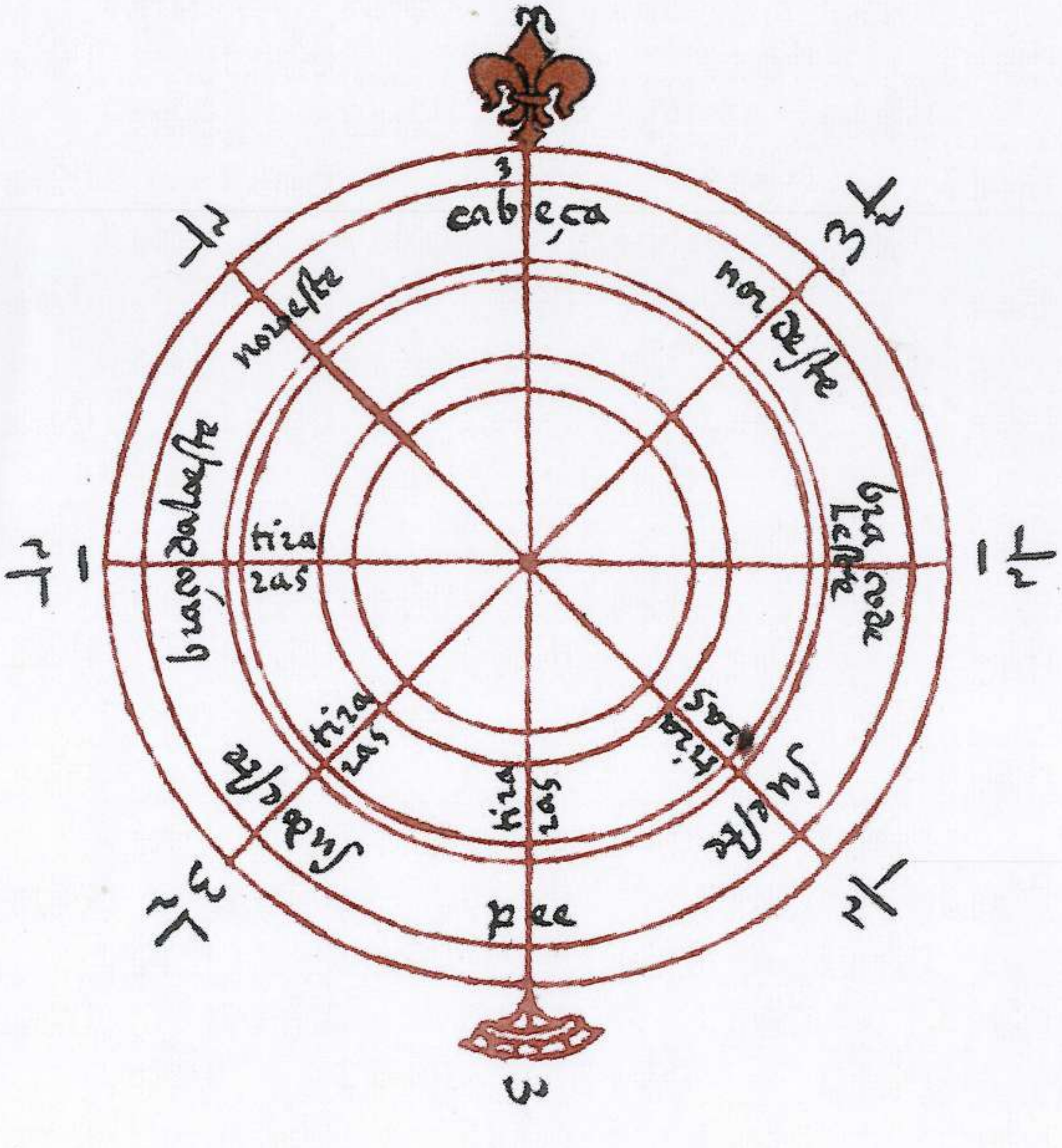
História e Educação Matemática

proceedings • actes • actas

vol. II



24-30 Julho 1996, Braga, Portugal

Associação de Professores de Matemática
Departamento de Matemática da Universidade do Minho

Eduardo Veloso

História e Educação Matemática

proceedings • actes • actas

vol. II

Deuxième Université d'Été Européenne sur Histoire et Épistémologie dans l'Education Mathématique

ICME-8 satellite meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics (HPM)

24-30 Julho 1996, Braga, Portugal

Associação de Professores de Matemática
Departamento de Matemática da Universidade do Minho

Título: *História e Educação Matemática — Proceedings • Actes • Actas — Vol. II*
Publicadas pela Comissão Organizadora do HEM BRAGA 96
Organizadores: Maria João Lagarto, Ana Vieira e Eduardo Veloso
Data: Julho de 1996
Composição e paginação: Gabinete Técnico da APM
Nº de exemplares: 700
Montagem e impressão: Grafis, Coop. de Artes Gráficas, CRL
Nº de depósito legal: 101752/96
ISBN: 972-9053-55-3

Contents • Table des matières • Índice

Papers • Communications • Comunicações

papers
communications
comunicações

The presentation of papers have the duration of 25 min., followed by 10 min. for questions and discussion. Papers were proposed by participants. Papers presented at the meeting but not included in these proceedings are listed at the end of this volume.

Les présentations de communications durent 25 min., suivis de 10 min. pour questions et discussion. Elles résultent des offres des participants. Vous trouverez dans les dernières pages de ce volume les titres des communications présentées a la rencontre mais qui ne sont pas incluses dans ces actes.

As comunicações têm a duração de 25 minutos, seguidos de 10 minutos de perguntas e discussão, e resultam da oferta dos participantes no HEM BRAGA 96. Nas últimas páginas deste livro encontrará os títulos e autores das comunicações que não constam das actas.

INTEGRATION OF THE HISTORICAL DEVELOPMENT OF MATHEMATICS IN MATHEMATICS TEACHING IN THE HIGH SCHOOL USING SELF READING

AMIRA COOPER

Department of Teaching Technology and Science
Technion - Israel Institute of Technology

For over a hundred years the mathematics educators have been emphasizing the importance of integrating the history of mathematics in the curriculum. At several places in Europe and the USA attempts have been made to integrate this subject in different ways: Stories about the life of mathematicians, stories about discoveries and inventions, reading paragraphs from primary sources, solving historical problems e.t.c.

This paper presents a research which has checked the influence of integration of historical material, **using students individual reading**, in the process of teaching mathematics, on the attitude of the students toward the subject. The research was conducted in Israel during the school year 1994-1995 in high school, in the tenth, eleventh and twelfth grades.

The historical material was integrated in the following manner:

a. Before studying each topic in the classroom the students had received a historical background of this topic to read on their own at home.

b. The historical development of each topic from the curriculum was discussed in the classroom at the same time the topic itself was discussed.

This way of studying was chosen for the following reasons:

a. Individual reading prepares the student for reading scientific texts, which is required in the academic level and in his future professional work.

b. The high school curriculum is heavily loaded. Thus, adding extra tasks in the classroom framework is almost impossible. Individual reading, which is done by the student at home, doesn't consume classroom hours.

For the purpose of students individual reading 16 units have been prepared, 4-6 units for each grade who learned mathematics in high levels. Each unit included questions concerning the reading material.

Two experienced teachers, having the same academic education and the same experience in teaching mathematics (about twenty years of teaching and educating), have integrated history in teaching at each of the three grades in two different high schools.

Before starting teaching an anonymous questionnaire have been distributed among the students (pretest) in order to learn about the students' attitudes toward individual reading, integrating history in mathematics learning and toward the subject as a whole. In addition the questionnaire included knowledge question concerning the history of mathematics. The students' responses have been sorted according to a classification system which had been developed in the pilot study. During the first semester of the school year the students were reading historical material as a background, and were discussing it in mathematics lessons. The teaching of each new subject from the curriculum started by a 10-15 minutes discussion of the historical material. In one of the two high schools observations were conducted during the historical discussions. The observer, a mathematics teacher, noted, in each discussion, the number of participants, the nature of participation and the level of interest and intention. The observations have been documented by recording. After 5 months of teaching, using this method, an open anonymous questionnaire (posttest) was distributed among the students in order to recheck their opinions on the integration of historical material in mathematics and on mathematics itself. A knowledge question was included in this questionnaire too. The analysis of the questionnaires was done using the same classification system. A category system was added in order to sort the students answers to the question regarding their opinions about mathematics.

The research indicates that students conceive individual reading of mathematical material as an important part of the learning process. While 50% of the test group students assumed, in the pretest, that individual reading was useless and a waste of time, only 10% stuck to this opinion in the posttest.

The research also indicates that students are interested in the integration of historical material in mathematics learning. About 40% of the students from the test group expressed, in the pretest, their objection to the integration of historical material in mathematics. After 5 months of learning, in which historical material had been integrated in each topic, over 90% of the test group expressed, in the posttest, a positive opinion about the integration. About 8% of the test group indicated, in the posttest, their lack of interest in learning historical material.
The integration of the historical development of mathematics in the teaching has contributed to a significant change in the students' attitudes towards mathematics in all the test groups. The percentage of students who liked mathematics and/or thought it as interesting increased from 33% to 60% in average. Others (26%) emphasized the importance of mathematics. Only 1% from the test group students have stuck to their previous opinion, that mathematics was a boring subject.
As I mentioned, the students which have been participating in the research were high level students. The research indicates that about 7% percent of the students from the test group do not like mathematics or assume that it is a difficult subject. This information contradicts the opinion that students at this level are all "mathematics lovers".
As for the opinion of the teachers who integrated historical material in their teaching, both of them believe that the integration contributes to the interest in learning mathematics. They also share the opinion that integration of historical material is an adequate response to the curiosity of students regarding the sources of mathematical ideas and their development. Both teachers support the teaching of the historical development of mathematics as an integral part of the curriculum.

List of Units for Individual Reading

The followings are the topics for which units have been prepared for individual reading of the students:

Units for grade 10:

1. The development of mathematical notation - exponents and roots.
2. Irrational numbers.
3. Equations and their solutions - historical development.
4. The historical background of the analysis.
5. The historical background of analytic geometry.
6. The historical background of triangles similarity.

Units for grade 11:

1. Sequences and series - limit an d convergence.
2. The historical background of mathematical induction.
3. Pascal and Newton - the binomial theorem.
4. The historical background of combinatorics.
5. The historical background of trigonometry.

Units for grade 12:

1. The historical background of logarithms.
2. Transcendental numbers - e and π.
3. Back to the Greek mathematics - the conic sections.
4. The historical background of stereometry.
5. Complex numbers.

Attached herein an example of a unit for individual reading for grade 11.

Pascal and Newton - The Binomial Theorem

Let us look at the binom $(a+b)$. The expression $(a+b)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$ results in:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$
$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$
$$\vdots$$

If we rewrite only the coefficients we get the following "triangle":

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Using this triangle, find formulas for $(a+b)^4$ and $(a+b)^5$.

The "triangle" was named after Pascal even though it was known to other mathematicians.
Pascal was the first mathematician who discussed the relations among the triangle terms. This topic is described in his book from 1654 "Traité du Triangle Arithmetique". Pascal presented 19 characters of the triangle.

Write at least 4 characters of the Pascal Triangle.

Among others Pascal showed that the triangle terms are:

$$C_n^k = n!/[k!(n-k)!]$$

k indicates the location of the term in the nth row of the triangle.

$$C_0^0$$
$$C_1^0 \quad C_1^1$$
$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$
$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$
$$\vdots$$

The connection between the binomial coefficients and the pascal triangle was known to the Chinees. At about the year 1100 they developed formulas for $(a + b)^n$ for

$n = 0,1,2,...,8.$

These topic was known to the Indians in India and to the arabic mathematician Omar Kayyam at about the same time.

In the year 1676 Newton (Issac Newton, 1642-1727) wrote the Bionomial Theorem:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^n b^n$$

Find the third Term in the expansion of the binom $(1 + \sqrt{2})^5$

Newton had been one of the greatest mathematicians throughout the history of mathematics. At the age of 26 he had been appointed professor of mathematics at Cambridge University near London. He developed the calculus in England, and at the same time Leibnitz (Leibniz, 1646-1716) developed the calculus in Germany. Newton also investigated physical phenomena and determined the basic rules of mechanics. **Newton had never proved the binom formula.**

The first proof to the binom formula for a natural number n was given by James (Jacob) Bernouly (Jacob Bernouly, 1654-1705). The proof was written in his book Ars Conjectandi.

In 1826, the 24 years old Norwegian mathematician Niels Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) has given the first general proof of the binom formula for any n.
Abel was one of seven children of a priest. Mathematics had been his hobby and his main occupation from a very young age. His father died when he was 18 and he became the main supporter of the poor family. At the age of 24 he came to Paris and submitted the French academy his great work about **Transcendental Functions.** The mathematician Cauchy forgot to check his work.
At the age of 27 he caught pneumonia, returned to Norway, and died. Two days after his death a letter was received at his home, notifying him, that he was appointed professor at the university of Berlin.
Another contribution of Abel to mathematics was by proving that **there is no general solution for quintic equations.** Abel proved it after a period of 250 years in which mathematicians had been looking for a general solution.

I have additional material concerning pascal triangle. Anyone who is interested can get it from me.

O ENSINO DA MATEMÁTICA NOS MEADOS DO SÉC. XVIII AS IDEIAS DE INÁCIO MONTEIRO

Ana Isabel Rosendo, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Inácio Monteiro (1724-1812) foi um Professor jesuíta que ensinou Matemática pré-universitária no Colégio das Artes (Coimbra), para o que compôs um *Compendio dos Elementos de Mathematica* (1754-56).

Fez a sua formação inicial em Évora, onde adquiriu o grau de Mestre em Artes e depois frequentou, durante dois anos (1746-48), um curso de especialização em Matemática. Mais tarde, já em Coimbra, estuda Teologia (1751-55), concluindo este curso com uma brilhante defesa pública de *Conclusões Magnas*, registando o livro das actas dos exames que conferiam o grau que ele se destinava a "ler nos Coll.os primarios"[1], o que significava a Universidade de Évora e o Colégio das Artes (que pertencia à Universidade de Coimbra).

Já então Inácio Monteiro revelava uma enorme capacidade intelectual e de trabalho, pois cursou Teologia cumulativamente com a leccionação da Matemática (1753-55) e a redacção do referido *Compêndio*, que concluiu no início de 1754.

Três factos ocorridos nos anos de formação deste Padre jesuíta contribuíram, segundo pensamos, para a sua posterior postura como professor profundamente esclarecido, conhecedor da Ciência moderna e defensor das ideias Iluministas: a influência do P. António de Freitas seu último professor do curso de Filosofia em Évora, a publicação em 1746 da obra de Verney — *Verdadeiro Metodo de Estudar* — e o acesso à já bem apetrechada Biblioteca do Colégio das Artes quando da sua estadia em Coimbra.

O P. António de Freitas acabara de reger um curso completo no Colégio de Santo Antão (Lisboa), quando em 1745-46 lecciona o último ano dum curso de Artes na Universidade de Évora. Neste ressalta, segundo Craveiro da Silva, a incursão por autores modernos na parte de Filosofia e a importância dada ao estudo dos seres vivos no âmbito da Física (ainda aristotélica).

Este Professor de Inácio Monteiro foi colega de curso de Luís António Verney quando este frequentou também o curso de Filosofia na Universidade de Évora (durante dois anos), antes de abalar para Itália onde publicou, exactamente neste ano de 1746, a obra *Verdadeiro Método de Estudar*, que é uma acérrima crítica ao sistema de ensino português essencialmente jesuíta. Este facto levou a uma grande polémica e é natural que tenha sido alvo de interessantes discussões dentro da Universidade de Évora, onde permaneceram António de Freitas e Inácio Monteiro.

O ensino jesuíta começava naquela época a reflectir os primeiros passos no sentido de introduzir o ensino público das Ciências experimentais, a que dera acordo a 16ª Congregação Geral da Companhia de Jesus (1730-31), pelo que a publicação daquela obra veio certamente acelerar um processo que se tornara demasiado lento, e

---

[1] Suffragia examinatorum ad gradum, f. 77-77v., Biblioteca Nacional de Lisboa, fg. 6385.

beneficiar certamente a formação de Inácio Monteiro, que, durante dois anos, de 1746 a 1748, ficará ainda em Évora a estudar Matemática, como já assinalámos.

Ainda na última década da sua permanência no Reino Lusitano, Inácio Monteiro esteve durante provavelmente mais de seis anos em Coimbra, onde usufruiu da leitura de imensas obras de filósofos clássicos e modernos pelos exemplares existentes na Biblioteca do Colégio das Artes, o que certamente contribuiu para a aquisição da vasta cultura que manifesta nas obras que escreveu e permitiu o despontar do seu ecletismo filosófico.

Inácio Monteiro fez parte do primeiro grupo de Padres jesuítas expulsos em 1759 para os Estados Pontifícios por D. José após iniciativa do Marquês de Pombal. Foi então Professor de Filosofia e publicou as suas principais obras filosóficas. O prestígio alcançado está patente no facto de ter sido Prefeito de Estudos[2] da Universidade de Ferrara durante diversos anos, mesmo depois da extinção da Companhia de Jesus que ocorreu em 1773.

O Ensino da Matemática

O Ensino da Matemática na primeira metade do séc. XVIII ao nível universitário resumia-se a uma disciplina do curso de Medicina da Universidade de Coimbra, e no pré-universitário estava integrado no curso de Filosofia ou Artes que se ministravam em Colégios e na Universidade de Évora. Ligada à formação de pilotos e à navegação tinha grande prestígio a Aula de Esfera do Colégio de Santo Antão (Lisboa).

