REDISEÑO DE UN PRIMER CURSO DE CALCULO CON BASE EN LA INCORPORACION DE ALGUNOS ELEMENTOS DEL CALCULO INFINITESIMAL DE LOS SIGLOS XVII Y XVIII

Ismael ARCOS
Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, México
ismael_arcos@msn.com, iarcos@fi.uaemex.mx

RESUMEN

Los cursos de cálculo que actualmente se ofrecen en las aulas de escuelas y universidades, difieren del cálculo infinitesimal de fines del siglo XVII en varios aspectos, de entre los cuales uno muy importante es que en el cálculo escolar actual no se aceptan las cantidades infinitamente pequeñas. Sin embargo, cuando se analizan los libros de texto de otras ciencias básicas y de la ingeniería, se puede constatar que el cálculo que ahí se utiliza es más bien próximo al de fines del siglo XVII, con algunos elementos de los tres siglos posteriores.

Así pues, al menos si se trata de un curso de bachillerato o en una escuela de ingeniería, resulta plausible hacer una presentación en la que se acepten las cantidades infinitesimales y en la que el énfasis en los fundamentos lógicos se traslade a un interés por abordar y resolver determinados problemas en los ámbitos de la geometría o las ciencias. Con base en ello se puede recuperar el indudable valor didáctico de las concepciones infinitesimalistas de los siglos XVII y XVIII.

1 Los infinitesimales: aceptarlos o no

En su excelente obra: *¿Qué son las matemáticas?*, Courant y Robbins (1941) indicaban que «las "diferenciales" como cantidades infinitamente pequeñas están ahora descartadas definitiva y deshonrosamente…», sin embargo, en la edición revisada de la misma (1996), Ian Stewart nos dice que tal indicación es una reflexión precisa del punto de vista que se tenía por consenso cuando se escribió la obra, y añade que «A pesar del veredicto de Courant y Robbins, siempre ha habido algo intuitivo y llamativo en los argumentos a la antigua con infinitesimales. Están aún sumergidos en nuestro lenguaje en ideas tales como "instantes" de tiempo, velocidades "instantáneas" y el considerar una curva como una serie de líneas rectas infinitamente pequeñas y el área acotada por una curva como suma de una cantidad infinita de áreas de rectángulos infinitesimales. Este tipo de intuición resulta estar justificado, pues se ha descubierto recientemente que el concepto de cantidades infinitamente pequeñas no es deshonroso y no tiene por qué ser descartado. Es posible establecer un marco riguroso para el análisis en el que las definiciones weierstressianas en términos de épsilon y delta sean reemplazadas por enunciados sobre infinitesimales, que son increíblemente similares a las ideas intuitivas de Leibniz, Newton y Cauchy».

Así pues, de acuerdo con lo señalado por Stewart, no hay razón alguna para excluir a los infinitesimales del cálculo escolar, mucho menos si se reconoce que el tratamiento del cálculo con infinitesimales presenta ventajas desde el punto de vista de la didáctica. Sin embargo, es un hecho que, en la actualidad, la perspectiva de los autores de libros de texto y la generalidad de los profesores está todavía anclada en la primera mitad del siglo XX.

Ahora bien, la aceptación o negación de las cantidades infinitamente pequeñas no es un asunto nuevo, se remonta a la Grecia antigua. De acuerdo con González Urbaneja

(1992), Aristóteles, en su *Física*, indicaba que Antifón parte de un polígono regular, por ejemplo, un triángulo o un cuadrado, inscrito en él. Sobre cada lado del polígono construía un triángulo isósceles, obteniendo un polígono regular del doble de lados, y repetía la operación continuamente. Aristóteles continuaba el relato del método con estas palabras: "Antifón piensa que de esta manera el área [del círculo] podría ser cuadrada, ya que después de un número de veces [de realizar la operación de duplicar los lados del polígono] tendremos un polígono inscrito en el círculo, cuyos lados debido a su pequeñez coincidirán con la circunferencia del círculo. Y puesto que para cada polígono podemos encontrar un cuadrado equivalente, […], estamos en disposición de conseguir un cuadrado igual al círculo".

