TRAS LOS PASOS DE ARQUÍMEDES: ESTRATEGIAS ESPONTÁNEAS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN EL CÁLCULO DEL ÁREA DE UN SEGMENTO DE PARÁBOLA

Mónica OLAVE, Mario DALCÍN
Instituto de Profesores 'Artigas', Av. del Libertador 2025, Montevideo, Uruguay
CICATA-IPN, Legaria 694, Col. Irrigación, Del. M. Hidalgo, México D.F., México
matemoni@adinet.com.uy, filomate@adinet.co.uy

ABSTRACT

Presentamos el análisis del trabajo de estudiantes de Bachillerato (16 – 18 años) de Uruguay que, sin haber recibido instrucción específica sobre cálculo integral, se enfrentan al cálculo del área bajo una curva. Detectamos que las intuiciones y argumentaciones de un número considerable de los estudiantes se refieren a la idea de agotar el área bajo la curva inscribiendo más y más polígonos usando argumentos que se acercan al método de exhaución utilizado por Arquímedes (siglo III a.C.) en su *Cuadratura de la parábola*.

Los hallazgos antes detallados se dieron en el marco de una investigación que pretendía detectar las estrategias que utilizan los estudiantes al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva. Comparamos el trabajo de nuestros estudiantes con el realizado por Arquímedes y creemos que lo hallado nos brinda elementos para realizar el diseño de secuencias apropiadas para introducir la integral definida teniendo en cuenta los aportes de la Historia de la Matemática y tomando como punto de partida las estrategias espontáneas de los estudiantes, apoyándonos en diseños que tengan en cuenta los procesos cognitivos de quienes aprenden.

1 Introducción

En este trabajo presentamos algunos hallazgos detectados en el marco de una investigación que tenía como principal objetivo observar las estrategias que utilizan los estudiantes de Bachillerato de Uruguay al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva. Uno de nuestros intereses era, teniendo en cuenta los resultados, sentar bases para una futura propuesta para la enseñanza de la integral definida. En la actualidad, la elección hecha por quienes elaboran los programas uruguayos para insertar el tema en el mismo es tratar a la integral como primitiva, admitiendo la existencia de la misma para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado. Se hace un tratamiento algebraico del tema, independiente de la noción de área, y se considera a la primitivización como "inversa" de la derivación.

Por el contrario, pensamos que vincularla con la noción de área sería el camino más adecuado ya que, por un lado, contamos con argumentos históricos que nos permiten inferir la pertinencia de este abordaje y, por otro, contamos con los resultados de diferentes investigaciones que recomiendan el abordaje de la integral definida desde este punto de vista.

En base a esta postura nos preguntamos entonces cuáles son las estrategias que utilizan los estudiantes de bachillerato en Uruguay al enfrentarse al cálculo de área bajo una curva.

Para contestar esta pregunta se propuso un cuestionario (Ver Anexo) a varios estudiantes de Bachillerato y posteriormente se realizó un análisis de estas estrategias, teniendo en cuenta aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos y los antecedentes de investigación.

2 Consideraciones teóricas

Se realizó un análisis del tema que nos ocupa desde las perspectivas epistemológica, cognitiva y didáctica. Es en estos aspectos en los que nos basamos para hacer el análisis de los resultados recogidos en el cuestionario propuesto a los estudiantes en la parte experimental de la investigación.

Desde el punto de vista epistemológico se intentó dar una explicación del origen y desarrollo del contenido matemático, analizando su funcionamiento y diferentes formulaciones del mismo; desde el didáctico se analizó el estado actual de la enseñanza del tema; desde el cognitivo se analizaron las habilidades cognitivas que los estudiantes poseen y deben poseer para realizar un aprendizaje significativo del tema.