Durante muitos anos, ainda nesse meio século não funcionaram aulas públicas de Matemática, apesar de ter havido entre 1692 e 1711 um esforço de as implementar de forma continuada por parte dos próprios Gerais[3] da Companhia de Jesus, que as reconheciam como extremamente necessárias em Portugal sobretudo por causa da Navegação e das Missões no Oriente.

É assim que a formação matemática de Inácio Monteiro beneficia de uma das medidas então postas em prática pelos inacianos para promover a formação de Professores de Matemática — um curso de especialização a ser frequentado no fim do curso de Filosofia pelos alunos mais brilhantes e que revelassem aptidão nessa disciplina.

Inácio Monteiro vem então a exercer o magistério de Matemática no Colégio das Artes, escola com prestígio na época e que tinha a exclusividade do ensino público de Matemática na cidade de Coimbra.

As ideias de Inácio Monteiro

É nos prólogos ou prefácios do *Compendio dos Elementos de Mathematica* e da

---

2 A este cargo estava atribuída a organização de todos os estudos da instituição, sendo portanto de grande prestígio.

3 Foram ordens emanadas a partir de Roma pelos Gerais Tyrso Gonsalez e Miguel Tamburini.

Philosophia Libera (obra publicada já em Itália no ano de 1766) que Inácio Monteiro expressa a maioria das suas reflexões sobre educação, sendo algumas passíveis de transcrição, tal qual, para a actualidade.

Revela-se, no seu primeiro livro, um professor profundamente interessado na promoção de fáceis aprendizagens *"no dilatado campo de taõ vastas faculdades"* que é a Matemática. Parte da análise das dificuldades que diz sentir quem se esforça por adquirir conhecimentos (elementares), para em seguida apresentar as razões que o levaram a dar aquela forma a essa sua obra.

Defende aí que o livro que actualmente chamaríamos de escolar deve ser breve e claro pois *"a diffusaõ mortifica a curiosidade, e retarda o aproveitamento, a escuridade causa nos leitores aborrecimento às letras, que deste modo vem a ser desprezadas por culpa de Mestres, que naõ ensinaõ bem, ou de escritores, que escrevem mal"*. Manifestando a sua preocupação pedagógica, na *Philosophia Libera*, justifica o uso eventual de "argumentos à moda escolástica" pela "comodidade dos estudantes", e confessa usar bastante o método expositivo ao procurar uma posição intermédia entre o "método puramente geométrico (...) [dos] newtonianos" e o método escolástico.

Mais, constata naquela análise que a falta de meios, incluindo livros adaptados à situação portuguesa, faz esmorecer a determinação e a curiosidade de aprender Matemática. Realça a necessidade de aparecerem livros de Matemática escritos em português[4], pois que na época as obras eram escritas em latim o que naturalmente dificultava a aprendizagem.

Devemos salientar que o seu *Compendio dos Elementos de Mathematica* é dos primeiros manuais de Matemática escritos em português que vão além da Aritmética, e não esquecer que será, posteriormente, a edição de manuais em português uma das questões mais salientes e mais difíceis de pôr em prática na reforma pombalina do ensino universitário.

Nesta obra, onde o autor diz seguir o que entende por *"as leis de bom methodo"*, cada capítulo referente aos vários assuntos principia por *"huma breve Instrucçaõ ao leitor"*, onde Inácio Monteiro dá uma ideia da matéria que vai tratar, a sua utilidade e algumas considerações de carácter histórico.

Tem portanto o cuidado de fazer a motivação dos temas, afirmando mesmo no prefácio da *Philosophia Libera* que procede de modo a "tornar a matéria mais atraente e útil" pois "[sabe] que nada há mais apto para atrair os espíritos ao estudo (...) do que os dados curiosos tirados da História Natural, bem como a explicação dos fenómenos que temos à vista e diariamente experimentamos."

Como parte integrante dessa motivação preconiza o uso da História, cujo caminho entende ser útil ao ensino não apenas neste sentido mas também como esclarecedor das matérias. No inicio de cada tema do *Compendio dos Elementos de Mathematica* inclui a evolução histórica dos conhecimentos na respectiva área e os Matemáticos mais célebres a ela associados. São pequenos resumos históricos o que

---

4 Também elogia o P. Manuel de Campos acerca da publicação da sua *Trigonometria* dizendo (pág. 179): *"obra bem escrita, e mais estimavel por ser a unica completa na nossa lingoa"*.

encontramos ao longo dos dois tomos, mas bem feitos, o que revela a larga formação do seu autor. Para além disto, no decorrer do texto, vai explicando o aperfeiçoamento de alguns instrumentos, mencionando os seus criadores, como é o caso do telescópio no capítulo de Dióptrica, ou outros aspectos da evolução da Matemática a propósito de algum resultado ligado a assuntos mais importantes.

Inácio Monteiro defendia também que se devia ilustrar as matérias com exemplos práticos ou aplicações mostrando a sua utilidade. É assim que procede no seu *Compendio*, onde há uma clara intenção de possibilitar ao leitor o acompanhamento da exposição matemática, e encontramos escólios[5] e problemas entremeados no texto que se relacionam com aspectos práticos, tais como usar instrumentos, executar construções ou relacionar medidas do mundo físico. Por exemplo, no capítulo de Geometria a proposição 42 é o seguinte problema: *"Dada a circuferencia LBHQ (Fig.50) do circulo maximo da terra, v. g.[6] achar o diametro, e area do mesmo circulo."*, onde toma 7200 léguas como perímetro da respectiva circunferência. No fim do capítulo retoma estes valores e manda calcular a superfície total e o volume da Terra, não deixando contudo de alertar: *"Ainda que a terra naõ he perfeitamente esfera, por ser no Equador maior o seu diametro; como a diferença naõ he grande, a podemos supor redonda."* Depois determina o volume do Sol, dizendo que *"consta das observaçoẽs"* que o diâmetro do Sol é 100 vezes maior que o da Terra.

A sensibilidade didáctica de Inácio Monteiro levou-o a fazer pequenas observações ao longo do texto que merecem ser exemplo para muitos dos actuais autores de manuais do ensino básico e secundário. Vejamos duas do mesmo capítulo de Geometria como exemplo: na definição XXIII acerca da altura de uma figura diz *"Esta perpendicular algumas vezes cahe fóra da figura. Donde nem sempre o lado da figura he a sua altura."*; nos últimos escólios faz diversas considerações sobre modos práticos muito simples de calcular determinadas medidas como o diâmetro de uma esfera, o volume de um corpo irregular e o volume de pipas e tonéis, que pretendem evidenciar as noções intuitivas de distância entre dois pontos e de volume, e ainda como na vida prática a operação de medir volumes envolve aproximações.

Além das observações constatamos que Inácio Monteiro se debruça sobre qual deve ser a sequência a seguir no ensino de um tópico. Ele não segue na Geometria a ordem dos *Elementos*[7] de Euclides e explicita a sua razão, espelhando as suas preocupações didácticas, — não lhe reconhece uma boa ordenação das proposições, por não partir do mais simples para o mais complexo. Diz que *"Na Geometria depois da explicaçaõ do ponto, segue-se naturalmente a contemplaçaõ das linhas rectas, curvas, paralelas, e obliquas: os angulos devem preceder aos triangulos: estes aos quadrados: as superficies aos solidos. Naõ he esta a ordem de Euclides (...)"*[8].

Mas podemos questionar se Inácio Monteiro, com a orientação dos seus

---

[5] *"Scholio"* é uma explicação ou um comentário.

[6] v. g. é a abreviatura de *"verbi gratia"* que significa "por exemplo".

[7] Mas mostra a sua admiração pela rigorosa estrutura lógico-dedutiva desta obra.

[8] (Monteyro 1754), pág. 70.

Elementos de Geometria, aclara mais os assuntos do que Euclides. Ora, por exemplo, do postulado 1, que coincide em ambos, não se pode deduzir mais do que a existência de uma linha recta que liga dois pontos, e Heath diz que a unicidade se pode considerar se fizermos intervir a definição de linha recta, achando no entanto preferível incluí-la como postulado. Acontece que Inácio Monteiro afirma a unicidade no seu quarto axioma e acrescenta, no seguinte, que *"duas rectas não fecham espaço por todas as partes"*[9], o que também levava à unicidade, mas assim não restam dúvidas pois tudo está mais explícito. Claramente, a impressão com que se fica da leitura dos *Elementos de Geometria* de Inácio Monteiro é que ele estava interessado em se fazer entender por quem nada sabia do assunto e não necessitava de os conhecer com grande profundidade. Apresenta variadíssimas explicações que complementam quer as definições quer as proposições. As demonstrações revelam a lógica do encadeamento das proposições e corolários que expõe, mas de alguns não apresenta prova. É a opção que faz para incluir a vastidão de assuntos tratados em menos de cem páginas, e sem recorrer a conhecimentos demasiado elaborados. Vai dando alguns resultados na sua forma clássica, seguidos de corolários com expressões mais numéricas.

Como assinalámos, o *Compendio dos Elementos de Mathematica* de Inácio Monteiro visa o ensino pré-universitário, pelo que ele escreve sempre na perspectiva da formação matemática a esse nível, o que o leva, além de atender à "utilidade" das matérias, a diluir o carácter abstracto de alguns temas, com informações várias que despertem o interesse ou motivem o seu estudo: *"Propor as materias mathematicas com toda a abstraçaõ de hum Geometra; sem varias curiosidades Físicas, ou historicas; naturais, ou artificiais, que naturalmente suavizem a hum curioso o trabalho de perceber as demonstraçoens Geometricas, he outro modo de ser padroeiro da ignorancia."* (Monteiro 1756). Defende mesmo uma apresentação não demasiado formal da Matemática. Um claro sintoma disso é o facto de ter remetido a Álgebra para último capítulo do 2º volume do seu *Compêndio* (dando-lhe um tratamento demasiado breve), e de afirmar que a forma algébrica é a mais difícil de ser estudada levando muitas pessoas a desistir de ler os livros que tratam os temas nessa forma[10].

Ao longo da leitura das obras de Inácio Monteiro que fizemos, ficou-nos a ideia de que ele se colocava sempre muito mais preocupado com a difusão da Ciência entre as pessoas curiosas, nas quais incluía os mestres e os jovens, do que em desenvolver essa mesma ciência, apesar de estar a par do seu evoluir. Parece-nos que essa preocupação de tornar a cultura científica acessível à grande massa de estudantes transparece quando critica os autores que usam excessivamente "cálculos espinhosos" e se alargam em "demonstrações geométricas e algébricas"[11], e também quando revela o objectivo que estabeleceu para escrever a sua *Philosophia Libera*,

---

9 Este axioma é o X.I dos *Elementos* versão de Simson, mas não aparece em todas as versões desta obra. (Heath 1956), pág. 195.

10 Ver pág. 7 de (Monteyro 1754) e o Prefácio ao Leitor de (Monteiro 1766).

11 Prefácio ao Leitor de (Monteiro 1766).

declarado na *Carta à Juventude Portuguesa* incluída nessa obra — tornar compreensíveis as partes importantes das teorias dos antigos e modernos filósofos, além de outras suas reflexões, de modo a poderem ser aprendidas em pouco tempo de estudos, sempre na perspectiva de facilitar o trabalho dos estudantes que vão usufruir da sua compilação obtida com muito esforço e trabalho a partir de inúmeras obras.

Começamos aqui a sentir a sua postura como Iluminista, que se nota noutras circunstâncias, como quando apregoa para o estudo da Física a observação e a experiência como fases fundamentais na procura de uma lei matemática e na permanente verificação das conclusões tiradas, seguindo o rumo traçado por Descartes e Galileu e em geral pelos filósofos modernos, e inserindo-se no movimento naturalista que então se revelava entre os jesuítas portugueses.

Pensamos que não devemos esquecer que, nos meados do séc. XVIII, o Colégio das Artes, assim como as restantes escolas, não possuía laboratórios à altura de fazer um ensino experimentalista, nem mesmo a Universidade de Coimbra, que somente depois da Reforma Pombalina (1772) herda os instrumentos do Colégio dos Nobres que apenas iniciou o seu funcionamento em 1766. Aliás, Banha de Andrade é de opinião que o ensino da Física nos meados do séc. XVIII "era feito à base de gravuras e não de máquinas e instrumentos ou, pelo menos, não só de instrumentos e máquinas".

Contudo, não podemos esquecer que o *Compendio dos Elementos de Mathematica* era um livro introdutório para prosseguir na Filosofia, pois apenas havia uma cadeira de Matemática a este nível preparatório integrada no curso de Artes.

Assim, o *Compendio dos Elementos de Mathematica*, além de nos parecer uma obra bem estruturada, em sequência lógica e bastante abrangente, não seria muito realista se contivesse a reprodução integral ou explicações pormenorizadas de como executar a repetição de algumas experiências.

No entanto achamos que é de salientar que Inácio Monteiro se preocupava em ilustrar bastante com figuras e em referir as experiências mais significativas sobre os respectivos temas, incluindo as que não obtinham dados esperados em consonância com as teorias desenvolvidas, aproveitando para explicar por que razão isso acontecia. Não nos parece ser isto tão só preocupação didáctica mas sobretudo honestidade do trabalho que se propôs — divulgação da ciência.

Seguindo os passos da Filosofia moderna, não deixa de afirmar a grande necessidade, para quem quiser estudar Física, de saber Matemática. Chama, para tal, a particular atenção dos médicos, porque *"a Medicina he huma Physica delicada, e practica"*; e dos filósofos, que para progredirem carecem de conhecimentos de Geometria: *"Estudamos hoje a natureza pela observação, e pelo calculo; os entes de razaõ naõ se medem por Geometria; porém esta sciencia he o fundamento dos conhecimentos physicos, que fazem o corpo da Philosofia moderna"* (Monteyro 1754). Corrobora este seu pensar ao ocupar toda a primeira parte do 1º Tomo da sua *Philosophia Libera* com uns *Elementos de Geometria*.

Mas distingue claramente a Matemática que é necessária ao comum dos estudiosos da profundidade dos especialistas, afirmando: *"Nem todos porèm se* *devem consagrar a este estudo; delle devemos saber, o que basta, deixando a completa sciencia para os seus professores. Hũ Mestre de Philosophia naõ necessita de o ser tambem em Mathematica, nem he necessario, que hum estudante de Physica estude inteiramente Geometria."* (Monteyro 1754)

Como ele tem um conceito de Ciências Matemáticas muito alargado, não deixa de salientar a falta que fazem aos estudiosos das *"Letras Humanas"* os saberes da Geografia e da Cronologia, que considera *"materias Mathematicas"*, e as quais por sua vez requerem conhecimentos matemáticos.

Inácio Monteiro faz também algumas considerações sobre métodos de estudo na segunda parte dos *"Prologomenos Geraes"* do seu *Compêndio.* Chama a atenção para a necessidade de se estudar com método para não provocar desânimo, devido quer à morosidade da aprendizagem quer à falta de proveito. Acerca disto diz que devemos ter em conta a ordem das matérias e uma conveniente escolha dos livros e autores por onde se vai fazer a aprendizagem.

Seguindo as razões que apresenta, começa a expor a ordem a seguir no estudo da Matemática e os autores mais recomendados para cada uma das partes em que o organiza, distinguindo os leitores conforme pretenderem posteriormente estudar mais profundamente a Matemática ou apenas a Filosofia com compreensão da Física, ou então se são pessoas *"de distincto nascimento, ou de espada, e toga (...) [que servem] na administração, e governo das couzas de estado (...) [e não querem] em huma erudita conversa, ou guardar hum religioso silencio, ou dizer muitos desatinos"* (Monteiro 1754). Remete mais pormenores dessas indicações bibliográficas para os respectivos capítulos.

A ordem que propõe para estudar as matérias diz ser a que lhe *"parece a mais natural; porque nella sempre as antecedentes saõ principios, e quasi fundamentos para as que se seguem"* (Monteiro 1754). Por isso é que só depois das *"matérias puramente mathematicas"* coloca as suas aplicações.

Outro objectivo posto por Inácio Monteiro ao colocar, para cada tema do *Compendio dos Elementos de Mathematica*, indicações bibliográficas pormenorizadas e graduadas quanto à dificuldade de leitura e à profundidade do tratamento das matérias, parece-nos ser ainda o de despertar, nos seus leitores, a vontade de aprofundar mais o estudo. É a maneira que achou de contribuir para estimular o estudo da Matemática em Portugal, que tanto desejava e a que augurava grandes êxitos. Contrapondo o desenvolvimento dado por outros reinos europeus, apela aos Portugueses que *"appliquem parte de taõ raros talentos, de que a natureza os dotou, em cultivar a Mathematica de que tanto necessitaõ"* (Monteyro 1754).

Bernardo Lamy, que foi padre oratoriano, já setenta anos antes havia expresso a opinião de que, ao dar ao leitor uma bibliografia variada no campo da Matemática, não se tinha a pretensão de que ela fosse toda lida, mas antes permitir uma escolha conforme as preferências, tendo-se assim a possibilidade de, enquanto se estuda, consultar vários autores.

Inácio Monteiro revelou-se portanto consciente de que um item importante na aprendizagem de um tema é a escolha dos livros que a vão promover, e a sua sensibilidade pedagógica levou-o não só a indicar diversa bibliografia como a dar simultaneamente sobre ela alguns conselhos.

Domingos Maurício defende que, nos séc. XVII e XVIII, a cultura matemática, ao nível elementar, se começa a difundir em Portugal pela acção consciente dos jesuítas. Era uma Matemática com bases utilitárias, directamente influenciada pela realidade do país empenhado na luta pela independência e na expansão ultramarina.