Por otra parte, y siguiendo a González Urbaneja, Eudemo, discípulo de Aristóteles, aducía que Antifón infringía el principio de que «*las magnitudes son divisibles sin límite*». Siendo el área del círculo «*divisible sin límite*», el proceso descrito por Antifón nunca alcanzará a todo el área, por tanto, los lados del polígono inscrito se acercan «*en potencia*» a la circunferencia, pero nunca ocuparán «*en acto*» la posición de la misma.

Así pues, podemos afirmar que, en buena medida, la discusión sobre lo infinitesimal se centraba (y se sigue centrando) en torno a aceptar, o no, que *llegaba* un momento en el que se podía afirmar que se tenía una situación distinta a la que se tiene en *condiciones normales*. En el caso del círculo y los polígonos inscritos en un círculo, por ejemplo, el asunto es aceptar, o no, que dada su *infinita pequeñez*, el arco de cada sector circular puede ser considerado, *exactamente* (o bien, con un error infinitamente pequeño) como un segmento rectilíneo.

Siguiendo la argumentación de Antifón, tendríamos que (ver figura 1), si se acepta que llega el momento en el que los segmentos circulares son triángulos, cada uno de estos tendría una altura igual al radio del círculo y una base infinitamente pequeña, de longitud Δs .

Si todos estos triángulos se dibujan con cada base a continuación de la del anterior (como desenrollando el círculo) y con el tercer vértice en el mismo punto (que podría ser el centro del círculo), se obtendría un triángulo con base igual al perímetro del círculo y altura igual al radio del mismo, lo que resultaría ser, más tarde, una de las proposiciones de Arquímedes en *La cuadratura del círculo*.

Ideas como la anterior fueron recuperadas por los matemáticos del siglo XVII, para dar lugar al surgimiento de l cálculo infinitesimal. En las siguientes secciones se mostrará, con algunos ejemplos, la manera en la que pueden aprovecharse tales ideas en un curso de cálculo.

2 Leibniz y Newton: arcos, cuerdas y tangentes

En la geometría de las curvas, la aceptación de lo infinitesimal condujo a Leibniz y sus seguidores a un sinnúmero de resultados. La idea básica es la de mirar un arco curvilíneo como constituido por una infinidad de segmentos rectilíneos, cada uno de ellos de longitud infinitamente pequeña. Al respecto, y de acuerdo con Bos (1974), el propio Leibniz indicaba: «Siento que este método y otros en uso pueden ser todos deducidos de un principio general que yo uso en la medición de las figuras curvilíneas, que una figura curvilínea debe ser considerada como un polígono con un número infinito de lados».

Un caso en el que podemos notar las ventajas de la concepción infinitesimalista de las curvas, es el de la circunferencia. Si se considera una circunferencia de radio a y centro en *O*, y siendo *A* y *B* dos puntos de la curva y *w* el ángulo central (medido en radianes) que subtiende al arco *AB* (figura 2), tendremos que el arco y la cuerda con extremos *A* y *B*, estarán dados por: $\text{arco}\,AB = aw$ y $\overline{AB} = 2a\,\text{sen}\,(w/2)$.

Cuando w es infinitesimal, el arco y la cuerda son iguales, de manera que: $aw = 2a\,\text{sen}\,(w/2)$, $w = 2\,\text{sen}\,(w/2)$, $\frac{w}{2} = \text{sen}\left(\frac{w}{2}\right)$. Es decir, si α es infinitesimal, entonces $\text{sen}\,\alpha = \alpha$, o, lo que es lo mismo, "el seno de un ángulo infinitamente pequeño es el mismo ángulo", de donde se deduce el teorema: $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$.

Por otra parte, aunque no en los mismos términos, Newton (1687) también se apoyó en una concepción infinitesimalista de las curvas. Así, en sus *Principios* decía más o menos que: si consideramos dos puntos de una curva, uno *P*, que permanece fijo, y otro *Q*, que se mueve sobre la curva, acercándose a *P*, si *Q* se acerca indefinidamente a *P*, «la última razón entre del arco, la cuerda y la tangente, entre sí, es la razón de igualdad».