Pensamos que un análisis epistemológico nos permite reconocer las fuerzas culturales que permitieron el nacimiento de este saber y su desarrollo, a efectos de entender el escenario que permitió su gestión, las preguntas fundamentales y las nociones germinales que acompañaron a este conocimiento. Podemos así reconocer las caracterizaciones, las habilidades y técnicas referentes al concepto de integral que le dieron origen y lo desarrollaron.

Queremos aclarar que no se trata de una mera investigación histórica, aunque nos servimos de ella, sino que se pretende conocer y precisar el origen de este conocimiento, desde su génesis, los sentidos y significados de dicho concepto, así como su evolución y desarrollo. Esto nos permite, además, obtener información para poder apreciar las modificaciones que ha sufrido este conocimiento al introducirse en las instituciones educativas como saber escolar. También nos permite detectar qué obstáculos enfrentaron los matemáticos en la construcción de este concepto, lo que nos brinda información acerca de los posibles obstáculos y dificultades que pueden enfrentar los estudiantes cuando deben abordar tales conceptos. Es por ello que analizamos si las estrategias de nuestros estudiantes recrean de alguna forma los pensamientos y argumentos utilizados por los matemáticos en la génesis del concepto.

El análisis del comportamiento cognitivo de los estudiantes se basa en los siguientes aspectos teóricos:

✓ El modelo Visualizer – Analyzer (modelo VA) que presentan Zazkis, Dubinsky y Dauterman (1996) que asume que la visualización y el análisis son mutuamente dependientes en la resolución de problemas matemáticos, en contraposición a otras corrientes que los ven como aproximaciones opuestas. Este modelo propone una descripción de cómo esta mutua dependencia funciona. La intención de los autores es entender cómo los estudiantes combinan las aproximaciones visuales y analíticas al resolver problemas matemáticos y cuando se trata de entender conceptos matemáticos.

✓ El concepto de visualización que presentan Zimmermann y Cunningham (1991), que permite el análisis de las capacidades de los estudiantes de poder formarse imágenes mentales de los conceptos a trabajar y de poder usarlas para resolver las actividades propuestas.

✓ Las consideraciones que realiza Vinner (1991) de algunos problemas de aprendizaje basándose en un modelo de la estructura cognitiva del sujeto en términos de imagen conceptual – definición del concepto, refiriéndose a la conducta que muestran los estudiantes al enfrentarse a una actividad o prueba.

Los elementos analizados en la componente didáctica nos brindan elementos útiles para acercarnos a lo que son las prácticas de aula. Consideramos que los libros de texto nos podían dar una noción de qué se enseña y cómo se enseña.

Esta componente aparecerá interrelacionada con lo epistemológico pues nos interesa detenernos en la relación entre la evolución histórica del concepto y la presentación que se le da en el aula.

3 Metodología

Para contestar nuestra pregunta de investigación nos centramos en el estudio del cálculo de áreas de figuras limitadas por la gráfica de una función continua y no negativa definida en un intervalo [a,b], el eje de las abscisas, y las rectas de ecuaciones $x = a$ y $x = b$. En particular, teniendo en cuenta el tema que nos ocupa, haremos referencia al trabajo con la función $f: R \to R \,/\, f(x) = x(6-x)$ en el intervalos [0,6]

Elegimos trabajar con esta función ya que, al preguntarnos acerca de las estrategias espontáneas que los estudiantes ponen en juego al enfrentarse al cálculo del área bajo una curva, necesitamos que éstos no hayan tenido contacto previo con el Cálculo Integral. Esto, de acuerdo a los currículos vigentes en Uruguay, nos llevó a trabajar con estudiantes de Bachillerato que en cuanto al tema funciones han trabajado con funciones lineales, cuadráticas, polinómicas en general.

Por lo anterior se decidió trabajar con treinta y cinco estudiantes del último año de Bachillerato.

Se pretende determinar si el estudiante dispone de alguna estrategia para enfrentar este tipo de tarea, en caso afirmativo cuál o cuáles son estas estrategias, cómo las utiliza, qué herramientas elige para trabajarlas, cuál es el grado de confiabilidad que tiene en ellas, entre otros.