Pensamos que Inácio Monteiro se enquadra nesta propagação da cultura científica. Ele explicita constantemente a sua intenção de ser útil aos estudiosos e de facilitar o estudo aos outros transmitindo os conhecimentos que pacientemente adquiriu em muitas obras; de poupar tempo aos alunos com a sua compilação dos assuntos de forma concisa e compreensível optando sempre por beneficiar os leitores mesmo que a obra lhe seja mais difícil de escrever. Ao longo do *Compêndio* nota-se a preocupação que tem de ir ilustrando os conhecimentos com as suas aplicações práticas mais elementares e de ir sempre aconselhando bibliografia, para mais aprofundamento das matérias, de forma diferenciada por graus de dificuldade.

Em suma, Inácio Monteiro revela um sentir profundo da sua função de **Professor** com permanentes preocupações pedagógico-didácticas, assumindo características de um real Iluminista aberto às correntes da Ciência moderna.

Bibliografia

Andrade, António Alberto Banha de. <u>Vernei e a cultura do seu tempo</u>. Acta Universitatis Conimbrigensis, Coimbra: Univ. Coimbra, 1966.

Dias, José Sebastião da Silva. <u>Portugal e a cultura europeia (sécs. XVI a XVIII)</u>. Coimbra: Univ. de Coimbra, 1953.

Guimarães, F. Rocha. "Inácio Monteiro e a Filosofia do seu tempo." <u>Brotéria</u> XXXI ((5º) 1940): 506-520.

Heath, Sir Thomas L. <u>The thirteen Books of Euclides's Elements</u>. Vol. I, II e III, New York: Dover publ., 1956.

Lamy, Bernard. <u>Entretiens sur les Sciences dans lesqueles on apprend comment l'on doit étudier les Sciences, & s'en servir pour se faire l'esprit juste, & le couer droit</u>. 3ª ed., Lyon: Jean Certe, 1706.

Maurício, Domingos. "Os Jesuítas e o ensino das Matemáticas em Portugal." <u>Brotéria</u> XX ((3º) 1935): 189-205.

Monteiro, Ignatio. <u>Philosophia Libera seu Eclectica Rationalis et Mechanica Sensuum, ad studiosae juventutis institutionem accomodata</u>. Venetiis, 1766.

Monteyro, Ignacio. <u>Compendio dos Elementos de Mathematica</u>. 2 vols. Coimbra: Real Collegio das Artes, 1754-56.

Rosendo, Ana Isabel. <u>Inácio Monteiro eo Ensino da Matemática em Portugal no séc. XVIII</u>, Tese de Mestrado, Braga, 1996.

Silva, Lúcio Craveiro da. "Inácio Monteiro. Significado da sua vida e da sua obra." <u>Revista Portuguesa de Filosofia</u> XXIX ((3º) 1973): 229-266.

LIGAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA PURA E A MATEMÁTICA APLICADA DE ANTIGUIDADE ATE AOS NOSSOS DIAS

Gorban Anatoli, Universidade Eduardo Mondlane, Moçambique

No inicio este relatório foi pensado como a sistematização dos factos históricos que provam a coexistência mutuamente vantajosa da Matemática Pura e da Matemática Aplicada, que até ao início do nosso século mais correctamente seria necessário chamar Matemática Desinteressada e Matemática Prática. Mas no processo de trabalho surgiu a ideia de usar este tema como o pretexto para expor a minha visão do uso da História de Matemática no processo do ensino e apresentar a minha experiência nesta área . Tentava evitar a citação dos factos bem conhecidos, mas como o nosso saber não aparece de nada e é o produto de toda a civilização aceito que nem tudo no meu relatório é original.

Introdução

Uma das características mais importantes da sociedade civilizada é que a educação propõe aos alunos mais matérias do que é necessário para sobreviver. Isto justifica-se pela necessidade de estar preparados para os desafios de natureza física e social possíveis no futuro. Mas a realização deste principio na escola sempre tem encontrado grandes dificuldades. De tempos antigos até hoje a escola para a maioria dos alunos é uma espécie do castigo divino. Sob a pressão de pais e da sociedade que obriga toda a gente receber um certa porção da instrução escolar o estudo torna-se para os alunos pelo menos uma obrigação laboriosa, um mal inevitável. Enganam-se aqueles que pensam que isto é justo apenas para maus alunos. História dá-nos muitos testemunhos de grandes homens que recordavam com horror os seus anos escolares.

Claro que a situação na escola moderna é incomparável com a da época de Santo Agostinho. A partir de Comenius e Pestalozzi os pedagogos fizeram os esforços imensos para melhorar o ensino em geral e o ensino da matemática em particular. Que lugar ocupa nesta actividade a história de matemática? É opinião comum que a gente precisa saber a história do mundo para não cometer no futuro os erros cometidos no passado. Em que sentido pode ser útil a história de Matemática para os alunos da escola secundária, para os estudantes da escola superior? Neste relatório nós tentamos expor a nossa opinião sobre este assunto que se baseia em primeiro lugar na nossa própria experiência.

Aspecto ambiental

Biografias de grandes homens que fizeram a história testemunham que o seu caminho aos cúmulos do poder ou fama científica foram inseparáveis do ambiente em que eles viveram. Deixamos ao lado os generais e ditadores que floresceram no solo das revoluções sociais e analisemos em que solo cresceram os génios científicos. Não é de estranhar que este solo na maioria dos casos era favorável. Os cientistas futuros da idade tenra tiveram o acesso às bibliotecas dos seu pais, escutaram as discussões científica dos adultos, preparavam-se psicologicamente a uma carreira científica. A maioria de nossos alunos não tem estas possibilidades, mas nós também não temos a tarefa de educar os génios. A tarefa é mais modesta, dar aos alunos os conhecimentos básicos dos níveis que dependem do tipo do ensino e tornar o processo do ensino mais efectivo. E aqui surge o problema do interesse onde a história de matemática pode dizer a sua palavra.

Problema do interesse

Ate o fim do século passado os pedagogos preocupavam-se pouco se é interessante para os alunos aquela matéria que leccionam. Os professores cumpriram a encomenda social, sendo contentores do conhecimento transmitiram este conhecimento para os alunos, o método didáctico principal era a memorização e o único estimulo que poderia encorajar a actividade dos alunos era a punição física. A vida mais atraente dos alunos descreveu pela primeira vez no seu livro *Cidade do Sol* Tomasso Campanella. Nesta cidade os alunos estudam com a grande vontade, porque o estudo é uma espécie de jogo. Mas foi necessário mais que trezentos anos para que a gente reconheça a importância do interesse na pedagogia. A partir da escola de Leão Tolstoy, Yasnaya Polyana, a pedagogia pouco a pouco aproximava-se da formulação explícita do interesse como o factor principal no estudo pelo pedagogo norte-americano Dewey. Neste sentido podemos falar sobre as possibilidades que proporciona a história de matemática para provocar o interesse dos alunos para o estudo da própria Matemática. Nós destacamos aqui dois aspectos do interesse: prático restrito e interesse ideológico.

Interesse prático restrito

Toda a gente, mesmo muito remota da matemática, sem poder frequentemente expressar a ideia na forma explícita, reconhece a importância de Matemática para a sociedade moderna com a sua tecnologia sofisticada. Mas como persuadir o aluno na importância de saber a demonstração do facto que não existe um numero racional cujo quadrado seja igual a dois. Como justificar a necessidade de números irracionais quando a partir de Steiniz, que deu as aplicações brilhantes da Matemática nas Engenharias, até agora a maioria dos engenheiros limitam-se ao uso de números racionais? Achamos que não vale a pena e é mesmo impossível explicar aos alunos com os pormenores o uso de Matemática na prática, mas a história da matemática apresenta-nos muitos exemplos desta aplicação. Entre as mais impressionantes aplicações da Matemática é o cálculo, acentuamos o cálculo, e não a medição do perímetro do globo terrestre, por Eratóstenes. E o que é mais importante no método de Eratóstenes pode ser entendido por alunos já na etapa inicial do estudo da geometria. Alem de utilidade prática da Matemática o método de Eratóstenes também destaca a importância da demonstração geométrica para justificar a veracidade do resultado que não pode ser provado pela medição. Mais tarde os alunos vão conhecer como os astrónomos calcularam a distância até às estrelas e planetas e estamos lamentando que esta informação os alunos recebem de professores da física e astronomia e os professores da Matemática não encontram o tempo para tratar destes problemas limitando-se pela resolução dos exercícios formais.

A escola superior apresenta possibilidades muito mais vastas para o uso da história de Matemática. E aqui surge o problema da relação entre a Matemática Pura e Matemática Aplicada. O ponto de vista mais moderna na Matemática é que uma boa Matemática sempre é aplicável. Claro que a aplicação pode ser não imediata e indirecta e na maioria dos casos os próprios matemáticos tem poucas ideias sobre a aplicação das suas teorias.

Infelizmente são os mesmos matemáticos que escrevem os manuais para a escola superior e criam a impressão perversa dos alunos sobre as vias históricas do desenvolvimento da Matemática. A matéria apresenta-se de tal modo que a teoria foi desenvolvida do interesse puro dos matemáticos e alguns exemplos da aplicação são nada mais que os curiosidades quando na realidade tudo foi ao contrario.

Como um dos exemplos de tal injustiça posso citar a equação de Bernoulli. Eu aprendi esta equação e o método de Bernoulli da sua resolução como todos nós na universidade. Quando tornei-me professor eu ensinava os meus alunos resolver esta equação destacando em primeiro lugar a ideia simples mas produtiva do Bernoulli. Mas para mim, e claro, para os meus alunos, e agora ouso afirmar que para os meus professores também, esta equação era nada mais que um dos poucos tipos de equações diferenciais da primeira ordem resolvidas em quadraturas. Mais tarde os meus interesses científicos na teoria de elasticidade levaram-me às origens desta teoria e tornou-se claro que a intenção de Bernoulli não era agradar os professores da matemática com mais um tipo de equação diferencial resolvido em quadraturas. Bernoulli encontrou esta equação ao resolver o problema da flexão de uma barra fixada numa das extremidades sob a acção do seu próprio peso e uma carga. Este problema foi colocado ainda por Galileu que não conseguiu resolvê-lo por razões mecânicas e matemáticas. De um lado Galileu não sabia a relação entre a tensão e a deformação dada oitenta anos depois por Hook e por outro lado não dispunha do calculo de infinitésimos desenvolvido por Newton e Leibnitz na mesma altura que a lei de Hook. Sem dúvida quando Newton disse que ele conseguiu algo na ciência porque estava nos ombros dos gigantes, ele tinha em vista Galileu entre outros.

O meu conhecimento da teoria da elasticidade mudou radicalmente a minha atitude quanto ao ensino de matemática. Antes eu aborrecia os meus estudantes de Engenharia obrigando-os a calcular as coordenadas dos centros de gravidade de figuras diferentes por meio de integrais múltiplos, considerando este cálculo apenas como um dos métodos do treino dos alunos no cálculo dos próprios integrais. Apesar de saber que os estudantes vão precisar desta matéria na cadeira de Resistência de Materiais, nada mais eu poderia dizer aos meus estudantes. Agora eu posso dizer muito mais tanto aos meus estudantes de Engenharia como aos estudantes matemáticos. No curso de Cálculo das Variações apresento aos estudantes as equações de Euler-Lagrange não apenas como a redução sofisticada do problema das variações a equação diferencial, mas como o ponto final dos esforços de Euler e de Lagrange na resolução dos problemas práticos, que nós denominamos hoje a Matemática Aplicada. Euler resolvia o problema do eixo neutral na barra sob a acção do próprio peso e duma carga aplicada numa das extremidades, outra extremidade sendo fixa, como no problema do Bernoulli. Como foi conhecido de observações, uma parte de barra carregada sofre a extensão, outra a contracção. As investigações de Euler mostraram que o eixo neutral passa pelo centro de gravidade da secção transversal da barra, o que justifica as minhas exigências que os estudantes de Engenharias saibam calcular as coordenadas do centro de gravidade. Por outro lado, deduzindo as equações de Euler-Lagrange para os estudantes matemáticos, eu acho que não gasto em vão o tempo contando as histórias das circunstâncias em que foram obtidas estas equações. Se tomar em vista que Lagrange resolveu o problema inverso sobre a secção transversal óptima que suporta a carga dada, esta história pode ser usada não apenas no curso de Cálculo diferencial (condições aos extremos de funções de várias variáveis, método de Lagrange), mas também na introdução à teoria de optimização.

Todos estes incursões na história de Matemática tem como seu objectivo não apenas restabelecer a justiça histórica, mas desempenham um papel didáctico muito importante. Todos os pedagogos sabem que durante a aula é necessário mudar as formas do trabalho. Esta necessidade baseia-se na fisiologia do trabalho em geral e do trabalho intelectual em primeiro lugar. O trabalho monótono leva a depressão dos centros nervosos no cérebro responsáveis pela actividade exercida, o que se manifesta como o cansaço e queda da produtividade. Por outro lado a passagem ao outro tipo de trabalho exige um certo tempo para ajustar o sistema nervoso a nova actividade. Os pedagogos experientes apanham no momento próprio o tempo quando é necessário de mudar a actividade dos alunos e, como regra, preenchem os intervalos necessários por anedotas. Acho que o efeito maior para este objectivo pode ser dado pelas incursões históricas. Tanto mais que a informação histórica pode ser exigida dos alunos no processo de avaliação, o que não se pode dizer sobre as anedotas.

Eu defendi a minha tese de doutoramento na Matemática aplicada e sempre tinha por um lado os sentimentos de inferioridade perante os meus colegas que fizeram as investigações na matemática pura e por outro lado os sentimentos de superioridade porque a maioria de matemáticos puros tem nenhumas ideias sobre a aplicação prática da matemática. Para aplicar a matemática é necessário saber alem de matemática, ainda a área de aplicação, mas isto não entra nos currículos de matemáticos. Nós preparamos a abertura de licenciatura em Matemática na Universidade Eduardo Mondlane em 1997 e eu apliquei muitos esforços para introduzir no currículo um curso pequeno de Mecânica. Não consegui mais. Os meus colegas, educados nas tradições soberbas de Análise funcional, viram nas minhas intenções nada mais que um desentendimento.

Neste contexto acho que será interessante saber o atitude de clássicos para a aplicação de Matemática. Já sabemos a força motriz das investigações de Lagrange e de Euler. Alguém pode dizer que isto é apenas a manifestação de tendências mecanicistas no século XVIII, quando os cientistas impressionados pelos descobrimentos das leis de Mecânica e do Cálculo diferencial e integral tentaram explicar todos os fenómenos da natureza e mesmo da sociedade por meio de mecânica e matemática. Mas tal juízo baseia-se exclusivamente na nossa ignorância na história de matemática. Foi Cauchy que colocou a análise matemática na base teórica firme, fundou a teoria das funções complexas e parece que é um dos representantes da corrente pura na Matemática. Mas ao mesmo tempo Cauchy fundou a teoria matemática da elasticidade, aplicou as funções analíticas na hidrodinâmica. Nalguns manuais da teoria de funções de variável complexa os autores mencionam os exemplos da aplicação desta teoria na hidrodinâmica e electrostática, mas fica fora da consciência dos estudantes que esta teoria matemática surgiu em consequência da modelação matemática dos processos eléctricos e da hidrodinâmica. Não vale a pena discutir quem foi primeiro, o ovo ou a galinha, mas os estudantes devem saber a verdade histórica.

Podemos continuar este lista de matemáticos do século XIX, que são conhecidos para nós apenas por seus teoremas de análise matemática. E poucos sabem sob quais circunstâncias foram obtidos estes teoremas. Investigando a história da teoria da elasticidade eu descobri que a maioria dos grandes da Matemática trabalharam e contribuiram muito para esta teoria enriquecendo a própria Matemática. Basta citar os nomes de Poisson, Lamé, Stoks, Green, Chesaro, Volterra. Para a maioria dos matemáticos do século XIX não existia a divisão da matemática em pura e aplicada . O mesmo é justo para os séculos anteriores. Podemos falar somente sobre o saber prático do Oriente antigo e o saber desinteressado da Grécia antiga.

Carácter desinteressado da matemática na Grécia Antiga teve tanto consequências positivas, como negativas. Por um lado os gregos inventaram a demonstração dedutiva na geometria e fundaram as ciências modernas. Por outro lado sem a força viva da prática não conseguiram sair dos limites da Geometria e criar a Álgebra. Neste sentido é muito sintomático o exemplo de Hipócrates, que segundo Arquimedes, a partir de perímetros e áreas dos polígonos inscritos e circunscritos descobriu que os perímetros de circunferências são proporcionais aos raios e as áreas são proporcionais aos quadrados dos raios.

Parece que nada é mais fácil do que fazer o passo seguinte, calcular o perímetro e a área do circulo unitário e encontrar as fórmulas do perímetro e da área do círculo arbitrário. Mas Hipócrates não fez este passo porque não precisava destas fórmulas, para o aristocrata grego a simples ideia de aplicação de Matemática na prática já era um insulto. E os gregos perdoaram Arquimedes pelo seu descobrimento destas fórmulas só por causa de que o seu amigo, rei de Siracusa, pediu a sua ajuda na defesa da cidade.

Ideias parecidas surgiram no início do nosso século depois da crise na Matemática provocada pela teoria de conjuntos de Cantor e os paradoxos desta teoria. A Matemática tornou-se realmente pura quando os matemáticos começaram a operar já não com grandezas e operações matemáticos sobre elas, mas com as proposições e relações lógicas sobre estas proposições. Como disse a propósito Bertrand Russel "Matemáticos nunca sabem sobre que falam e se é a verdade o que dizem".