Así pues, Newton afirmaba que "al final", el arco, la cuerda y la tangente se funden en un solo segmento, lo que permite afirmar, a su vez, que si se eligen los puntos de una curva cualquiera, suficientemente próximos entre sí, entonces el arco comprendido entre estos, puede ser reemplazado por la cuerda, o por la tangente (y viceversa) en cualquiera de los puntos.

Además, puede observarse que la recta tangente no se definía; los tres elementos citados: cuerda, arco y tangente, son conocidos independientemente de la posición límite. Lo que ocurre "al último" es que los tres se funden en uno solo, por lo que cada uno de ellos puede ser usado en lugar de cualquier otro. Actualmente, en cambio, la recta tangente se define con base en la posición límite de la secante.

En la figura 3 se ilustra esta situación. En cada una de las cuatro figuras del lado izquierdo se muestra la parte de la gráfica de $y = \text{sen}\,x$, correspondiente a $x \in [0, 2]$, lo mismo que el punto $P = (1, \text{sen}\,1)$. Además, en cada una de las cuatro se muestra un punto *Q*, también de la curva, pero en diferentes posiciones, "moviéndose" hacia *P*.

La diferencia entre las abscisas de *P* y *Q* es Δx, de manera que las coordenadas de *Q* son $(1+\Delta x, \text{sen}\,(1+\Delta x))$. Las figuras mostradas corresponden, respectivamente, a $\Delta x = 0.5$, $\Delta x = 0.25$, $\Delta x = 0.125$ y, $\Delta x = 0.03125$.

En cada caso se trazó la cuerda *PQ* y la parte *PT* de la recta tangente a la curva en *P*. Además se trazó el rectángulo definido por esta porción de la recta tangente. Esa región rectangular es la que se muestra ampliada del lado derecho.

Podemos observar que, como indicaba Newton, conforme *Q* se aproxima a *P*, queda aún más próximo de *T*, de manera que la cuerda y el arco *PQ* terminan por confundirse con la tangente *PT*.

3 La diferencial en el cálculo leibniziano

En el cálculo leibniziano, toda vez que las cantidades infinitamente pequeñas eran aceptadas y constituían una herramienta básica, la diferencial, definida como el incremento infinitamente pequeño de una cantidad variable, resultaba ser el concepto básico, igual que ahora lo es el de límite. Sin embargo, sabemos que el concepto de límite resulta poco comprensible para la mayoría de los estudiantes, por lo que vale la pena, desde la perspectiva del docente, analizar la pertinencia de apoyar el curso de cálculo en el concepto de diferencial.

Veamos cómo se definía la diferencial en dos de los primeros libros de texto para el estudio del cálculo. Primeramente, tenemos que L'Hôpital (1696), en su *Análisis de los infinitamente pequeños* indicaba en las primeras definiciones (ver figura 4):

«La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, es llamada diferencia. Sea AMB, por ejemplo, una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro a la línea AC y como una de sus ordenadas a la recta PM, y sea pm otra ordenada infinitamente cercana a la primera. Admitido eso, si se trazan MR paralela a AC y las cuerdas AM y am, y luego se describe, con centro en A y radio AM, el pequeño arco de círculo MS, Pp será la diferencia de AP; Rm la de PM; Sm la de AM, y Mm la del arco AM. Análogamente, el pequeño triángulo Mam que tiene como base el arco Mm será la diferencia del segmento AM, y el pequeño espacio MPpm será la diferencia del espacio comprendido por las rectas AP y PM, y por el arco AM».

Poco más de medio siglo después, Bezout (1770?) daba precisión:

«Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente: entonces, la diferencia de estos dos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama diferencial de esa cantidad».

De esta manera, y utilizando simbología actual, si *f* es una función definida mediante $y = f(x)$, y si consideramos que la variable crece en grados infinitamente pequeños de tamaño *dx*, entonces la diferencial de *y*, correspondiente a $x = a$ estará dada por $dy(a) = f(a + dx) - f(a)$.

