en unidad linear correspondiente a un grado en diversos paralelos.

En el capítulo IX, “Sobre las montañas en general”, hay más usos de conceptos matemáticos y, en este capítulo, se utiliza la ley de los sinus (VARENIO, 1672, p. 61 - 63) que no había sido presentada anteriormente. En estos usos, se exhiben los métodos de la resolución y se recurren a las figuras y a los ejemplos con la intención de facilitar la comprensión del lector. Por ejemplo, (VARENIO, p. 58, proposición II):

> Determinar la altura de una montaña por el altímetro. [...] Fig. 8. Sea AB la altura de una montaña, cuyo pie sea A y la cumbre, B. Coge una línea FG, conveniente, de manera que los ángulos AFC y ACF sean agudos e iguales. Observa los ángulos BFC y BCF y deduce la adición de estos ángulos de 180^0, la porción restante será CBF. Enseguida, mide CF y dice que el sinus del ángulo FBC está para el sinus del ángulo CFB, tan bien como FC está para AC, que es la distancia de la montaña hasta C. Coloca el instrumento en C y mide el ángulo BCA. Pues el triángulo CBA es rectángulo, BAC es recto, 90 gr., entonces se halla el ángulo ABC. Hace, en el triángulo BCA, 10000000 está para el sinus todo, tan bien como en la distancia está AC para la altura perpendicular de la montaña AB.

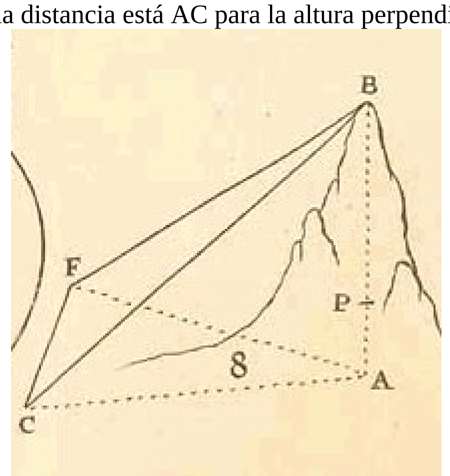


Figura 8

Un ejemplo sigue esta explicación. Como observamos en la proposición citada, hay la referencia al uso de un instrumento para determinar la medida de la altura de la montaña. En algunos momentos del texto hay referencias al uso de instrumentos de la medida, como por ejemplo, en la división de un ángulo en grados, ya citada aquí.

La historia de las matemáticas se utiliza de manera recurrente en el libro, por ejemplo, en el problema de la determinación del perímetro de la circunferencia dado el diámetro, se hace una referencia histórica del valor del pi en los trabajos de Archimedes para justificar la razón del uso de este número en esa determinación.

> La solución de este problema depende del cociente del diámetro a la circunferencia, ése es más o menos de 7 para 22, como Archimedes demostró, o más exactamente, pues 10.000.000.000 está para 31415926535 (VARENIO, 1672, p. 10).

En el capítulo sobre las diversas medidas lineares se presentan medidas utilizadas históricamente en diversas sociedades, que se colocan con el mismo grado de la importancia en el texto.

> El pie es una medida de la cual casi todos hacen uso, pero él no tiene para todos el mismo tamaño. Los matemáticos miden con frecuencia con el pie de Rhin de Snellius. (...) la vara y la milla son medidas que se forman por la repetición del pie. (...)son tales medidas que los holandeses se sirven en la geografía. Réstanos hablar de algunas otras, por ejemplo, las de los de los antiguos griegos, romanos, persas, egipcios e aún de algunos otros pueblos modernos turcos, polacos, alemanes, moscovitas, italianos, españoles, franceses e ingleses. El estadio de los Griegos tiene 600 de sus pies que sean 625 pies romanos o de Rhin. (...) La milla alemana, ésa que los geógrafos estiman en el pie de 15 para un grado, contienen 22800 pies de Rhin, 4000 pasos o 32 estadios. (...) La milla romana, o italiana es de 1000 pasos. (...) "Parasangue" o milla persa es estima en 30 estadios persas, o 3000 pasos. La milla de Francia está para la milla de Rhin como 19 para 25, y de España como 19 para $27\frac{1}{2}$, pero hay diversos valores de millas en diversos lugares en Francia y España. (...)Se cuenta 10 millas indias para un grado. Mientras que los indios calculan generalmente las distancias por día y horas. Los chinos tienen tres medidas para sus viajes; ellas son llamadas de Li , Pu y Vchan. (VARENIO, 1672, p. 13 – 14)

Para discutir a favor de la esfericidad de la Tierra, Varenio se basa otra vez en la historia. Se contrapone a las ideas de los pensadores que habían afirmado que ella sería un plan limitado por un círculo, con las ideas de los que afirman que la Tierra sería una esfera. Entre primeros coloca

> Lactancio[3] y algunos padres tenían este punto de vista, ellos sostenían obstinadamente que la Tierra estaría infinitamente extendida en una base y si apoyan en diversas razones. Algunos pasajes de la Escritura que no habían entendido o que habían interpretado mal los han lanzado gravemente en este error. Se pretende que Heraclitus, el antiguo filósofo, pensase igual, mientras que otros afirman que daría a la Tierra la figura de un barco. (VARENIO, 1672, P. 15)

El lenguaje algebraico no está presente en la obra. Las reglas se declaran de manera retórica, por ejemplo, "dado a la periferia del círculo, en pies o las millas, y el diámetro, calcular el área del círculo en pies o millas cuadradas. Multiplica la periferia dada por la cuarta parte del diámetro [...]" (VARENIO, 1672, p. 11).