La propuesta fue acompañada de la figura a la que le tenían que calcular el área para que allí realizaran trazados, mediciones, o lo que ellos consideraran necesario con el fin de que la utilizaran como figura de análisis, lo que a su vez nos permitiría interpretar el tipo de razonamiento que realizaron los estudiantes.

La gráfica que se les presentó fue hecha a escala (1:1), para que existiera una congruencia entre las imágenes que se obtenían con la expresión analítica de la función y la lectura que se podía hacer de las mismas a partir de la gráfica[1].

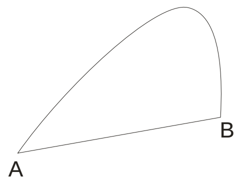
4 Algunos resultados

Detectamos que las intuiciones y argumentaciones de un número considerable de los estudiantes se refieren a la idea de agotar el área bajo la curva inscribiendo más y más polígonos usando argumentos que se acercan al método de exhaución utilizado por Arquímedes (siglo III a.C.) en su *Cuadratura de la parábola*. Con esto nos referimos a que los estudiantes intentan agotar la figura inscribiendo triángulos en la misma.

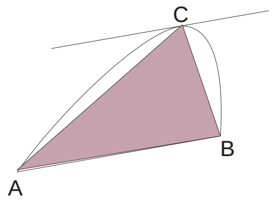
[1] Esta decisión se tomó debido a que en una prueba exploratoria realizada con otros estudiantes, al presentarse un cuestionario similar al que finalmente presentamos, acompañado de una figura de análisis que no mantenía dicha escala, varios estudiantes no continuaban su trabajo porque la figura no se correspondía con los valores que se obtenían por medio de la expresión analítica.

En la obra mencionada Arquímedes encuentra el área de un segmento de parábola dividiéndolo en una serie de triángulos que agotan el área del segmento en el sentido que el área de la región no cubierta por los triángulos se puede hacer “tan pequeña como se quiera”.

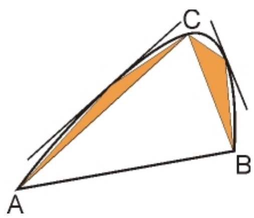
Para ello considera la región comprendida entre la parábola y una cuerda AB de la misma.



Considera el punto C de la parábola tal que la tangente a la misma es paralela a la cuerda AB.



Repite el procedimiento inscribiendo dos triángulos más pequeños sobre los segmentos AC y CB de tal forma que el tercer vértice sea el punto de intersección de la parábola y la tangente a la misma paralela a las cuerdas AC y BC respectivamente.



Continúa con este procedimiento n veces y utilizando el método de exhaución y la doble reducción al absurdo llega a que el área (a’) del segmento de parábola (sp(ABC)) es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito ABC, es decir:

$$a'(\mathrm{sp}(ABC)) = \frac{4}{3} \times a'(A\overset{\Delta}{B}C)$$

Varios de los estudiantes que entrevistamos realizan configuraciones similares a la recién descrita.

En este sentido, nuestros hallazgos parecen coincidir con los detectados por Dubinsky et al. (2000). Aunque estos investigadores trabajaron con estudiantes que tenían instrucción previa específica, éstos últimos igualmente recurrieron a procedimientos como los descritos en el párrafo anterior. Esto indica, como se explicita en la mencionada investigación, que una fuerte intuición no puede ser destruida por la instrucción recibida en la clase.

Esto último es aplicable a cuatro de nuestros entrevistados que habían recibido instrucción previa en forma lateral en el ámbito de la clase de informática. A pesar de esto ellos comienzan su trabajo usando estrategias que se asemejan a las del método de exhaución. En una primera instancia podríamos conjeturar que este comportamiento, es decir la no apropiación del procedimiento de tomar particiones, se debía principalmente a que no hubo una discusión acerca de la eficiencia de diferentes técnicas que les permitieran acercarse al área de una región no poligonal. Luego del análisis podemos agregar razones epistemológicas a los procedimientos elegidos por estos estudiantes ya que, en cierta medida, están reproduciendo los argumentos lógicos de los grandes matemáticos, como ser en este caso los de Arquímedes.