4 La continuidad y la diferencial en el trabajo de Euler

Ahora bien, en el siglo XVIII, no teniendo la concepción actual de límite, tampoco la tenían sobre la continuidad; de hecho, las funciones se suponían continuas, de manera que un incremento pequeño de la variable debía provocar un incremento pequeño en la función y un incremento infinitamente pequeño de la variable, necesariamente produciría un incremento infinitamente pequeño en la función. Así pues, cuando Euler (1748) estudiara el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial, en su *Análisis de los infinitos*, decía:

«Ya que $a^0 = 1$ y que a medida de que el exponente de *a* aumenta, el valor de la potencia también aumenta si *a* es un número mayor que la unidad; se sigue que si el exponente sobrepasa infinitamente poco a cero, la potencia superará infinitamente poco a la unidad. Sea *w* un número infinitamente pequeño, o una fracción tan pequeña que difiera infinitamente poco de cero, se tendrá $a^w = 1 + \psi$, siendo ψ infinitamente pequeño, dado que si no lo fuera entonces *w tampoco lo* sería. ψ será entonces ó = *w* , ó > *w*, ó < *w;* relación que dependerá siempre del valor de *a.* Como desconocemos tal relación, hagamos $\psi = kw$, de manera que $a^w = 1 + kw$, si tomamos *a* por la base logarítmica, tendremos $w = l(1 + kw)$ ».

Así pues, Euler asumía la continuidad de la función exponencial (específicamente en el punto en el que la variable es cero), indicándonos que, a partir de $x = 0$, si la variable tiene un incremento infinitesimal, también lo hará la función, de manera que, sabiendo que $a^0 = 1$ y siendo *w* infinitamente pequeño, tendremos que $a^{0+w} = a^w = \, = 1 + \psi = a^0 + \psi$ y ψ también será infinitamente pequeño.

Tenemos, además, aquí, otra situación interesante (ver figura 5): si nos fijáramos en una ventana infinitamente pequeña, alrededor del punto $(0,1)$, el conjunto de funciones $y = a^x$, donde a toma valores entre 1 e ∞, lo veríamos como un haz de rectas, tal como se muestra en la figura (derecha).

Al hacer $a^w = 1 + kw$, siendo w infinitamente pequeña, k resulta ser la pendiente de cada una de tales rectas. El valor de k estaría variando entre 0 e ∞, de manera que, si aceptamos (¿Por qué habría de ser de otra manera?) que tal variación se da continuamente, con la variación también continua de la base a, tendrá que haber un valor de a para el cual k vale 1, lo que llevó a Euler a definir su famoso número e.

5 Lagrange y las funciones analíticas

Las series de potencias han sido, desde los orígenes del cálculo, una herramienta matemática importante, principalmente para la aproximación y evaluación de funciones. Sin embargo, actualmente las series de potencias aparecen en los libros de texto al final de toda una unidad dedicada a las series y sucesiones, en la que la definición rigurosa y el análisis de la convergencia de las sucesiones y series es lo que más importa.

En su Teoría de las funciones analíticas, Lagrange (1813) abordaba el asunto del desarrollo en serie de potencias de una función, desde el primer artículo, resumiendo algunos resultados para entonces conocidos:

«Consideremos una función fx de una variable cualquiera x. Si en lugar de x se pone $x + i$, siendo i una cantidad cualquiera indeterminada, ella se convertirá en $f(x+i)$, y por la teoría de las series, se podrá desarrollar en una serie de la forma $\mathrm{f}x + pi + qi^2 + ri^3 +$ etc., en la que las cantidades p, q, r, etc., coeficientes de las potencias de i, serán nuevas funciones de x, derivadas de la función primitiva fx, y de la indeterminada f».