Alem de lógica matemática e teoria de conjuntos, a álgebra moderna também contribuiu muito na separação da matemática em pura e aplicada. O mesmo podemos dizer sobre a análise funcional criada no início por Hilbert e Poincaré para dar a base teórica firme à física matemática mas com decorrer do tempo transformou-se em um dos ramos da Matemática. Mas paralelamente com este processo da subida da matemática para o Céu, na Terra surgiram novos ramos da matemática aplicada como Programação Linear, Investigação Operacional e outras, sem falar sobre as ciências computacionais. Como último tempo observe-se a tendência não apenas de Matemática Aplicada procurar a aparelho de Matemática Pura para a resolução dos seus problemas, mas também a Matemática Pura procura a realização das suas construções nas camadas inferiores de si própria ou na Matemática Aplicada. Entre a maioria dos matemáticos estabeleceu-se a opinião que qualquer teoria tem direito a vida se ela encontra a sua realização nalguns modelos, mesmo matemáticos, mas bem provados.

É parecida com a situação que surgiu na Matemática do século passado depois do descobrimento da Geometria de Lobachevski que foi reconhecida apenas graças as interpretações de Beltrami-Klein na Matemática e uso, ouso dizer, prático na teoria de relatividade.

Interesse ideológico

Depois de nós escolhermos o nosso caminho na vida vale a pena lembrar quantas dúvidas e irritações custou a nossa escolha. Esta pergunta dolorosa, segundo que padrões fazer a sua vida, quem escolher para a imitação, fica perante cada jovem. E uma das tarefas do pedagogo é abrir os olhos dos estudantes à história em geral e à vida dos matemáticos. Segundo as investigações sociológicas, a nossa atitude perante a vida determina-se não pela própria experiência, mas pela opinião comum que prevalece na sociedade. Este fenómeno é bem conhecido para os organizadores de campanhas eleitorais, mas pode ser usado na pedagogia também para a formação de atitude dos alunos para a Matemática. Na vida dura quotidiana, quando o homem trava a luta incessante para sobreviver ou para atingir ou manter um certo nível da vida, ele precisa o apoio psicológico nesta luta. Esta necessidade, nos níveis diferentes da sociedade satisfaz-se pela religião, pela imagem divina da família real, pela imagem idealizada dos líderes nacionais, pela autoridade do poder estatal, pelos líderes de grupos a que pertence a pessoa. Acho que os professores de matemática não devem desprezar a necessidade natural dos seus alunos em padrões de comportamento e de orientação na vida, tanto mais que na juventude esta necessidade é mais aguda do que na idade madura.

Então, a minha ideia é criar na matemática os seus próprios ídolos. Isto não exige dos professores grandes esforços, porque tais ídolos já existem. Quem não conhece Isaac Newton, Albert Einstein e outros, cujos nomes são mencionados nas páginas de livros, revistas, jornais, sob vários pretextos. A tarefa do professor é apenas fomentar o interesse dos alunos por estes homens proporcionando as porções da informação sobre os grandes matemáticos aceitável para a idade dos alunos. Assim, no processo do desenvolvimento, o aluno recebe cada vez a informação mais complicada e cria a imagem mais completa do matemático e do seu lugar na história da matemática. A aula de matemática apresenta o lugar ideal para este tipo de trabalho e não aproveitar esta oportunidade é imperdoável para o professor. Mass medias para criar a imagem atractivo do líder político durante o curto tempo da campanha eleitoral precisam grandes investimentos, mas o professor é praticamente ilimitado no tempo e sem investimentos suplementares, de aula em aula pode criar nos alunos a imagem do matemático digno de imitação. Basta nos intervalos entre dois tipos de actividade encontrar o pretexto para comunicar aos alunos algum facto da vida do matemático, algum resultado dele, alguma história ligada com este resultado.

Infelizmente os autores dos manuais escolares e universitários prestam pouca atenção ao aspecto histórico da matéria apresentada. Só poucos teoremas estão relacionados com os seus autores, quase nada se diz sobre as circunstâncias em que foi obtido este resultado, que problemas investigaram os matemáticos que levaram a este resultado. Existe a opinião geral que na matemática todos os teoremas já estão provados, que só os grandes, uma espécie de santos, poderiam dizer uma palavra nova na Matemática. Não é culpa dos autores de manuais, que apresentam a Matemática como uma avenida directa com os prédios bem arranjados, tal deve ser o manual. Mas é a tarefa do professor na aula dum lado explicar aos alunos toda a perfeição destes prédios e desculpar os seus autores e de outro lado mostrar que os arquitectos destes prédios foram longe de ser santos. O professor pode chamar a atenção dos alunos para que alguns dos prédios na avenida de Matemática ainda não estão prontos, alguns têm defeitos, e mesmo na própria rua há buracos que é necessário liquidar. E os próprios alunos podem participar neste trabalho se aprenderem melhor a usar o aparelho matemático mais sofisticado.

Nas minhas aulas, quando um estudante manifesta a sua ignorância em alguma matéria, eu frequentemente digo: " Escuta, Newton na idade de 24 anos inventou o calculo integral e diferencial, e tinha encontrado o primeiro livro de matemática na idade de 20 anos. Tu estudas a matemática já mais que dez anos, estás quase na mesma idade que Newton na época da sua invenção e não podes calcular aquele integral miserável?" Não sei se isto sempre é justo em relação ao estudante culpado, mas acho que para os seus colegas tal excursão na história não passa sem efeito.

Quanto ao uso de textos históricos de matemática eu sou pessimista. A natureza do saber matemático é tal que passam em média trinta anos antes de que, graças aos esforços da muita gente deste saber, se sparar a matéria realmente nova e válida. Passam-se ainda mais alguns anos na procura de forma em que este saber pode ser introduzido nos manuais escolares. Pode ser que para os estudantes seja interessante saber sobre este processo de palavras do professor, mas é demasiado sobrecarregá-los com a matéria desnecessária. Neste contexto é notável o exemplo do sistema de coordenadas que nós chamamos cartesiano. Imagino que decepção aguarda o nosso aluno quando na *Geometria* de Descartes ele não encontrar tais familiares eixos OX e OY.

Mas isto não exclui o uso de textos originais nas actividades fora de aula, tais como as conferências matemáticas etc. Por outro lado o texto histórico não deve ser obrigatoriamente um papirus egípcio. O livro de Poincaré ou de qualquer outro dos grandes, que não foram alheios à popularização da Matemática e pertencem a história não tão remota, pode ser usado pelo professor para os fins ideológicos acima citados.

A HISTORICAL APPROACH TO DEVELOPING THE CULTURAL SIGNIFICANCE OF MATHEMATICS AMONGST FIRST YEAR PRESERVICE PRIMARY SCHOOL TEACHERS

Ian Isaacs, V. Mohan Ram, Ann Richards
Northern Territory University

Background

Most of the students who enter the three year course for the preparation of primary teachers at the Northern Territory University (NTU) have a restricted background in the content of secondary school mathematics and a mechanistic and utilitarian perception of the subject. Generally they believe that mathematics is (i) mainly concerned with facilitating the buying and selling of goods; (ii) the subject in which there is one best method to getting right answers; and(iii) that the branches of algebra and geometry have no significance for everday living .

In 1995 the new Batchelor of Teaching course provided the mathematics education lecturers at the NTU with the opportunity to introduce a unit spanning two semesters which we entitled *The Cultural Orgins of Mathematics* . We hoped that this unit would give the students a broader perspective on the place of mathematics in the cultures of different societies over the last 5000 or so years and as a response to the physical and intellectual problems of those cultures which led to the development of the subject as we know it today .

In this unit we aimed to modify the belief systems and perceptions of these student-teachers about the nature of mathematics and the purpose of school mathematics. To set the scene for the geometrical ideas we wanted to develop we focused on how the various societies from China, India, Egypt and Greece dealt with geometrical concepts and notions in their practical and intellectual life.

We explored : (i) *geometry as a practical science used to solve real problems,*
(ii) *geometry as a constructive and aesthetic medium where patterns,transformations and geometrical relationships predominate,*
(iii) *the ritualistic requirements for accurate constructions,*
(iv) *measurement as an introduction to numbers which are not rational,* and
(v) *logical justifications in geometry.*

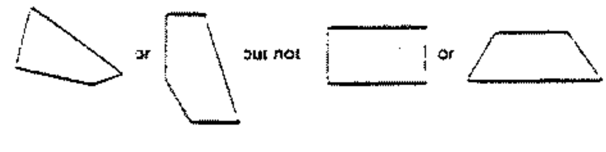
(i) Geometry as a practical science used to solve real problems

Our students were made aware of the problem the Egyptians and Chinese faced to determine the areas of irregular shaped polygons. The students were set the task [see Figure 1] to estimate the lengths of the sides and the area of an irregular quadrilateral or pentagon on the lawns near their lecture hall using only pacing.

Activity 1

Your task is to carry out a survey of a region which has at least four straight boundaries and is not a rectangle or other simple geometric shape.

e.g.



Your initial unit of measurement is to be paces, and these need to be maintained at an even length to ensure accuracy. You need to choose a recorder and a pacer and preferably check all your measurements using a second pacer from your group.

In your group you will need to:

(1) Identify your region. This should not be too small - aim for all distances to measure in the range, say, 30 - 60 paces.
(2) Draw a rough sketch of your area labelling the vertices.
(3) Measure all distances by pacing.
** Remember to triangulate - ie measure certain diagonals within your polygonal region so that this can be marked as composed of triangles whose dimensions have been measured.
(4) Record all measurements appropriately on your sketch.
(5) Have your pacer walk the marked 20 metre length to find how many of his/her paces are equivalent to 20 metres.

Back inside

(6) Convert all your measurements to metres and record.
(7) Using the grid paper provided, decide on a scale which will allow you to convert your metre measurements to scaled values to provide a plan of your area which will occupy most of the page.
(8) Use the available equipment to construct an accurate plan of your region on paper or in your book.

Note: The calculation of you area will be set at a later date.

Extension - for Week 3/4

Use your plan to carry out the calculation of the area of your region. Your final value should be actual area in square meters (m^2)

Possible Methods

(1) Consider the region as comprised of triangles and find the area of each triangle (accurately) and total these areas.
(2) Using the scale diagram of your polygonal area, construct a triangle with the same area using the method of reducing the number of sides (Week 3).
Find the area of the resulting single triangle.

Figure 1 Task to estimate the area of a quadrilateral/pentagon

They were then expected to check their estimates against those of their colleagues by converting their paces to standard metric measures Subsequently the use of a scale drawing and historical methods of working with polygon areas were used to allow an area calculation. One method considered was the construction problem (which was solved by the Chinese and the Greeks) of transforming an irregular polygon into a rectangle or triangle of equal area. From this exercise it was natural to look at more sophisticated techniques used in China and the West in the Middle Ages to carry out land surveys.

(ii) Geometry as a constructive and aesthetic medium where patterns, transformations and geometrical relationships predominate.

Rather than follow the traditional approach of using geometry as an introduction to deductive proof we focused on the Islamic use of geometrical patterns for decorations such as those shown in El-Said and Parman's *Geometric Concepts in Islamic Art* and in slides taken by V. Mohan-Ram in Pakistan . The students were then encouraged to construct designs (see Figure2) based on these patterns.

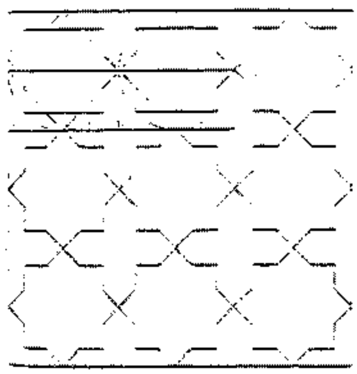


Figure 2 Design of Tiling Pattern seen in the Iran Bastan Museum [after El-Said,pg.13]

In this way we were able to involve the students in identifying in their surroundings symmetric patterns as well as and designing their own patterns. They were led to reflect on the symmetrical properties and isometric transformations of simple regular polygons. These activities served as a forerunner for our study of group structures which were taken up in semester 2.

(iii) The ritualistic requirements for accurate constructions

The construction of various shapes used in religious and occult practices such as the pentagon [see Figure 3] for Western rituals and

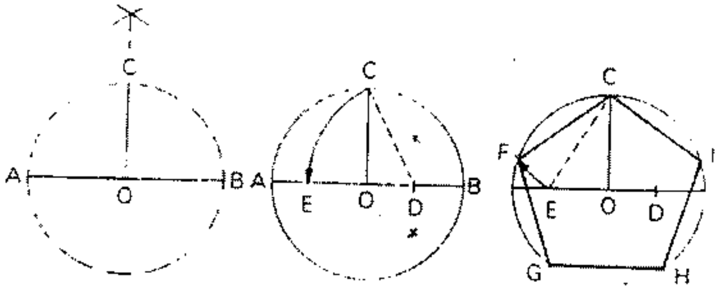


Figure 3 Construction of the regular pentagon

the determination of the dimensions of the trapezium [see Figure 4] in Hindu altars were either set as group tasks for the students to solve or demonstrated by the lecturer.

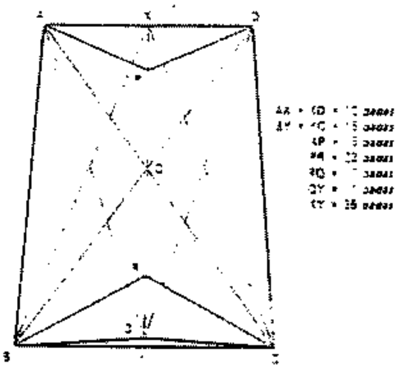


Figure 4 The layout of a *samassana sacrificial* altar [after Joseph(1990), pg 230]

For most rituals to work it was necessary that the dimensions of the structures were exact. If they were not then they would be imperfect and as a result be deemed to be impure. We suggested that this need for perfection probably motivated the Hindus and Chinese mathematicians initially to develop algorithms for accurately constructing basic polygons. However some mathematicians went beyond just satisfying the ritualistic requirements of their religions and developed algorithms for solving construction problems of no immediate practical value.

For example Hindu mathematicians posed, and solved, the problem of how to construct a square equal in area to that of the sum of two other squares. Our students were asked to suggest how this could be done if the two squares had areas of 2 cm^2 and 9 cm^2. This problem is very similar to that described by Joseph(1990, p.230) in*The Crest of the Peacock.* We used this problem as one of the examples to contrast the practical algorithmic problem solving approach of the Chinese and Hindu mathematicians to the theoretical deductive approach of the Greek mathematicians.

(iv) Measurement as an introduction to numbers which are not rational.

The construction of squares whose sides were not rational numbers was a challenging task for most of our students. Rather than solve the problem posed by Socrates in Plato's *Meno* of constructing a square of area twice that of 4 square units we modified the problem to finding the area of a square of area of half of 4 cm^2 (see Figure 5). For most of the students it was now a much easier task to construct

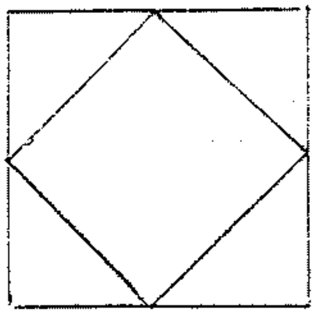


Figure 5: Constructing a square of area 2 cm^2 given a square of area 4 cm^2

a square of area 8 cm^2. This naturally led us to try to determine the square root of numbers like 2 and 8. The students attempted it in three ways: (i) by measuring the side of a square of area 2 cm^2 ; (ii) by sketching; using the geometrical approach of Apastamba in his *Sulbasutra* [see Joseph(1990), pp 234-236); and (iii) by using trial-and-error with a calculator. These explorations led us to the concept of an irrational number. However this type of number was not fully explored at this time, but left to the second semester when it was reexamined as part of the study of "Numbers".

The study of areas of polygons led us to consider the areas of reqular polygons and the areas of circles. We adopted the conjecture of Gerdes (1985) regarding the *snake curve* (see Figure 6) constructed from a string as a task the students could perform to arrive at the Egyptian approximation for π (= $4(8/9)^2$).

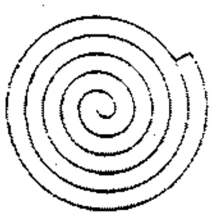


Figure 6: The *Snake Curve* [after Gerdes (1985) pg 262]

The students next attempted to determine the value of π by calculating the ratio of the circumference to the diameter of selected circular discs of diameter 3.5cm, 7.0cm, 10.5cm and 14.0 cm. We then went on to look at Archimedes' method of " exhausting" the circle by considering the perimeters of 6 and 12 sided regular polygons inscribed in a circle as an approximate measure of the circumference of the circle. We also mentioned the Chinese value of π (= 355/113) as determined by Tsu [Joseph(1990), p.195]. Once again we were brought into contact with a number which seemed to be not rational. We posed the question is it a number like the square root of 2 or is it a new sort of number? We made no attempt to answer the question at this point but promised to come back to it in the following semester.

(v) Logical justifications in geometry.

The lecturers, however, did not evade the need for general proofs when we felt they were necessary. For example the Chinese proof (see Figure 7) based on decomposing the square of side (a+b) was modified (see Figure 8) to show that Pythagoras' theorem is true (see Joseph(1990), pp 180-181).