Presentaremos a modo de ejemplo de lo antes dicho los trabajos de dos estudiantes.

4.1 El trabajo de Daniela

Esta estudiante utiliza una tangente y el punto de tangencia lo toma como tercer vértice de un triángulo que inscribe en la misma como se puede apreciar en la Figura 1. Este procedimiento lo repite varias veces en un intento de encontrar un procedimiento que le permita generar mejores aproximaciones. Primero con el vértice (V) de la parábola, luego con los puntos P y S, y finalmente con los puntos R y J.

Pero en los hechos elige primero el punto y luego traza por él la tangente, que visualmente da la sensación de ser paralela a la cuerda de la sección parabólica en cuestión. Esto nos recuerda el trabajo realizado por Arquímedes.

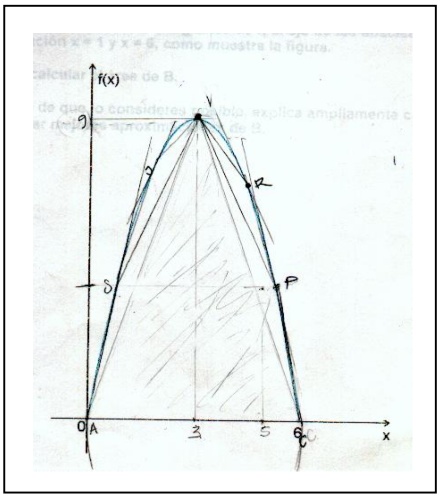


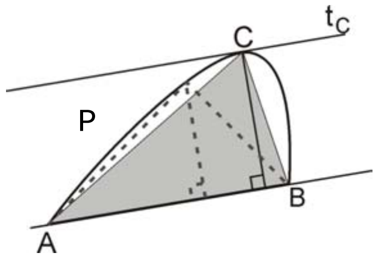
Figura 1

¿Cómo y por qué elige estos puntos? Por el tipo de actividad propuesta la idea es encontrar una aproximación del área de la región con el menor error posible. Por lo tanto tiene que buscar una figura, dentro del repertorio de figuras a las que ella sabe calcularle el área, de forma tal que cubra la región de la mejor forma posible. Decide trabajar con triángulos inscritos en la parábola. Con el primer segmento de parábola el punto V que elige determina con la cuerda AB el triángulo de mayor área posible. Casualmente este punto coincide con el punto considerado por Arquímedes.

En el segundo intento, con los dos nuevos segmentos de parábola que quedan determinados, los puntos que elige (S y P) no parecen cumplir con las condiciones antes mencionadas. Por lo menos en lo que se refiere a una apreciación visual. Pensamos, de igual forma, que está intentando cubrir al máximo la región.

En el tercer intento (como se puede ver en la Figura 1) los puntos R y J parecen cumplir estas condiciones.

Veamos la situación a partir de la construcción de Arquímedes: la tangente t_C (paralela a la cuerda AB) deja a la parábola en un mismo semiplano con respecto de esta. Como C es el único punto de la parábola que pertenece a t_C, los demás puntos de la misma quedan en la franja determinada por t_C y AB.



Además se cumple que $d(t_c, AB) = d(C, AB)$

$\forall\ P \neq C,\ P \in (P)$ se cumple que $d(P, AB) < d(C, AB)$

Los triángulos ABP tienen igual base que el ABC y menor altura, por lo que el área del triángulo ABC es la mayor.

De esto se deduce que el punto de tangencia C (punto de contacto de la tangente paralela a la cuerda AB con la parábola) determina con AB el triángulo de mayor área posible.