Ahora bien, un poco más adelante, en el artículo 6, Lagrange invitaba al lector a poner la atención, respecto de las series de potencias, no en la parte operativa, sino en su característica principal, la de la convergencia, pero no con el rigor de ahora, y más precisamente, en el hecho de que la convergencia nos permite suponer que cada término de la serie puede hacerse (en valor absoluto) mayor que la infinidad de términos subsiguientes, a condición de tomar un valor suficientemente pequeño del incremento i de la variable:

«Pero la principal ventaja del método que acabamos de exponer consiste en que hace ver como las funciones p, q, r, etc. resultan de la función principal fx, y sobre todo en que los términos restantes iP, iQ, iR, etc. son cantidades que deben desaparecer cuando $i = 0$, de donde se obtiene una consecuencia importante, que en la serie $\mathrm{f}x + pi + qi^2 + ri^3 + \mathrm{etc}$ que proviene del desarrollo de $\mathrm{f}(x+i)$, se puede siempre tomar i suficientemente pequeña para que un término cualquiera sea más grande que la suma de todos los términos que le sigue, y que eso tiene lugar también para todos los valores más pequeños de i».

Conclusión

Haciendo como hacían los autores de libros de texto, en el siglo XIX, que escogían una o más "versiones" del cálculo, que entonces tenían disponibles, para presentar los conceptos del cálculo, obedeciendo más a cuestiones de carácter didáctico que a la búsqueda de un texto impecable, desde el punto de vista del rigor lógico, resulta importante rediseñar un primer curso de cálculo recuperando aquellos elementos de las distintas versiones del cálculo de los siglos XVII y XVIII que hagan más interesante y entendible para los alumnos, cada uno de los conceptos y problemas del cálculo.

REFERENCIAS

– Bezout, E. (1770 ?), *Cálculo infinitesimal*, Limusa-IPN, México, 1999. Traducción de la edición original en francés.
– Bos, H. J. M. (1974), “Differentials, higher order differentials and the derivative in the leibnizian calculus”, Arch. Hist. Exact Sc., 14, pp. 1-90.
– Courant R., Robbins, H.; *¿Qué son las matemáticas?*, edición revisada, con prefacio y *Avances recientes* de Ian Stewart, traducida al castellano por Martín Manrique, Fondo de Cultura económica, México, 2002.
– Euler, L. *Introduction to Analysis of the Infinite*, Springer Verlag, New York, USA, 1988. Traducción al inglés por John D. Blanton de la edición original en latín, de 1748.
– González Urbaneja, P., 1992, *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, Alianza Editorial, Madrid.
– Lagrange, J. L. (1813); *Théorie des fonctions analytiques*, seconde édition, Courcier, Paris, Francia.
– L’Hôpital, Marqués de (1696), *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*, colección MATHEMA, UNAM, México, 1998. Traducción al español del original en francés: *Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes courbes*, de 1696. Traducción e introducción de Rodrigo Cambray.
– Newton, I. (1687), *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, Barcelona, 1994 (traducción de la primera edición latina, publicada en Londres, en 1687).