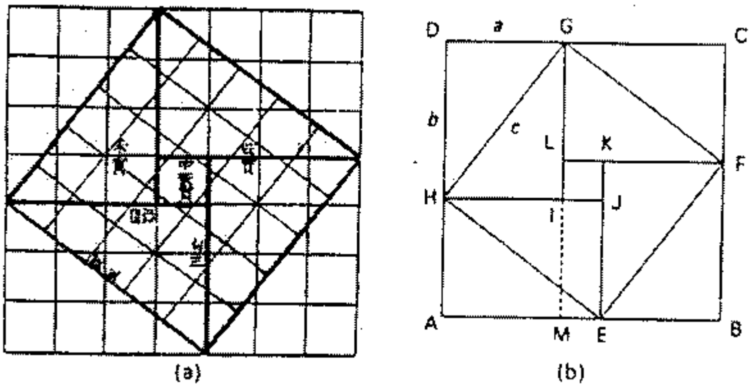


Figure 7 (a) The *kou ku* theorem and (b) the modern 'translation'

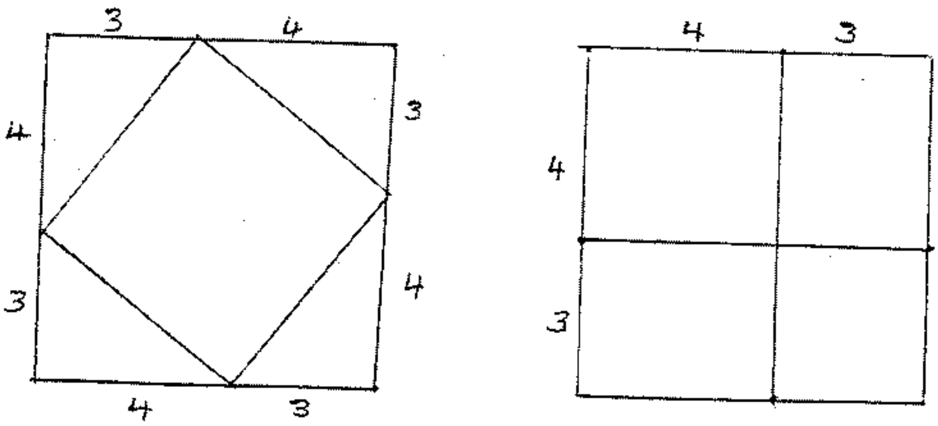


Figure 8 The modified version discussed with the students

Students' Initial Reactions To The Unit

The students were required to keep a Journal in which they recorded

(i) their attempts at the tasks set as class activities and extensions of these class activities; (ii) their perceptions and reactions to the lectures and tasks, and (iii) their reflections on the nature of mathematics and its relevance to them.

At the end of the semester we asked the students to give us their opinions on the unit using a Likert style questionnaire (see Appendix 1). In particular we were interested in (i) their current beliefs about the nature of mathematics as compared with those at the start of this unit, and (ii) their views about the significance of mathematics in solving quantitative problems in ancient societies.

At the start of the unit and during the development of the unit (as students became more confident in expressing their opinions) many students (about a third) expressed in their journals their concern at the apparent lack of relevance of the content and activities to their future role as primary teachers. Typical of this group is the following journal entry made in the first four weeks of the course:

> Although I find this information/History interesting it usually tends to confuse me. I also have difficulty relating it to current mathematics. How is it relevant to primary school maths?

Others commented on the difference between this mathematics and the mathematics they had done in school. As one student put it,

> I have never been taught maths in this way before, rather I have always been given a set of problems and been told to solve them, which has made maths a boring subject. Yet when faced with an answer, question, and the history behind a particular thing it makes further questions easier to handle and I found it stays ingrained in the memory better.

The remaining students, about 33%, did not make any direct comments about the nature of the mathematics explored in this course. They were either non-commital or they made vague brief statements such as, "it was interesting" or "it is confusing".

At the end of the semester 35% agreed that "the unit seemed unrelated to the mathematics I will need to teach in primary schools", 23% were undecided whether to agree or disagree and 42% disagreed with the statement. A majority (57%) felt that the unit had helped them to change their attitude towards mathematics. However a significant minority (25%) were undecided and the remaining respondents (18%) disagreed.

Conclusion

Only one student (and a very able one at that) was capable of expressing a view congruent with that of the lecturers; she wrote:

> I perceive this unit as giving students the opportunity to enhance their existing mathematical skills. Which in time, will enable them

to construct a more reflective attitude towards teaching a subject that has been traditionally seen as requiring genius mentality.

Three common myths associated with Mathematics have been based on the Genius Mentality, that mathematics has nothing or very little to do with reality (life) and that you have to do everything mentally and fast and if you cannot then you are obviously not mathematical. This unit has worked towards discrediting these myths. ...It also dispelled the myth that mathematics is a purely Western Phenomena, it has given credit to the cultures that have originated the concepts which were prompted by their life styles.

Another contributing aspect of this unit has been the opportunity the students have experienced in setting their own problems ...[it has] given many students the opportunity to experience success as they have dictated the problems to match them. ...

As an introductory unit for a universal subject, it has been my pleasure to have witnessed the "beauty" of Mathematics in Action.

The lecturers concluded that, for the majority of students, they still had some convincing to do. They recognised that, at the start of the second semester, they would again have to emphasise the need for teachers to have a broader and deeper view of the subject than their pupils. They also determined to explicitly link the topic of 'Numbers and Numeration' to primary school arithmetic.

References

El-Said, Issam and Ayse Parman. (1976) *Geometric Concepts in Islamic Art.* Palo Alto, Ca.: Dale Seymour Publications.

Gerdes, Paulus. (1985) 'Three alternate methods of obtaining the ancient Egyptian formula for the area of a circle '. *Historia Mathematica* **12,** 261-268.

Joseph,George C. (1990) *The Crest of the Peacock::Non-European Roots of Mathematics.* London: Penguin Books.

Jowett, B.(1953) *The Dialogues of Plato: The Meno.* Oxford: The Clarendon Press

APPENDIX 1

EBT 154 CULTURAL ORIGINS of MATHEMATICS

Evaluation of the Unit

Your evaluation of this unit means much to us. We will appreciate your suggestions and comments on the various aspects of the unit as listed below. There are TWO sections in this evaluation form.
Please do not write your name on this evaluation form. Thank you.

Section 1: Circle one of the numbers to indicate the degree of your response.

Key: DA - Disagree, UnD - undecided, StA - strongly agree

R - rarely ST - some times MT - most of the times

A. The unit-	DA		UnD		StA
1. lived up to my expectation	1	2	3	4	5
2. assisted to change my attitude towards Maths	1	2	3	4	5
3. was well prepared and presented by Ian	1	2	3	4	5
4. was well prepared and presented by Ann	1	2	3	4	5
5. was well prepared and presented by V	1	2	3	4	5
6. created an environment in which I was able to learn a lot	1	2	3	4	5
7. had aims and objectives which were clear to me	1	2	3	4	5
8. seemed unrelated to the maths I will need to teach in primary schools	1	2	3	4	5
9. challenged me throughout the term		R	ST	MT	
10. held my interest throughout the term		R	ST	MT	

Section 2: GENERAL

Comment of the following and suggest what changes we should consider for the review of this unit and planning the Semester 2 unit.

1. Do you believe that you did sufficient work in this unit to benefit from it?

2. What changes in approach/assessment would you suggest?

3. What should we include/exclude when planning the semester 2 unit?

4. Would you have preferred two distinct sessions, one for tutorials and the other for lectures?

5. What aspect of the unit impressed you the most?

6. What aspect of the unit impressed you the least?

7. Any other comments.

A WINDOW ON THE WORLD OF MATHEMATICS, 1871:
Reminiscences of De Morgan -- a dramatic presentation

Gavin Hitchcock, University of Zimbabwe

Scene: *AUGUSTUS DE MORGAN* [1]*, in 1871, the last year of his life, aged 65, musing in an armchair.*

I think the most striking change in mathematics over my life-time has been the joyous assertion of logical freedom! Our laws --- whether of number, algebra or even geometry --- are not absolute, not logically necessary after all. There are new Geometries, new Algebras, to explore; new entities, such as Sir William Hamilton's quaternions and Professor Arthur Cayley's matrices, obeying quite remarkable laws. And the way to all this was opened, I think, by the gradual acceptance of the negative numbers, closely followed by the imaginary numbers, as mathematicians began to realize the relative meaning of the terms "possible" and "impossible" or, indeed, the terms "real" and "imaginary"! It is human tradition, drawing upon the resources of human imagination, which sets the limits on the field of operation, which erects the fences and draws the horizons. We must, of course, ensure that any proposed law is logically *permissible* --- that is, consistent with its fellows; but our structures are otherwise agreeably arbitrary, free creations of the human spirit, regulated by considerations of convenience and expediency (such as the principle of permanence), or by considerations of elegance or the desired applicability of the resulting theory.

This quality of freedom would have shocked the mathematicians of the last century. But they were nevertheless unconsciously preparing the way, as they were won over by the negative numbers and the imaginary numbers, and swept along by the exhilirating currents of symbolic Algebra and Analysis.

You know, I think the new vision of a pure, free mathematics really dawned on us in the year --- 1847 it was --- when I published my *Formal Logic* , and my friend George Boole[2] published his wonderful little book on *The Mathematical Analysis of Logic* . I remember both books were published on the very same day! I recognised the prophetic voice at once. He was just a common boy from Lincoln, who was forced to leave school before he was sixteen, and taught himself Greek, Latin and mathematics. He became a school teacher to support his parents, brothers and sister, and eventually opened his own school. He first made a name for himself when his essay won the Royal Society's gold medal; he ended up becoming a professor of mathematics at Queen's College in Cork, Ireland, and having a fine mathematical theory named after him! That's an honour few of us can hope for --- I would be proud to have one law named for De Morgan![3]

It all started when he got himself heavily involved in a controversy some of us were having over the nature of logic. Sir William Hamilton (not Sir William Rowan Hamilton, the Irish one;--- the *Scottish* one this time: he was a baronet and a philosopher) --- he claimed that logic was the business of philosophers. [*chuckles*] Well, Boole and I showed that it was *our* business --- not only can logic be used to increase the power of mathematical language in striking ways, but it can be treated as a branch of mathematics. We call it Mathematical Logic now, and the Algebra that Boole invented to be a kind of Calculus of Logic we now call Boolean Algebra! Some laws in this Algebra look very surprising at first; for example: [*writes*] $x.x=x$ for any x ; what's more, it has no negatives. Boole thoroughly developed his Algebra in his next book, *An Investigation of the Laws of Thought* , published seven years later, and no-one will ever again be able to define mathematics as the science of number and magnitude![4] Benjamin Pierce, the American mathematician, recently defined mathematics as *the science which draws necessary conclusions* . And Hermann Grassman, the German mathematician, calls it *the science of forms* . It's the science of formal systems of rules operating with symbols ... it can be about anything, or nothing, like music --- and it's just as beautiful!

Mathematics and logic ....these two have had a curious relationship! In spite of being bound together forever by Boole's revolution, hardly anyone besides Jevons and myself can claim to have worked in both disciplines; the mathematicians and logicians live in two camps aloof from each other. The mathematicians care no more for logic than logicians for mathematics. Here's the irony of it: the two eyes of exact science are mathematics and logic; Boole's genius taught us to see with both of them; but the mathematical sect puts out the logical eye, the logical sect puts out the mathematical eye; each believing that it sees better with one eye than two! No-one knows better than I how great is their loss; not only do I have one foot in each camp, but I am blind in one eye![5]

Boole died a few years ago; he would have been delighted with some recent events: it seems the Germans have finally discovered our Peacock, a decade after his death, and the Irish Hamilton too. What a transformation has taken place since our Cambridge Analytical Society set out bravely to rescue British mathematics from the doldrums! Here we are, leading the world in algebra half a century later! I suppose old Peacock should be given the credit for getting the thing started --- and Herschel and Babbage too; and then there was Robert Murphy, and Gregory, and of course Boole and myself.

And, I must say, the new generation promises to out-shine us; the line of great British algebraists continues with Cayley, Jevons and the brilliant young Clifford (my students, the last two); and of course Sylvester. I can't resist mentioning the part my old College at Cambridge has played: the illustrious line of Trinity men includes Peacock, Cayley and Clifford. Sylvester was a St.Johns man --- but do you know that the University would not give Sylvester a degree, on the grounds that he's Jewish? Nor could he teach at Cambridge ... That sort of thing makes my blood boil; I have refused all these years to allow my name to be posted for fellowship in the Royal Society, for similar reasons: fellows are supposed to be nominated on merit, but the process is too much open to social influences! At least they recognized Sylvester's genius --- when he was only twenty-five they elected him a fellow.

I had Sylvester join me at University College for a few years, then we lost him briefly to America, where (they say) a man is accepted for himself. But poor Sylvester (ever at war with the world) was attacked by one of his students --- yes! physically attacked! --- and felt constrained to take the earliest possible passage back to England. He then spent many years (like Cayley) in the wilderness of actuarial work and law. No-one would have guessed that these two were really great mathematicians in exile, strolling through the Courts of Lincoln's Inn deep in mathematical conversation --- together creating the beautiful theory of invariants! At last he became a Professor of mathematics again, in a military academy --- a post unworthy of him --- and he was forcibly retired last year.

[*sighs deeply*] Ah --- when will the great Universities of England honour such a man for his mathematical gifts, disregarding his birth and creed, and age?[6] My own convictions have seriously affected my mathematical profession twice --- at the beginning and at the end of my career. After thirty years' service as the first Professor of Mathematics at University College, I felt constrained to resign: the council refused to appoint a good man to the chair of logic and philosophy on sectarian grounds. As I wrote in my letter to the chairman of council: "It is not necessary for me to settle when I shall leave the college; for the college has left me." And long ago, I found myself, like Sylvester, ineligible for a fellowship at my own University of Cambridge, because I could not in all conscience sign certain theological articles considered necessary to proceed to the Masters Degree. I described myself as "Christian unattached." God knows I have striven to be true to the light I have been given! At the end of my life, I can look back and affirm that I would do the same again ... Lest anyone misunderstand my motives and I cause such a one to stumble, I have caused to be written in my will this article of faith: "I commend my future with hope and confidence to Almighty God; to God the Father of our Lord Jesus Christ, whom I believe in my heart to be Son of God but whom I have not confessed with my lips, because in my time such confession has always been the way up in the world."[7]

[*chuckles*] That will set a gaggle of tongues wagging! Well, now, where was I? Ah, yes --- those Germans! We may still be in front, but they have been running hard to catch up, and they've done some remarkable work. It seems that this Hermann Grassman[8] has proposed an abstract science of directed quantities in many dimensions. And Hankel has vindicated my suspicion that the "double algebra" of imaginary numbers constitutes the ultimate algebra in which the laws of arithmetic are preserved intact. No more general "arithmetical" algebra is possible! Peacock would like that! And my self-esteem is somewhat restored: it was not so very long ago that I refused to believe in triple or quadruple algebras of *any* kind. That was before Boole and Hamilton --- and now there are Grassman's algebras with exotic laws similar to Hamilton's quaternians and Cayley's matrices: multiplication depends on order; $x.y$ may not be equal to $y.x$. Ah! The mathematical menagerie has an inexhaustible store of surprises!

It is truly astounding, when one comes to reflect upon it, how great a degree of unanimity we mathematicians have achieved over previously contentious issues. Not that we don't still have our petty differences, but I believe it would have been generally admitted, by about the middle of this century, that the only subject yet remaining (of an elementary character), on which a serious schism existed among mathematicians, as to the absolute correctness or incorrectness of results, was the question of divergent series[9] . And even those monstrous creatures are rapidly becoming domesticated and their somewhat embarrassing uses regarded as legitimate.

What I said back in the forties about the way we should react to anomalies and embarrassments has been proved true in striking ways. The history of algebra shows us that nothing is more unsound than the rejection of any method which naturally arises, merely because of one or more apparently valid cases in which such a method leads to erroneous results. Such cases should indeed teach *caution* , but not *rejection*.. For if the latter had been preferred to the former, negative quantities, and still more, their square roots, would have been an effectual bar to the progress of algebra, and those immense fields over which even the rejectors of divergent series now roam without fear, would have been not so much as discovered, much less cultivated and settled[10] .

How singular, in retrospect, that the burning issue of the *reality* of negative numbers should have appeared a *logical* one, and turned out in the end as a victory, not for logic, but for the imagination! Babbage[11] saw it earlier than most of us in England, I think; and poor Peacock fought for the *logical* status of his Principle of Permanence, only to see it become a handmaid to the imagination! The realisation has dawned slowly, but is now clear to all of us: the moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination![12]

The great difficulty of the opponents of Algebra --- the so-called "pure arithmeticians"--- lay in a lack of ability or will to see *extension* of terms; to admit any use of symbols which outstrips the limits of absolute number. They would forbid all extension of language[13] , and so cut themselves off from one of the great creative forces of the imagination, which is operative in all poetry and great literature: to allow the words, the symbols, to carry one beyond oneself!

Perhaps this sect is extinct now. During the last century, its chief writers were Robert Simson, Francis Maseres and William Frend. So far as these opponents [of negative numbers and symbolic algebra] set out their objections, it is seen that there is much force in them against the mode of elementary writing then in vogue. Having been casually brought into contact with Mr Frend[14] in early life (he later became my father-in-law), at a time when I was engaged in examination of first principles, and having had many discussions with him, and been led thereby to an attentive examination of Maseres, Simson, and others, I long ago came to the conclusion that in those minds which are irresistibly led to a sweeping condemnation of almost everyone else, on matters of subjective nature, the bias is a craving for simplicity --- a craving which will, in the end, find a way of rejecting whatever cannot be immediately reduced to earliest axioms. A sadly common state of mind ... But I suspect that even those opponents played a useful part in the strange story of algebra --- by goading others to defend and analyse their own principles.[15]

A strange story indeed! --- where will algebra go in the future, I wonder? How will students of the next century be taught these ideas that have been forged in such creative fires of the human imagination? Will they simply take them for granted, unquestioning, unmoved by the triumphs of previous generations of mathematicians?