4.2 El trabajo de Ana

Si observamos la hoja de trabajo de Ana (Figura 2) vemos que el triángulo que traza primero tiene base en la cuerda del segmento de parábola y el tercer vértice es el punto de la curva que determina el triángulo de mayor superficie posible. Éste coincide con el punto de intersección de la recta tangente a la parábola paralela a la cuerda del segmento de parábola. Este triángulo determina dos nuevas secciones parabólicas y en cada una de ellas construye un nuevo triángulo. Esta forma de trabajo nos recuerda a la que utiliza Arquímedes en su demostración de que el área del segmento de parábola es 4/3 del área del triángulo inscrito.

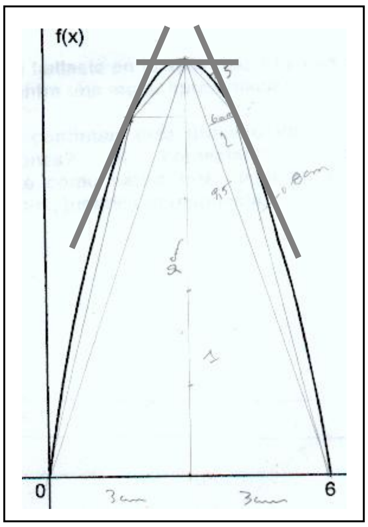


Figura 2

Acerca del trabajo de Ana nos preguntamos cómo determina el tercer vértice de cada uno de estos triángulos. Parecería ser el punto de la parábola que se encuentra a mayor distancia de la cuerda. De esta forma determina el triángulo de mayor área que se puede obtener con un lado en la cuerda del segmento de parábola. Consideramos que Ana estaría buscando una figura que cubra la mayor superficie posible. Esto lo manifiesta en la parte 2) b) de la actividad (ver Anexo) cuando dice que la región está limitada por una parábola y "*no tengo un dibujo que pueda completar en su totalidad el área*". Aquí vemos que Ana, como muchos de los estudiantes con los que trabajamos, está tratando de visualizar, de buscar dentro de la colección de figuras geométricas que maneja y de las que sabe como determinar el área, una que cumpla con las condiciones exigidas por la región. Si esta es la estrategia usada por Ana, entonces el tercer vértice que determina en cada etapa debería coincidir con el de Arquímedes.

Con respecto a la posibilidad de generar un proceso que le permita determinar el área de la región, Daniela parece estar a medio camino. Dice que únicamente se puede aproximar tomando "el máximo de triángulos posibles" y calculando posteriormente sus áreas. Vemos, por sus palabras, que esta estudiante está visualizando una solución al problema pero pensamos que la figura que se le proporciona para que trabaje le obstaculiza la visión de esta solución. No puede conciliar su imagen visual de la solución con la figura concreta de la región. El espacio físico concreto le permite incluir dentro de la región "el máximo de triángulos posible", lo que la lleva a descartar la solución a la que había arribado.

A este respecto Ana afirma que "no sería posible encontrar el área total, ya que es lo máximo que se puede meter dentro de la parábola". Como vemos maneja el mismo argumento que Daniela. El espacio físico la limita.

En ambos casos el espacio físico concreto estaría impidiendo que estas estudiantes puedan admitir una solución que conlleve la división de la región en infinitas figuras.

Vemos que, en general, los estudiantes que mencionan en sus respuestas la infinitud del proceso generado por ellos, lo hacen en el sentido de la posibilidad de poder determinar en cada etapa de dicho proceso una mejor aproximación. Esto nos da la idea de que poseen una concepción del infinito potencial y no lo ven como algo definido o acabado. El no poder llegar a calcular el área buscada, es decir el no poder terminar el proceso que iniciaron fomenta esta idea de infinito potencial que se puede transformar en un obstáculo a la hora de incursionar en la definición formal del concepto de integral.