Figuras

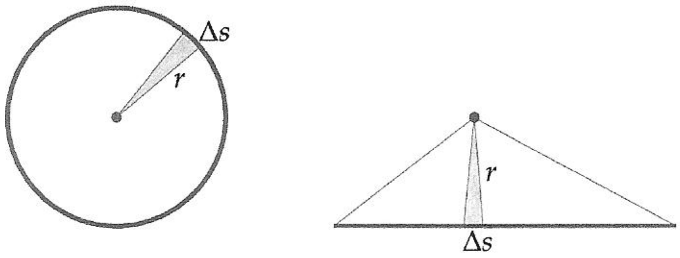

Fig. 1

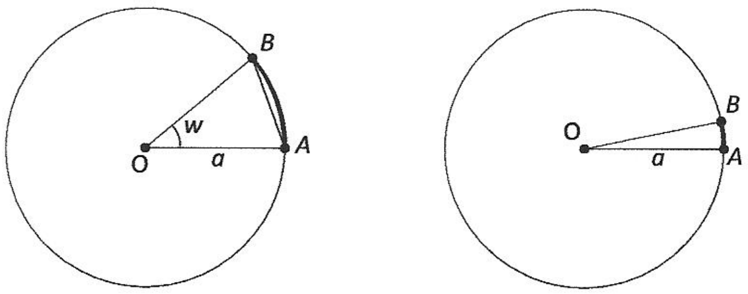

Fig. 2

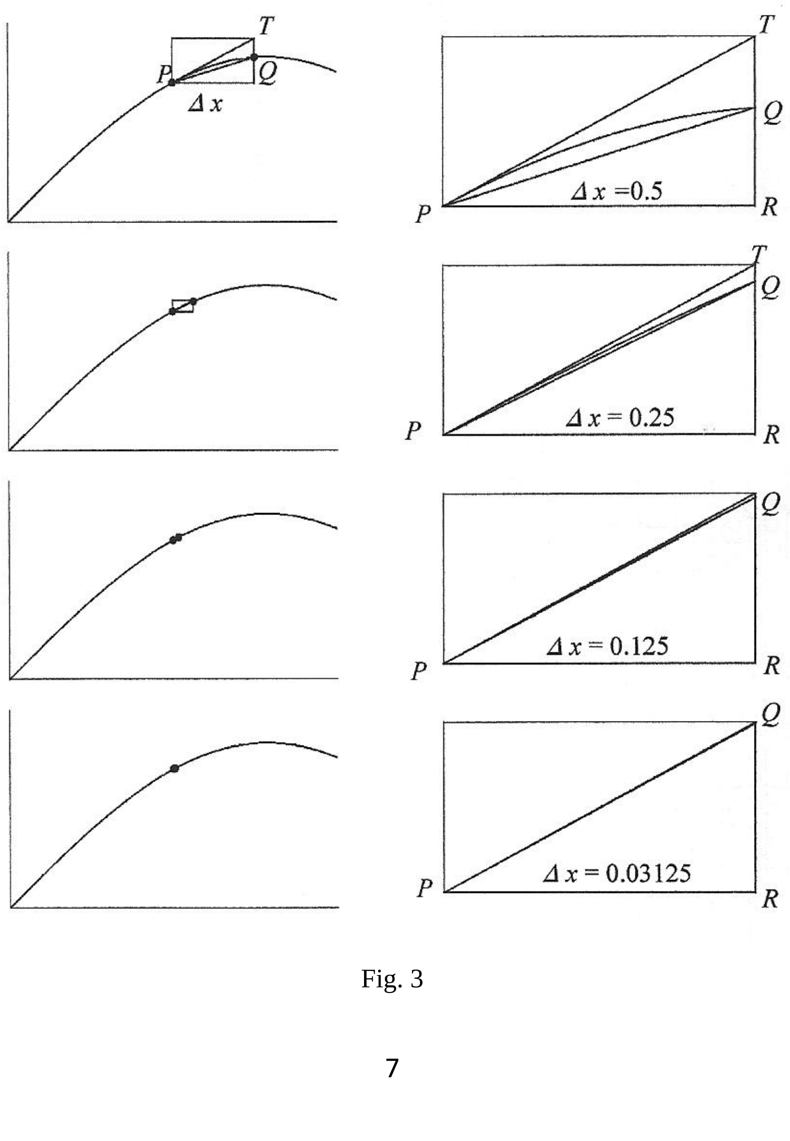

Fig. 3

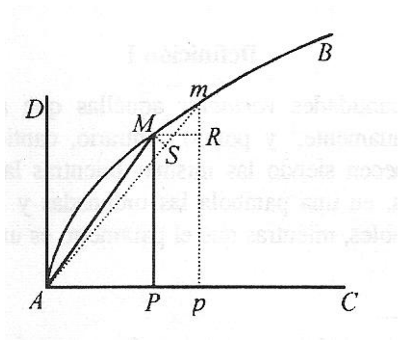

Fig. 4

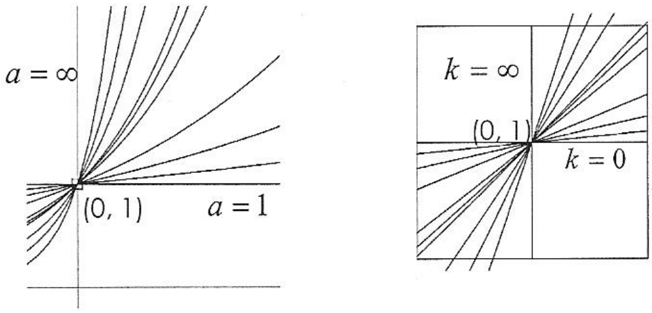

Fig. 5