[EXIT with aid of walking stick]

---

[1] More about De Morgan and his writings can be found in his biography, written by his widow: Sophia Elizabeth De Morgan, *Memoir of Augustus De Morgan* , (London: Longmans, Green, 1882). See also H. Pycior, "Augustus De Morgans's algebraic work: the three stages," *Isis* , 74 (1983), pp.211-226; Ivor Gratton-Guinness, "An eye for method: Augustus De Morgan and mathematical education," *Paradigm* , no. 9 (December 1992), pp. 1-7; there are articles on him in the *Dictionary of Scientific Biography* and the *Encyclopaedia Britannica* .

[2] For an insight into the relationship between Boole and De Morgan, as well as a chronological list of De Morgan's papers and books, see: G. Smith (ed.), *The Boole-De Morgan correspondence 1842 -- 1864,* (Oxford: Clarendon Press, 1982). For an excellent biography of George Boole (1815 - 1864) see: Desmond MacHale, *George Boole: his life and work* , (Dublin: Boole Press, 1984). See also Eric Temple Bell: *Men of Mathematics* (New York: Simon & Schuster, 1937), and William Kneale: "Boole and the revival of logic," *Mind ,* Vol. 57, April 1948, pp.149-175.

[3] The name De Morgan is best known today for "De Morgan's Laws". As he originally gave them: "the contrary of an aggregate is the compound of the contraries of the components; the contrary of a compound is the aggregate of the contraries of the components." Augustus De Morgan, *Trans. Camb. Phil. Soc* .,10 (1858), pp. 173-230. In the notation of symbolic logic:

$$1-(x+y)=(1-x)(1-y) \text{ and } 1-xy=(1-x)+(1-y).$$

In the language of sets:

$$S - \bigcup_i A_i = \bigcap_i (S - A_i)$$
$$S - \bigcap_i A_i = \bigcup_i (S - A_i).$$

[4] George Boole, *An Investigation into the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* , 1854. (New York: Dover Publications, 1953); also as Vol.2 of *Logical Works* (La Salle, Ill.: Open Court Pub. Co., n.d.)

Bertrand Russell, the great twentieth century mathematician and philosopher (not normally given to exaggeration!), has ascribed to Boole the greatest discovery of the nineteenth century ---the discovery of "pure mathematics". Albert Einstein and Russell himself have each described memorably what this means:

Einstein : Insofar as mathematics speaks about reality it is not necessary [i.e. a logically necessary consequence of axioms], and insofar as it is necessary, it does not speak about reality.

Russell : Mathematics is the subject in which we do not know what we are talking about, nor whether what we are saying is true.

5 Augustus De Morgan, "Review of a book on Geometry," *The Athenaeum* (1868), Vol.2, pp.71-73. Boole and De Morgan derived mutual stimulus from each other, mutually acknowledged. De Morgan ascribed to "Dr. Boole's genius" the "most striking results ... in increasing the power of mathematical language," and the binding together of the "two great branches of exact science, Mathematics and Logic." Sophia De Morgan, *Memoir* , as in ref.1, p.167.

As to whether the mathematicians and logicians remain aloof from each other in the late twentieth century, here is an extract from the Preface to a popular text written, not only for intending logicians, but for mathematicians in general: "Every mathematician must know the conversation-stopping nature of the reply he gives to an enquiry by a non-mathematician about the nature of his business. For a logician in the company of mathematicians to admit his calling is to invite similarly blank looks, admissions of ignorance, and a change in the topic of conversation. The rift between mathematicians and the public is a difficulty which will always exist (though no opportunity should be missed of narrowing it), but the rift between logicians and other mathematicians is, in my view, unnecessary." A.G.Hamilton, *Logic for Mathematicians* (Cambridge: Cambridge University Press, 1978; revised 1988).

6 James Joseph Sylvester (1814 -- 1897) was given his degrees at last, *honoris causa* , when the offending prescription was revoked in 1871. As if to recompense this colourful mathematician for his protracted struggle, he came into his own in later life. He returned to America, where he took up a post at Johns Hopkins University (1876 -- 1884), played a major role in initiating pure mathematical research in the United States, and founded the American Journal of Mathematics. He finally became a Professor of Mathematics at Oxford University in 1884, holding the post until his death. For a fascinating account of the lives and work of Cayley and Sylvester, see Bell, *Men of Mathematics* , as in ref.2.
Sylvester, in a wry moment, once remarked that "they both lived as bachelors in London, but that Cayley had married and settled down to a quiet and peaceful life at Cambridge; whereas he had never married, and had been fighting the world all his days:" Alexander Macfarlane, *Lectures on Ten British Mathematicians* (New York: 1916), p.66. This work includes George Peacock among the ten.

[7] Some of the remarks of De Morgan on matters of conscience and principle are taken from James Roy Newman, "Commentary on Augustus De Morgan," in James Roy Newman, ed. *The World of Mathematics* , 4 vols. (New York: Simon & Schuster, 1956; paperback, 1962), pp. 2366-2368 (vol.4); this draws from articles on De Morgan in the *Dictionary of National Biography* and the *Encyclopaedia Britannica*..

[8] Hermann Gunther Grassman (1809 -- 1877) was a high school teacher at Stettin in Germany. He published his *Die lineale Ausdehnungslehre* (The Calculus of Extension) in 1844. It was not easy to read, and his novel ideas did not become widely known until some time after he published them in revised and simplified form in 1862.

[9] Augustus de Morgan, *Trans. Camb. Phil. Soc.* 8, Part II (1844), pp.182-203; pub. 1849.

[10] Augustus De Morgan, *The Differential and Integral Calculus* (London: Society for the Diffusion of Useful Knowledge, 1842), p.566.

[11] Charles Babbage, "On the influence of signs in Mathematical reasoning," *Proc. Camb Phil. Soc.*, c.1827. Babbage's espousal of the importance of *convenience* , over against logical necessity, in the framing of mathematical laws, is not surprising. He was an essentially practical man, devoting most of his life to the design and construction of a series of mechanical calculating machines, with the idea of aiding the production of mathematical tables. He resigned his chair at Cambridge, after 11 years as Lucasian Professor of Mathematics, in order to devote all his energies to his great project.
Although Babbage's work on his "difference machine" and his "analytic engine" did not reach satisfactory conclusion in his lifetime, due to severe financial and technical constraints, his prophetic vision and practical laying of the groundwork give us good reason to call him "Father of the Computer". Throughout his life, he demonstrated the importance and power of the application of pure science to the work-a-day world, and became heavily involved in the economic functioning of the Post Office, as well as the pin-making industry and the printing trade.

[12] The last assertion is quoted by Morris Kline in *Mathematics in Western Culture* (New York: Oxford University Press, 1953). The quote appears on page 170 of the Pelican edition.

[13] Up to this point the paragraph is drawn from Augustus De Morgan, "On Infinity and On the Sign of Equality," *Trans. Camb. Phil. Soc.* XI, Part 1 (1864), footnote on p.38.

[14] William Frend (1757 - 1841) was a Fellow of Jesus College, Cambridge, and was mathematics Tutor to the University until he was dismissed in 1788, for propagating heretical theological views. For similar offences in 1793 he was put on trial in the University Vice-Chancellor's Court, and banished from University and College residence when he refused to retract. He subsequently practised as an

Actuary for the Rock Life Assurance Company.
With his henchman Francis Maseres (1731-1824), lawyer and constitutionalist, Frend fought a bitter, rearguard action against the evils of "symbolical algebra", "fictitious" and "imaginary" numbers, priding himself on being a "pure arithmetician" and a "noted oppugner of all that distinguishes Algebra from Arithmetic".

[15] This paragraph is drawn almost verbatim from De Morgan, "On Infinity."

ESTUDOS HISTÓRICO-PEDAGÓGICOS TEMÁTICOS E HISTÓRIA-PROBLEMA

Antonio Miguel - Faculdade de Educação
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)
Estado de São Paulo - Brasil

O objetivo desta comunicação é explicitar a concepção que temos de um estudo histórico-pedagógico temático e ressaltar a importância da realização de estudos dessa natureza a fim de se viabilizar a participação da história nas aulas de matemática.

Quando nos propomos a tarefa de consultar a literatura especializada sobre a participação da história no ensino-aprendizagem da matemática é bastante frequente encontrarmos argumentos reforçadores (e, mais raramente, também questionadores) dessa participação entre matemáticos, historiadores da matemática e educadores matemáticos.

Mais raramente, porém, esses discursos apologéticos propõem-se sair da esfera de generalidades abstratas e hipotéticas e partir para uma efetiva operacionalização das idéias promissoras que defendem (dos questionadores, é claro, não se pode exigir tal tarefa).

Esse resguardo teórico cuidadoso - que oculta, sem dúvida, a dificuldade concreta de se enfrentar esse empreendimento - não pode trazer à prática pedagógica da matemática uma real contribuição. Se é justa a constatação reiterada presente nesses discursos de que a matemática que se apresenta nos currículos oficiais e nos manuais didáticos é, lamentavelmente, concebida como algo que produziu resultados mas que não tem história, enquanto que, como assinala Rogers (1983, p.401), "*o currículo de história continua a ignorar uma parte significativa de nossa cultura científica e matemática*", não menos justo é o fato de que nem a história da matemática escrita sob o ponto de vista do matemático de ofício, nem as breves e episódicas referências à matemática que aparecem nas obras dos historiadores de ofício conseguem realçar aqueles elementos e aspectos que poderiam, eventualmente, trazer uma real contribuição aos professores que têm a intenção de planejar as suas aulas lançando mão de tal recurso. Ao nosso ver, reside nesse fato uma razão objetiva daquela dificuldade de operacionalização. Em decorrência disso, seria ingênuo acreditar na existência de uma única história da matemática - verdadadeira, pronta e acabada - à qual os professores bem intencionados poderiam recorrer e transpor automaticamente para o plano pedagógico a fim de motivar as suas aulas. Advém daí, a importância da realização e difusão daquilo que estamos chamando *estudos histórico-pedagógicos temáticos.*

Um estudo histórico-pedagógico temático é, antes de mais nada, um estudo que tende a mostrar como a história pode operar em um nível temático específico da matemática na tentativa de revelar todo o seu potencial sócio-cultural, humano e educativo mais amplo. É uma reconstituição histórica (de um tema ou tópico específico da matemática) que se faz pensando no aluno e no educador matemático, e não no historiador ou no matemático de ofício, isto é, é uma reconstituição histórica com fins estritamente pedagógicos e que tenta ilustrar detalhadamente um modo da história participar organicamente do ensino-aprendizagem da matemática. Aparentemente, defender a possibilidade de co-existência de várias formas de se escrever a história da matemática em função dos objetivos que se têm em vista poderia soar paradoxal, mas, ao assumirmos deliberadamente uma atitude anti-positivista em filosofia da história, acreditamos que, quando escritas sob o ponto de vista do educador matemático ou do estudante, tais histórias tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros; determinados problemas e métodos e não outros; tenderiam a enfatizar a reconstituição, não apenas dos resultados matemáticos, mas, sobretudo, dos contextos epistemológico, psicológico, sócio-político e cultural nos quais esses resultados se processaram, contribuindo, desse modo, para a explicitação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas.

Inúmeros outros aspectos deveriam também ser visados por essas histórias pedagogicamente orientadas, tais como aqueles assinalados por Winchester em relação à ciência em geral :

> *"os problemas conceptuais envolvidos na formação de um novo campo de pesquisa ou no avanço de um domínio antigo, as inúmeras dificuldades de interpretação, construção de teorias, abandono de teorias ou os problemas morais e estéticos que se apresentam no processo"* (Winchester, 1989).

No que se refere particularmente aos problemas morais e éticos, é desastroso que a educação científica e matemática tenha se isentado em relação à sua problematização, restringindo-se à abordagem estritamente técnica e aparentemente neutra dos "fatos" científicos e matemáticos. Uma história da matemática pedagogicamente orientada poderia prestar grande auxílio para os professores intencionados em contrapor-se a uma tal tendência tecnicista do ensino.

O resgate dos aspectos estéticos inerentes a algumas demonstrações, soluções de problemas, métodos e processos também poderia subsidiar uma Educação Matemática de tendência não-tecnicista, possibilitando o desenvolvimento de atividades vinculadas ao domínio afetivo e que estimulem a imaginação e a criatividade. Nesse sentido, é útil considerar aqui a comparação estabelecida por Swetz entre o trabalho educativo que poderia ser realizado através da exploração dos objetos de arte de um museu e a apreciação por parte dos estudantes das soluções apresentadas por nossos antepassados por ocasião do enfrentamento de determinados problemas matemáticos :

> *"através desse exame dirigido e minucioso, uma pintura ou escultura torna-se um testemunho de seus gênios criadores e oferece alguma compreensão do período em que o artista viveu e trabalhou. Aprendizagem ocorre. Essa aprendizagem é tanto cognitiva quanto afetiva. Assim também ocorre com os problemas matemáticos da história. Em certo sentido, eles são trabalhos de arte intelectuais e pedagógicos que testemunham uma forma do gênio humano se expressar" (Swetz, 1989, p.376).*

Somente uma história da matemática pedagogicamente orientada, isto é, uma história viva, humana, esclarecedora e dinâmica, vindo substituir as enfadonhas histórias evolutivas das idéias matemáticas, quase sempre desligadas das necessidades externas e/ou internas que estiveram na base de sua origem e transformação, poderia constituir-se, a nosso ver, em ponto de referência para uma prática pedagógica emancipadora.

Por essa razão, um estudo histórico-pedagógico temático deve basear-se na convicção da importância de se tornarem explícitos os valores (éticos, estéticos etc.) que estiveram em jogo durante o processo produtivo do tema que está sendo reconstituído, a fim de que possam ser pedagogicamente problematizados durante as aulas, tendo em vista a necessidade sócio-política de que o processo educativo promova a formação de cidadãos conscientes, críticos e criativos com base num conjunto de valores sociais subjacentes a todo projeto de convívio democrático.

Um estudo histórico-pedagógico temático baseia-se também na convicção de que para haver uma apropriação significativa do saber matemático por parte do educador matemático ou do estudante, essa apropriação deve ser mediada por um discurso constituído a partir de uma interpretação analítica de natureza sócio-psico-filosófica do processo produtivo (e, portanto, histórico) desse saber. Nesse sentido, não pode haver apropriação significativa do saber matemático na ausência de um diálogo com os produtores históricos desse saber e da compreensão das circunstâncias contextuais em que esse saber se produziu.

Por outro lado, como partimos do pressuposto epistemológico de que o processo produtivo do saber matemático e das normas que o regem baseiam-se fundamentalmente na interação social e ganham toda a sua significação no âmbito exclusivo dessa interação, a apropriação significativa do saber matemático por parte do educador matemático e do estudante não pode ocorrer sem que se conheçam as opções feitas pelos produtores históricos desse saber dentre um conjunto de significações possíveis (e nem sempre compatíveis entre si), sócio-interativamente construídas e negociadas durante o processo produtivo desse saber. Como essas significações são sempre atos humanos de criação, isto é, formas humanas inéditas de atribuição de significados, um estudo histórico-pedagógico temático é sempre uma história social, entendida como história das intenções e interações humanas que se processaram quer no plano interpessoal, quer no domínio institucional.

Finalmente, um estudo histórico-pedagógico temático baseia-se na convicção de que a noção de problematização constitui-se no elemento organizador e estruturador adequado para a constituição do estudo.

Num estudo histórico-pedagógico temático, do modo como o concebemos, a problematização é entendida como um método, isto é, como o meio naturalmente crítico e caracteristicamente humano (e, portanto, pedagogicamente adequado), ainda que não necessariamente o mais rápido, o mais econômico ou o mais eficaz, de apropriação do saber matemático. Além de propiciar um ambiente pedagógico que estimula a participação ativa do estudante, permitindo-lhe desinibir seus poderes cognitivos, a problematização cumpre ainda o papel fundamental de propiciar a ampliação do mundo dos possíveis do sujeito que aprende através da avaliação crítica de suas concepções e da visualização de novas formas de interpretação de sua experiência de vida. É preciso acrescentar ainda que não estamos concebendo a problematização em seu sentido usualmente restrito de problematização meramente matemática. No nosso modo de entender, além de matemática, ela deve ser uma problematização simultaneamente lógica, psicológica, política, sociológica, epistemológica, teleológica, axiológica e pedagógica.

Acreditamos que uma tal concepção de problematização total poderia retirar a matemática de seu sempre questionado isolamento escolar, imposto por uma já habitual abordagem estritamente técnica, e torná-la uma colaboradora a mais no atingimento das metas colocadas por um projeto educativo mais amplo que vise à formação do cidadão (Miguel, 1993, p.197).

A discussão precedente nos obriga a destacar a importância pedagógica de os estudos histórico-pedagógicos temáticos serem orientados segundo uma concepção personalizada da história da matemática que a encare como história-problema.

Antes de mais nada, estamos usando aqui a expressão história-problema no sentido de uma história que se opõe a um outro tipo de história de caráter estritamente factual, à qual os historiadores geralmente se referem como 'história- crônica' ou 'história-narrativa'.

É claro que denunciar os limites da história factual, como tão bem o fizeram L. Febvre e M. Bloch, não significa negar abusivamente que "*os acontecimentos façam parte de maneira determinante do trabalho do historiador*"(Lardreau, 1989, p.56). Porém, reduzir a intencionalidade específica da ciência histórica ao mero desejo de se saber o que se passou, como o fazem a maioria das histórias da matemática disponíveis, é, como afirma Aron, "*assimilar o historiador ao cronista*" e encarar o conhecimento histórico como "*uma simples acumulação de fatos*"(Aron, 1983, pp.60-61).