5 Conclusiones

Históricamente sabemos que primero se trabajó en el cálculo de áreas con métodos realmente sofisticados e independientes de la diferenciación. Como ejemplo podemos citar los trabajos de Arquímedes al respecto que, por ejemplo, en el cálculo del área de un segmento de parábola utiliza argumentos infinitesimales en sus métodos mecánico y geométrico. Apoyados en las evidencias detectadas en este trabajo, podemos decir que las intuiciones de varios de nuestros estudiantes en el cálculo del área fueron similares a la presentada por Arquímedes en el cálculo del área del segmento parabólico. Compartimos con Turégano (1998) en que "Cuando una cosa se descubre antes que otra, es probable que la primera sea más sencilla que la segunda".

Además de ser fascinante ver cómo los estudiantes imitan, en cierta medida, los argumentos de Arquímedes, creemos que lo hallado nos brinda elementos para realizar el diseño de secuencias apropiadas para introducir la integral definida teniendo en cuenta los aportes de la Historia de la Matemática y tomando como punto de partida las estrategias espontáneas de los estudiantes, apoyándonos en diseños que tengan en cuenta los procesos cognitivos de quienes aprenden.

Los argumentos históricos nos permiten inferir que la integral definida debería abordarse asociada a la noción de área. Con esto se daría un pasaje natural de los argumentos y lenguajes geométricos manejados por los estudiantes en el tema área, a los argumentos y lenguajes analíticos que se procesan en el tratamiento de la integral definida.

Pensamos que estas evidencias deberán ser tenidas en cuenta a la hora de elaborar las actividades preparatorias para el abordaje de la integral definida. No sólo se deberán plantear actividades que propicien el uso de las diferentes técnicas que les permitirán acercarse al área de una región no poligonal sino que se deberán generar los ámbitos que permitan una socialización de la discusión acerca la potencialidad de cada estrategia, de las ventajas y desventajas de cada una de ellas, el carácter general o generalizable de ellas en relación a un grupo de regiones, así como la eficiencia o no de las mismas.

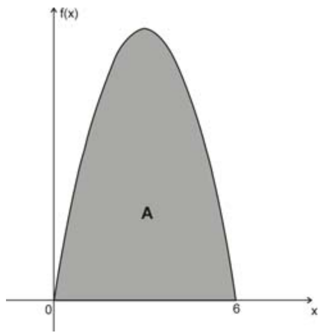
REFERENCIAS

- Boyer, C. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Londres: Dover.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza.
- Dubinsky, E. et al. (2000). Conceptions of Area: In Students and in History. http://trident.mcs.kent.edu/~edd/
- Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza.
- González Urbaneja, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid: Alianza.
- Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza.
- Heath, T. (1953). *The Works of Archimedes*. U.S.A.: Dover.
- Montesinos, J. (2000). *Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Stein, S. (1999). *Archimedes. What did he do besides cry eureka?* Washington DC: The Mathematical Association of America.
- Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), pp. 233-249.
- Vinner, Sh. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer, pp. 65-81.
- Zazkis, R.; Dubinsky, E. y Dauterman, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of student´s understanding of the group D_4. *Journal of Research in Mathematics Education* 27 (4), 435-457.
- Zimmermann, W. y Cunningham, S. (1991). Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington DC: The Mathematical Association of America, pp. 1-8.

Anexo: Cuestionario de investigación

Actividad 1

Este es el gráfico de la función f: [0,6] $\rightarrow$ R / f(x) = x(6-x)



Sea A la región encerrada entre la gráfica de f y el eje de las abscisas entre los puntos (0,0) y (6,0), como muestra la figura.

a) Intenta calcular el área de A.

b) El valor que hallaste en a), ¿corresponde exactamente al área de A? Justifica tu respuesta.

Actividad 2

a) El valor que hallaste en la actividad 1 es una aproximación del área de A. Encuentra una mejor aproximación.

b) ¿Se puede continuar este proceso en la búsqueda de mejores aproximaciones? Si contestaste afirmativamente explica ampliamente cómo harías una mejor aproximación. Si lo hiciste negativamente, justifica tu respuesta.