No hay una uniformidad en las representaciones numéricas, por lo tanto para representar los grandes números, algunas veces se utiliza coma para separarse a las clases y a otras no, como por ejemplo en "123,120,000" (VARENIO, 1672, p. 28) y "40958631512" (VARENIO, 1672, p. 28).

[3] Lucio Cecilio Firmiano Lactancio (c. 250 a 317), teólogo que nació el Norte de la África.

La representación fraccionaria de números racionales se utiliza, como nosotros observamos en el fragmento siguiente *"para la regla del oro, 7 grados y 12 minutos están para 1 grado, tan bien como 5000 millas están para 694*$\frac{4}{9}$ *estadios*" (1672, p. 26). Sin embargo, como se puede observar en el pasaje donde se utiliza la aproximación del pi, anteriormente citada, no se utiliza la representación de números decimales no enteros con el uso de la coma o punto y ni las fracciones decimales. Según Boyer (1974, p. 231-232), Viéte, en 1579, recomendó el uso de las fracciones decimales, a pesar de tener en su Canon Mathematicus dividido el rayo de la circunferencia en 100000 de modo que los valores del sinus, los secantes y tangente de su tabla fueran todos los números enteros. Stevin (1548-1620), que vivió en los Países Bajos, también recomendó el uso de fracciones decimales, pero o Varenio no tuvo contacto con estas recomendaciones o no las consideró, o aún, todavía no estaban totalmente difundidas a la época de Varenio. El único pasaje donde se utiliza el punto para separar la parte entera y no entera está en una tabla y la base numérica usada es la sesenta, puesto que la parte no entera esta en minutos.

Tabla de valor correspondiente al 1^0 sobre los paralelos (p. 30 a 32)[4]

Graus de distância do equador ao paralelo	Pés em um grau	Milhas holandesas Mill pés	Milhas alemãs Min.	Milhas italianas Min.
Equador	28500	19.	15. 0	60.
1	28496	18. 1496	14. 59	59. 56
2	28483	18. 1483	14. 59	59. 55

La representación de datos en tablas es bastante utilizada. Además da citada, hay otras en la obra, como por ejemplo, en la página 61 que relaciona la altura de una montaña y la distancia máxima donde puede ser avistada.

Para simbolizar las medidas del ángulo, se utiliza el gr., el minuto y el sec, como por ejemplo, en el pasaje "[...]*sea la distancia al polo BA de 37 gr 19. min 30 sec*" (VARENIO, 1672, p. 26). Aún con respecto a las notaciones, no hay diferenciación entre la notación usada para representar un triángulo y a la utilizada para representar un ángulo. Por ejemplo, "como el triángulo CBA es rectangular, BAC es recto" (VARENIO, 1672, p. 59).

[4] Esta tabla se inicia con 0^0, o sea, en el Ecuador, y va hasta 90^0

Consideraciones finales

El hecho del *Geografía General* haber tenido 27 ediciones entre los años de 1650 y 1790, en diversos países como Inglaterra, Francia, Rusia e Italia, indica su papel del difusor de las nuevas ideas referentes a la geografía, bien como del conocimiento matemático usado por esta. Exactamente por eso, sus textos nos posibilitan analizar tanto el conocimiento matemático como las representaciones matemáticas utilizados, en el siglo XVII, por la grande parte de la gente implicada con la navegación y el conocimiento científico necesario a la misma.

Referencias

BERNAL, J. D. **A ciência na história.** Tradução Antonio Neves Pedro. Lisboa: Ed. Livros Horizonte, 1969, 3 volumes.

BOUILLET, M. N. **Dictioinaire universel d'histoire et de géographie.** 26ª ed. Paris: Librarie Hachette e C., 1878.

BOYER, C. **História da matemática.** Trad. Elza F. Gomide. S Paulo: Edgard Blücher, 1974. 488p.

CAPEL, H. **Varenio: Geografia general**. Barcelona: Ediciones de la Universidad de Barcelona, 1974, 144 p.

VARENIUS, B. **Geographia Generalis: In qua affectiones generales Telluris explicantur. Amstelodami**: Apud Ludovicum Elzevirium, 1650.

VARENIUS, B. **Geographia Generalis: In qua affectiones generales Telluris explicantur, Summâ curâ quam plurimis in locis emendata, & XXXIII Schematibus novis, ære incisis, unà cum Tabb. aliquot quæ desiderabantur aucta et illustrata.** Cantabrigiæ: Dickinson, 1672.