Nesse sentido, podemos estender o significado da expressão 'história-problema' caracterizando-a como um tipo de reconstituição temática que não se contenta em descrever mas, sobretudo, em levantar os problemas (sejam eles de qualquer natureza) com os quais nossos antepassados se defrontaram e que estiveram na base da constituição do tema em estudo ou que vieram a interferir no seu processo de desenvolvimento; de interpretá-los à luz do contexto no qual se originaram; de apresentar, discutir e avaliar as diferentes alternativas, opções e saídas por eles propostas visando à busca de soluções desses problemas, destacando-se dentre elas aquelas que, julgadas mais apropriadas, acabaram elevando-se ao nível de 'verdades matemáticas'.

Uma 'história-problema', portanto, contrapõe-se àquelas formas mais difundidas de utilização da história nas aulas de matemática que nada mais fazem do que realizar uma sobreposição de abordagens, isto é, acrescentar à abordagem lógica(antepondo ou diluindo ao longo de seu desenvolvimento), tal qual usualmente se apresenta um tema ao estudante, algumas informações históricas de natureza estritamente factual, encaradas como meros acessórios ou ornamentos. Esse procedimento, além de sobrecarregar com novas informações factuais um currículo já bastante sobrecarregado de informações, viria apenas reforçar aos olhos dos estudantes a superfluidade do elemento histórico, uma vez que ele aparece como mera curiosidade que não participa de forma efetiva do processo de construção interna do tema. Além disso, esse procedimento acabaria por reforçar, ainda mais radicalmente, a indesejável oposição entre o lógico e o histórico.

Gostaríamos de acrescentar ainda que uma 'história-problema' também não se identifica inteiramente com as propostas de 'história-satírica' ou de 'história destilada' apresentadas respectivamente por Grattan-Guinness e I. Lakatos. Em que consiste a proposta pedagógica da 'história-satírica'de Grattan-Guinness ? Segundo Grattan-Guinness (1973), trata-se de imitar o desenvolvimento de um determinado tema ou teoria omitindo os contextos históricos nos quais esse tema ou teoria se desenvolveu. A proposta de história-satírica coincide, portanto, com a proposta de uma história cronológica e descontextualizada de um tema.

Embora Grattan-Guinness não nos tenha fornecido um exemplo operacionalizado da sua proposta de história-satírica, é possível estabelecer uma analogia entre ela e aquilo a que Lakatos denomina 'história destilada'.É essa 'história destilada' que Lakatos coloca deliberadamente na base de sua proposta de um enfoque heurístico para o ensino-aprendizagem da matemática, por acreditar ser ele, contrariamente ao enfoque euclidiano ou dedutivista, o único capaz de promover a constituição de um pensamento independente e crítico.

A genial ilustração do enfoque heurístico em ação é fornecida por Lakatos em sua tese a respeito da história da fórmula de Euler-Descartes: V-A+F=2. Embora o núcleo desse estudo de caso, como afirma o próprio Lakatos (1978) na introdução do seu *Provas e Refutações*, fosse o de desafiar o formalismo matemático - intenção esta que situa esse trabalho no campo da história e filosofia da matemática -, as suas implicações pedagógicas são óbvias. Além disso, o cenário (uma sala de aula imaginária), os protagonistas (professor e alunos imaginários) e a forma dialogada de apresentação desse estudo de caso deixa transparecer ainda mais as intenções pedagógicas tácitas de Lakatos.

Mas que papel desempenha a história nesse enfoque heurístico baseado no método de provas e refutações ? A resposta a essa questão, que Lakatos não se coloca, mas que pode ser inferida através de algumas passagens do seu *Provas e Refutações*, é que a história só conseguiria concretizar de modo imperfeito aquilo que seria uma função exclusiva da heurística, qual seja, a de por a nu "*a dialética maravilhosa de idéias matemáticas*". No enfoque heurístico, portanto, cabe à história apenas o papel secundário de fornecer o substrato real e bruto a ser destilado a fim de se obter como produto aquilo que é estritamente indispensável para o afloramento do jogo dialético, puro e sutil, das idéias . A esse produto Lakatos denomina 'reconstrução racional da história' ou 'história destilada'.

Pondo de lado a natureza hegeliana do método de provas e refutações subjacente ao enfoque heurístico, podemos afirmar que tanto a história destilada de Lakatos quanto a história satírica de Grattan-Guinness, têm por propósito comum - ainda que por razões diversas em ambos os autores - a ênfase pedagógica nas idéias, nos processos e nos métodos matemáticos, desligados voluntariamente do contexto de sua produção, ainda que tal contexto desempenhe um papel de fundamental importância para a constituição da sátira e da destilação.

A concepção de 'história-problema' que desejamos ver presente em um estudo histórico-pedagógico temático vai além das propostas de 'história-satírica' e de 'história-destilada'. Isso porque, se a 'história-satírica' é capaz de mostrar o surgimento e as transformações a que foram submetidas as idéias matemáticas, e a 'história- destilada' consegue, além disso, revelar - através do desvelamento das idas e vindas, dos avanços e recuos e do confronto racional, engenhoso e sutil de idéias - a dinamicidade e a dialética inerente a essa história transformacional de caráter intelectual, a história-problema exige ainda a inserção dessa dialética numa dimensão propriamente social, que não se traduz na busca dos fundamentos sociais desse jogo puramente intelectual de idéias construído *a* *priori*, mas em mostrar como ele pode constituir-se e produzir-se a partir de determinadas condições sociais que não se reduzem necessariamente à instância econômica ou a outra instância qualquer do real.

Esse modo de conceber a história intelectual como história social das idéias não é novo e nem original. Ele já se colocava, como assinala Chartier, pelos historiadores que fundaram a 'escola' dos Annales, notadamente Bloch e Febvre :

> *"Desembaraçando-se das etiquetas que, pretendendo identificar os pensamentos antigos, os mascaravam na realidade, a tarefa dos 'historiadores do movimento intelectual' (como escreve Febvre) é acima de tudo reencontrar a originalidade, irredutível a qualquer definição 'a priori', de cada sistema de pensamento, na sua complexidade e nas suas mudanças... O esforço para pensar a relação das idéias (ou das ideologias) e da realidade social através de categorias que não as da influência ou do determinismo é a segunda preocupação expressa por Febvre já antes de 1914...Delas é testemunho este texto de 1909 acerca do proudhonismo : 'Não existem, no sentido próprio do termo, teorias criadoras, porque desde o meomento em que uma idéia, por muito fragmentária que seja, se realizou no domínio dos fatos, da maneira mais imperfeita que se queira, não é a idéia que se conta a partir de então, é a instituição colocada no seu lugar, no seu tempo, incorporando uma rede complicada e móvel de fatos sociais, que produzem e sofrem regularmente mil ações diversas e mil reações'. Ainda que os processos de 'encarnação' das idéias sejam indubitavelmentemais complexos do que Febvre deixa aqui supor, o fato é que ele afirma claramente a sua vontade de romper com toda uma tradição histórica intelectual (figura invertida de um marxismo simplificado) que deduzia de alguns pensamentos voluntaristas o conjunto dos processos de transformação social. Para Febvre, o social não poderia, de modo algum, dissolverver-se nas ideologias que têm por objetivo moldá-lo...Contra a história intelectual da época, a crítica é, portanto, dupla: porque isola as idéias ou os sistemas de pensamento das condições que permitiram a sua produção, porque os separa radicalmente das formas de vida social, essa história desencarnada institui um universo de abstrações onde o pensamento surge como não tendo limites, já que sem quaisquer dependências... A uma história intelectual das inteligências sem rédeas e das idéias sem suporte opõe-se uma história das representações coletivas, das utensilagens e das categorias intelectuais disponíveis e partilhadas em determinada época"* (Chartier, 1990, pp.33-34 e p.40).

Finalmente, gostaríamos de assinalar que um estudo histórico-pedagógico temático, tal qual o concebemos, pode apresentar-se sob várias formas e serem destinados a populações distintas. Miguel (1993), por exemplo, em sua tese de doutorado, realizou um estudo dessa natureza, sobre os números irracionais, através de pequenos textos e atividades, destinados a estudantes de oitavas séries. Brito (1995), em sua dissertação de mestrado, realizou um estudo dessa natureza, sob a forma de diálogo, sobre o surgimento de geometrias não-euclidianas, destinado a futuros professores de matemática e aos formadores desses professores. Desconhecemos outras tentativas nesse sentido. No entanto, acreditamos que elas sejam necessárias a fim de que as discussões a respeito da participação da história nas aulas de matemática passem por mudanças qualitativas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARON, R. (1983) *Dimensiones de la conciencia histórica*, México: Fondo de Cultura Económica.

BLOCH, M. (s/d) *Intodução à história*, Mira-Sintra: Publicações Europa-América, Lda.

BRITO, A. J. (1995) *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico*, Dissertação de Mestrado: FE-UNICAMP, Campinas, Brasil.

CHARTIER, R. (1990) *A história cultural - entre práticas e representações*, Lisboa : DIFEL - Difusão Editorial Ltda.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1973) Not from nowhere: history and philosophy behind mathematical education, *International Journal of Mathematics Education and Science Technology, 4:421-453.*

LAKATOS, I. (1978) *A lógica do descobrimento matemático: provas e refutações*, Rio de Janeiro: Zahar Editores.

LARDREAU, G.; DUBY, G. (1989) *Diálogos sobre a nova história*, Lisboa: Publicações Dom Quixote, Lda.

MIGUEL, A. (1993) *Três estudos sobre história e educação matemática*, Tese de Doutorado: FE-UNICAMP, Campinas, Brasil.

ROGERS, L. (1983) The mathematics curriculum and the history of mathematics. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, pp.400-402:* Boston, Birkhäuser.

SWETZ, F.J. (1989) Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics Teacher, 82(5): 370-377.*

WINCHESTER, I. (1989) History, science and science teaching, *Revista interchange, vol.20, nº 2.*

AULAS DE MATEMÁTICA, ATRAVÉS DA HISTÓRIA

Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza
Ariovaldo Antônio Zaniratto
Av. Nami Azém, 871
CEP 13219-610
Jundiaí - São Paulo - Brasil

"No estudo dos juros compostos, encontraremos um diamante de grande quilate e este provavelmente brilhará até o final dos tempos".

ATIVIDADE: Procurar o diamante.
MATERIAL : lápis, borracha, calculadora.

Considere um capital de 1 dólar. Calcular o montante desse capital se ele for investido pelo prazo de um ano a juros compostos de:

a) 100 % ao ano

$M_{12} = 1 + 1 = 2$ $\qquad (1 + 1/1)^1 = 2$

b) 50 % ao semestre

$M_6 = 1 + 0,5 = 1,5$

$M_{12} = 1,5 + 0,75 = 2,25$ $\qquad (1 + 1/2)^2 = 2,25$

c) 25 % ao trimestre $\qquad (1 + 1/4)^4 =$

d) Juros mensais $\qquad (1 + 1/12)^{12} =$

e) Juros semanais $\qquad (1 + 1/5)^{50} =$

f) Juros diários $\qquad (1 + 1/365)^{365} =$

g) Juros horários $\qquad (1 + 1/8760)^{8760} =$

h) Juros por minuto $\qquad (1 + 1/525600)^{525600} =$

....

$\lim(1 + 1/n)^n = 2,718281828$...............= **e**

Foi Euler quem escolheu a letra **e** para designar esse número

Leonhard Euler, nasceu a 15 de abril de 1707, na Basiléia, Suiça.

Uma criança ao colo, um gato sobre o ombro, eis como escrevia suas obras imortais.

Ele discorre sobre planetas, cálculo diferencial, sobre a teoria dos números, álgebra, física e filosofia.

Escreve as famosas "cartas a uma princesa da Alemanha", preleções populares de profundo encanto.

LETTRES A UNE PRINCESSE D'ALLEMAGNE
LEONHARD EULER
MDCCLXVIII

Minha princesa..."no princípio criou Deus o céu e a terra. A terra porém estava vazia e nua, e as trevas cobriam a face do abismo; e o espírito de Deus era levado por cima das águas.
Então disse Deus: Faça-se a luz. E fez-se a luz. E viu Deus que a luz era boa; então dividiu a luz das trevas. E chamou à luz dia; e as trevas noite, e da tarde e da manhã fez o dia primeiro".

Todo esse texto poderia ser substituído, sem perda de generalidades por:
"Então disse Deus: π,i,o,e,1 e fez-se o Universo.

São eles os cinco números mais importantes da Matemática.Eles foram reunidos por Leonhard Euler (1703-1783) nessa famosa relação.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

ATIVIDADE: Questões para reflexão crítica.

1. Explique o que você entendeu quando Euler escreveu: Então disse Deus: **π,i,e,o,1;** e fez-se o Universo.
2. Esse número: 2,7182818...., foi batizado por Euler pela letra "e". Você conhece outros números ou termos matemáticos criados por Euler?

ATIVIDADE: Construção da curva $y= e^x$
MATERIAL : lápis, borracha, papel quadriculado, calculadora.

ATIVIDADE: Complete a tabela comparativa das funções: $f(x)= e^x$ e $g(x) = x^2$

MATERIAL: lápis, papel, calculadora.

x	x^2	e^x
0	0	cm
3	9	cm
5	25	cm
10	100	m
15	225	km
20	400	km
30,3357		
41,39		
42,85		

O número **e** aparece em muitos outros fenômenos, tais como crescimento populacional, desintegração radioativa, juros compostos etc.

ATIVIDADE: Resolva os seguintes problemas:

1.)Sabemos que o número de bactérias numa certa cultura, depois de um tempo t, é dado por $\mathbf{N = No \cdot e^{rt}}$. Em quanto tempo o número de bactérias dobrará, se a taxa de crescimento contínuo é de 5 % ao minuto?

2.)Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirá a 100 g?

ATIVIDADE: Construção da curva $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (Catenária)

MATERIAL: lápis, borracha, papel quadriculado, calculadora.

O fato do ovo oferecer grande resistência à deformação quando solicitado longitudinalmente é característica do seu formato ser auto sustentável, isto é, a natureza deu ao ovo a forma de uma catenária.

Esta mesma curva pode ser empregada na fabricação de aerosóis, arcos de construção, janelas de avião, etc.

O nome catenária foi dado por Leibniz, que o estraiu da palavra latina catena, que significa elo, corrente. Assim, a catenária é a curva suspensa por 2 pontos.

Apesar de ter sido Daniel Bernoulli (1699) o descobridor matemático da catenária, essa tem sido empregada desde os romanos na construcão de templos, aquedutos, pontes. Na idade média os pedreiros (maçons) a utilizavam nas abóbodas das catedrais.

Finalizando, **Euler**, escreveu mais de 500 obras inéditas, incluindo artigos e livros.

Devido a esse rítmo exaustivo de trabalho, produzido até mesmo durante as refeições, foi acometido de um congestão cerebral e perdeu a vista direita. Mais tarde uma catarata o deixou completamente cego.

"Minha princesa; para se fazer matemática, não precisamos enxergar, andar, ter braços, ou mesmo corpo. Só precisamos ter espírito, vontade, perseverança e principalmente convicção na mais bela estrutura da lógica criada pelo homem".

A 7 de setembro de 1783 foi acometido de uma apoplexia e as onze horas da noite, Euler deixou de calcular e viver.

Descanse em paz
meu príncipe

PROGRAMAÇÃO LINEAR
UM EPISÓDIO PITORESCO NA VIDA DE GEORGE DANTZIG

Dantzig, criou em 1947 , a programação linear e o método simplex, o que o levou a inúmeras aplicações em economia, estatística, meio ambiente, etc.

Isso aconteceu no seu primeiro ano em Berkeley quando fazia um curso com o famoso estatístico Jerzy Neyman. Tendo chegado atrasado a uma das aulas, Dantzig encontrou na lousa dois problemas, que entendeu tivessem sido propostos como tarefa para fazer em casa, portanto tratou de copiá-los. Os problemas deram-lhe muito trabalho, bem mais que os outros que costumava fazer, por isso quando foi devolvê-los resolvidos ao prof.Neyman, pediu desculpas pela demora. Neyman aceitou os problemas, que acabaram ficando em sua mesa por algum tempo, quase perdendo-se no meio de tantos outros papeis em desarranjo. Cinco semanas se passaram até que , numa manhã de domingo, Neyman foi à casa de Dantzig com os dois problemas na mão, todo excitado, explicando que aquilo que Dantzig havia copiado da louza e resolvido não era "dever de casa", mais sim dois famosos problemas de estatística que continuavam em aberto. Neyman sugeria então que Dantzig publicasse suas soluções numa revista especializada. Esse trabalho de Dantzig acabou se transformando em sua tese de doutorado.

Mas a história não termina aí. Conta Dantzig que certo dia, numa caminhada matinal, foi alcançado por seu colega Donald Knuth, outro eminente professor de Stanford, da área de computação. Pois bem, Donald contou então a Dantzig que havia estado em Indiana, onde, num sermão dominical o pastor narrara a história do aluno de pós-graduação que resolvera dois problemas em aberto pensando serem "dever de casa". E após o serviço religioso o pastor perguntou a Donald se em Stanford ele conhecia um tal de George Dantzig, que este era o nome da pessoa sobre cuja história versava o sermão.

O próprio Dantzig explica como surgiu a história do sermão. Certa vez, numa viagem de avião, ele sentou-se ao lado de um ministro luterano, o Reverendo Schuler de Los Angeles. O ministro falou então de suas idéias sobre o pensamento positivo e Dantzig contou-lhe o episódio que tivera como estudante de doutorado. Alguns meses depois, o ministro escreveu-lhe uma carta pedindo permissão para incluir sua história num livro que ele estava escrevendo sobre o poder do pensamento positivo. Schuler extraía da história de Dantzig a seguinte moral: se Dantzig soubesse que os problemas copiados da lousa não eram um "dever de casa", mas dois problemas de estatística ainda em aberto, muito provavelmente não os tivesse resolvido, pois sentir-se-ia desencorajado, diante de uma tarefa impossível.

ATIVIDADE: Um problema de Programação Linear
MATERIAL: lápis, borracha, papel milimetrado

Um comerciante vende dois tipos de artigos, A e B. Na venda do artigo A tem um lucro de 20 por unidade e na venda do artigo B, um lucro de 30. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos venderá pelo menos 15 artigos do tipo A e 25 do tipo B. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos A e 50 artigos B. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

Seja x o número de artigos do tipo A e y o número de artigos do tipo B que deve ser encomendado:

1- Função objetivo:

Se para cada artigo A que vende tem um lucro de 20 e para cada artigo B tem um lucro de 30, o lucro total é dado pela função objetivo: $L(x,y)= 20x + 30y$

2- Restrições:

a) como cabem no máximo 100 artigos: $x + y \leq 100$

b) vender-se-ão pelo menos 15 artigos A: $x \geq 15$

c) vender-se-ão pelo menos 25 artigos B : $y \geq 25$

d) o distribuidor entregará no máximo 60 artigos A: $x \leq 60$

e) o distribuidor entregará no máximo 50 artigos B : $y \leq 50$

-Determine o polígono convexo P com essas inequações.

-Achar os vértices desse polígono.

-O lucro é uma função linear nas variáveis x e y, escreva essa função.

-O domínio dessa função é:..

-O lucro máximo é: ....

-Conclusão:

OS ANTIGOS EGÍPCIOS
MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

Se você tivesse vivido e estudado no antigo Egito, seu "papel" teria sido feito de uma planta aquática chamada papiro. Parte desse "papel" sobreviveu até os dias de hoje. Talvez o papiro matemático mais importante tenha sido escrito em torno de 1650 a.C. por um escriba chamado Aahmesu, cujo nome significa "Filho da Lua", conhecido nos meios científicos como Ahmes.

Quase tudo o que sabemos sobre a Matemática dos antigos egípcios se baseia no Papiro Ahmes, que tem aproximadamente 5,5 m de comprimento e 32 cm de largura. Foi comprado em 1858 por um antiquário escocês chamado Henry Rhind. Por isso é conhecido também como papiro de Rhind. Atualmente encontra-se no British Museum de Londres.

Entre as descobertas egípcias que Ahmes deixou gravada está a lei da Falsa Posição. Este método foi usado para resolver equações por milhares e milhares de anos em todas as partes do mundo. Para usar a "falsa posição", uma tentativa de solução é substituída pela incógnita na equação. Usualmente a solução tentativa não resolve a equação. A solução correta é encontrada multiplicando-se o valor da tentativa por um fator de correção proporcional.

ATIVIDADE: Resolva os problemas usando o método da falsa posição.
MATERIAL: lápis, papel milimetrado.

1. A soma de "aha" e 1/4 de "aha" é 15. Qual é o valor de "aha"?

a)Use x para "aha"e escreva a equação para o problema.
b) Escolha um valor falso conveniente para x.
c) Substitua este valor no lado esquerdo da equação. Qual é o resultado? O valor falso é .....
d) Para conseguir 15 de 5, multiplicamos por ..... . Portanto o fator correcional é ....
e) A solução correta é : S = VF . FC=

2. Este problema está no papiro de Ahmes. Mudamos um pouco os números apenas para tornar mais clara a explicação. Naturalmente, isto não altera em nada a idéia central.

"Um montão, seus dois terços, sua metade, todos ao se juntarem fazem treze. Qual é a quantidade".

a)Montar a equação do problema.
b)Resolva pelo método da falsa posição.
c)Escreva uma proporção e resolva-a para encontrar o valor correto de x.

Mas por que uma simples regra de três dá o valor verdadeiro para x?
Uma simples coincidência ou existe uma razão clara e precisa por trás dela?

Justificativa: Seja f uma função tal que f(x) = x + (2/3)x + 1/2)x

a)Construir o gráfico dessa função
b)Ache o valor de x através da semelhança de triângulos

ERATÓSTENES

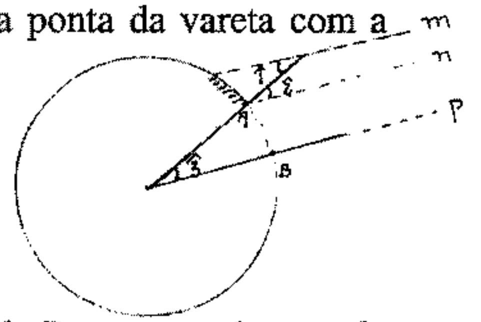
A CIRCUNFERÊNCIA DA TERRA

Para calcular a circunferência da Terra, Eratóstenes usava a posição do sol e alguma geometria básica. Para começar, Eratóstenes sabia que em 21 de junho, ao meio dia, o sol não deixava sombra na cidade de Assuan. Ele concluiu que o sol deveria estar diretamente sobre a cidade.

Aproveitando-se desse fato, Eratóstenes dirigiu-se a cidade de Alexandria e, aproximadamente no mesmo horário em que o sol ficava a pino em Assuan, fincou uma vareta no chão. A seguir, mediu o ângulo formado pela vareta e pelo segmento formado pela ponta da vareta com a extremidade da sombra.

ATIVIDADE: Cálculo da circunferência da Terra

MATERIAL: lápis



1. Na figura, m,n,p, representam os raios do sol. Por causa da grande distância da Terra ao sol, Eratóstenes presumiu que estes raios eram paralelos. O que poderia Eratóstenes concluir sobre os ângulos $\hat{1},\hat{2},\hat{3}$?
2. Usando a sombra produzida por uma vara, Eratóstenes determinou que a medida do ângulo $\hat{1}$ era igual 7,2 graus. O que se conclui sobre a medida do ângulo $\hat{3}$.
3. Na época de Eratóstenes, a unidade principal para medir grandes distâncias era o stadium. A distância aproximada entre Assuan e Alexandria era de 5000 stadium e acredita-se que um stadium tinha cerca de 158 metros. Com essas informações escreva uma proporção e calcule:

a) o comprimento da circunferência da Terra
b) o comprimento do raio da Terra

Bibliografia

ADDISON-WESLEY. Multiculturalism in Mathemetics, Science, and Technology: Readings and Activities. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1993.

BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

KARLSON,Paul. A Magia dos Números. Tradução de Henrique Carlos Pfeifer, Eugênio Brito e Frederico Porta. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

RICIERI, A.P. A construção do Cálculo. Vol 01 e 02. Edições Prandiano: São Paulo 1988.

SBM. Sociedade Brasileira de Matemática. Revista do professor de Matemática. São Paulo e Matemática Universitária, Publicação da SBM.

STRUIK, Dirk J. História Consisa das Matemáticas. Traduzido por João C. S. Guerreiro (1 edição) gradiva Publicações, 1989.

RELAÇÕES ENTRE METODOLOGIA DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E UTILIZAÇÃO PEDAGÓGICA DESSA HISTÓRIA NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Arlete de Jesus Brito, UNICAMP (Doutoranda)

Resumo

A partir da década de 80 de nosso século, um número crescente de educadores matemáticos tem investigado a possibilidade e implicações pedagógicas da inserção da história nas aulas de matemática, tanto nos níveis fundamental e médio de ensino, quanto nos cursos de licenciatura em matemática.

As funções pedagógicas que têm sido atribuídas à essa inserção podem ser sintetizadas, a grosso modo, em duas: uma delas é contribuir para a formação da cidadania do estudante e outra é tornar o processo de aprendizagem da matemática mais significativo.

Uma história da matemática com finalidades pedagógicas deve possuir características que contemplem essas funções. Mas será que qualquer maneira de reconstituição histórica atende às necessidades colocadas pela dimensão pedagógica?

É esse ponto que pretendemos discutir nessa comunicação. Para tal, arrolamos, em primeiro lugar, quais as funções que alguns pesquisadores em Educação Matemática atribuem à utilização da história no ensino de matemática. A seguir, partindo dessas funções, fazemos uma análise das implicações pedagógicas das reconstituições racionais da história da ciência e da arqueologia do saber.

*****

Durante as décadas de 60 e 70, tivemos, na matemática ocidental, o predomínio do chamado movimento da matemática moderna, cuja característica formalista levou a um marcado desinteresse pelas abordagens históricas no ensino de matemática. Porém, a partir da década de 80, um número crescente de educadores matemáticos voltaram-se para a História da Matemática com o intuito de investigar suas potencialidades pedagógicas.

Podemos considerar que esta reabilitação da História da Matemática, nos meios acadêmicos, e a pesquisa sobre o alcance de sua inserção no processo de ensino-aprendizagem está relacionada, em primeira instância, ao fracasso escolar ocorrido com a adoção do modelo estruturalista-tecnicista do movimento da matemática moderna, mas tal reabilitação não se explica somente por meio desse fracasso. Há outra instância que precisa ser considerada, qual seja, a das verdades[1] que passaram a ser aceitas por essa comunidade de educadores.

[1] Estamos entendendo por "verdade" os tipos de discursos que uma sociedade acolhe e faz funcionar como verdadeiros, segundo definição de FOUCAULT, M. (1984)

Parece-me que, ao proclamarmos a importância da História para o ensino da Matemática, nós, educadores matemáticos, estamos adotando uma verdade aceita por grande parte da comunidade de educadores da atualidade, a qual - após a discussão de "ideologia" levantada no século passado por Marx; da "descoberta" do inconsciente realizada por Freud e consequente desenvolvimento da psicanálise nesse século - elegeu a História como um dos caminhos para a consientização e auto-conhecimento do sujeito. Sobre esse papel atribuído hoje à História, FERRY (1994:29-30) afirma o seguinte:

> *"Graças à apropriação de um passado que ignoramos mas nos faz ser o que somos hoje e assim se mostra constitutivo de nosso presente, a história (mas, uma vez mais, também a sociologia ou a psicanálise) deve devolver-nos a nós mesmos. Longe de ser uma simples coleção de acontecimentos, a história tende cada vez mais a se tornar uma disciplina auto-reflexiva, através da qual nos constituímos em indivíduos autônomos. Nada há de espantoso, então, no fato de que a história apareça como a rainha das faculdades num universo em que os homens pretendem aumentar cada vez mais a esfera da consciência de si."*

Percebemos essa atribuição pedagógica à História nos trabalhos de diversos pesquisadores em Educação Matemática (cf. GERDES, P.,1991; MIGUEL, A., 1995).

Porém, é possível apontar outras funções, além da mencionada acima, para a inserção da História nas aulas de Matemática[2]. Segundo JONES (1969) a utilização adequada da História, desde que articulada a um conhecimento atualizado da matemática e de suas aplicações poderia levar o estudande a perceber: que a matemática é uma criação humana; as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; as conexões existentes entre a matemática e outros campos do saber; que necessidades externas à matemática podem servir de estímulo ao seu desenvolvimento, tanto quanto a curiosidade estritamente intelectual; que as percepções que os matemáticos têm de seu objeto de estudo mudam no decorrer do tempo; qual o papel desempenhado pela abstração e generalização na história do pensamento matemático; e, por fim, a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.

Os professores que compõem o Seminário de História e Educação Matemática (IMECC, UNICAMP) defendem outra função pedagógica da história da matemática, qual seja, a de instrumento na formalização de conceitos, formalização esta não compreendida na maneira tradicional, mas como *"o processo de traçar caminhos para se chegar a um determinado fim"* (SEBASTIANI, E. et al., 1992:32).

Podemos sintetizar todas as funções pedagógicas atribuídas à história da matemática expostas até o momento em duas, quais sejam, tornar a aprendizagem da matemática um processo mais significativo para o aluno e colaborar na formação do

---

[2]Gostaríamos de esclarecer que não estamos entendendo essa inserção simplesmente como um tópico a mais ou como um fato episódico nessas aulas, mas que a história da matemática deve articular-se de forma orgância nessas aulas, servindo como uma fonte de problematizações que contemple as várias dimensões da matemática (lógica, ética, estética, etc.).

estudante enquanto indivíduo que sabe-se histórica e socialmente condicionado, mas que é capaz de desenvolver um pensamento independente e crítico.

Neste ponto, urge uma questão: será que qualquer forma de reconstituição histórica atende às necessidades pedagógicas colocadas pelas funções atribuídas à História no processo de ensino-aprendizagem da matemática?

Segundo MIGUEL (1993: 109)

> *"para poderem ser pedagogicamente úteis, é necessário que histôiras da matemática sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Tais histórias, no meu modo de entender, tentariam e tenderiam a privilegiar certos temas e não outros, determinados problemas e métodos e não outros, a enfatizar a reconstituição, não tanto dos resultados matemáticos, mas dos contextos epistemológicos, psicológicos, sócio-políticos e culturais de sua produção, contribuindo, desse modo, para a explicação das relações que a matemática estabelece com a sociedade em geral e com as diversas atividades teóricas específicas e práticas produtivas setorizadas."*

Em minha dissertação de mestrado (BRITO, 1995), realizei uma recontituição histórica das geometrias não-euclidianas com fins especificamente pedagógicos e essa opção levou-me a estudar diferentes maneiras de reconstituição histórica com o intuito de analisar qual delas serviria melhor para a finalidade do meu trabalho. A seguir, tratarei, de modo conciso, as conclusões as quais cheguei.

Comecemos discutindo as **reconstituições racionais da história da ciência.**

As reconstituições racionais da história da ciência priorizam os aspectos internos dessa história, ou seja, os aspectos externos são secundários. Elas trazem implícitos os pontos de vista filosóficos do indutivismo, do convencionalismo, do falsacionismo metodológico e da metodologia dos programas de investigação científica de Lakatos.

Vamos examinar, a título de exemplo, a reconstituição indutivista, primeiro em termos de implicações filosóficas e, num segundo momento, de implicações pedagógicas.

Os historiadores da ciência que adotam o ponto de vista indutivista só consideram dois tipos de descobrimento como sendo genuínos: o que eles nomeiam de proposições factuais sólidas e as generalizações indutivas, são estes que formam a espinha dorsal da reconstituição indutivista da história. Além disso, nessa forma de reconstituição histórica é negado o caráter de científico aos sistemas já abandonados.

Um exemplo dessa maneira de reconstituição na história da matemática é encontrada em EVES (1963). Segundo esse autor, a observação pura e simples por parte do Homem primitivo do contorno do Sol, da Lua, do arco-íris, das corolas de muitas flores conduziu à concepção de círculo. Ou seja, a partir da observação de muitas formas parecidas, o homem foi induzido a criar o conceito de círculo.

Um ponto de crítica que podemos levantar é o inatismo inerente à essa explicação apresentada por Eves, pois ela pressupõe uma capacidade inata no ser humano para perceber regularidades num universo de formas diversas.

GERDES (1987:15) questiona do seguinte modo a maneira de entender a história da matemática apresentada por Eves:

> *"Como é que o Homem sabe quais são as formas que possuem um caráter ordenado? Ou melhor, por que e como o Homem aprende, necessariamente, a descobrir ordem na natureza?*

Para GERDES (cf. 1987:15), as formas regulares e simétricas somente passaram a ser observadas na natureza após terem se mostrado "boas formas" nas tarefas cotidianas de produzir artefatos.

A reconstituição histórica indutivista também não cumpre as incumbências pedagógicas atribuídas por nós à história da matemática alguns parágrafos acima, pois tal reconstituição, ao pretender ser uma história unicamente interna da matemática, não favorece a análise das relações entre a matemática e outros campos do saber, confirmando a tradição fragmentária do ensino; das razões - nem sempre internas - pelas quais as pessoas fazem matemática, deixando ao aluno a impressão de que a matemática é criação de indivíduos ou "iluminados" ou que "não tinham mais o que fazer na vida"; da maneira como as necessidades sócio-político-econômicas interferem na produção e no desenvolvimento da matemática e consequentemente da dimensão ético-política inerente ao saber matemático.

As críticas de cunho filosófico que podem ser dirigidas às outras formas de reconstituição racional da história da ciência- ligadas ao convencionalismo, ao falsacionismo metodológico e à metodologia dos programas de investigação científica - são de outras naturezas, porém as críticas de caráter pedagógico são as mesmas.

Assim, uma primeira conclusão a qual chegamos é que, para ser pedagogicamente útil, a história deve contemplar os aspectos externos da produção e do desenvolvimento da matemática.

Porém, ao considerarmos os aspectos externos em uma reconstituição histórica da matemática, devemos ter o cuidado para não incorrer em dois erros. O primeiro é desconsiderarmos os aspectos internos, o que impossibilitaria a compreensão da dialética interna existente no desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

O segundo é considerarmos ambos os aspectos, interno e externo, na reconstituição, porém transformar os elos de ligação existentes entre eles em simples relações de causa e efeito.

Um caminho possível para a superação dessa dualidade externo/interno é o **método arqueológico de pesquisa histórica**. A seguir, faremos uma síntese bastante concisa desse método.

FOUCAULT (1972) expõe quais os pressupostos desse método e quais as direções de pesquisa a serem seguidas para a construção da arqueologia de um determinado saber. Segundo ele, a diferença básica entre a arqueologia e a história das idéias é que esta busca o fim das contradições, enquanto para aquele as constradições estão dadas e não se mostram como problemas a serem transpostos.

O trato com os documentos consiste em ordená-los, reparti-los em séries, distinguir o que é pertinente do que não é, observar regularidades, descrever relações.

Nesse processo não examinamos o que pode estar escrito nas entrelinhas, mas aquilo que está explicitamente dito.

A análise dos documentos organizados da maneira exposta acima, traz à luz uma rede de relações entre os discursos dos diversos campos do saber e entre eles e as práticas não discursivas, ou seja, as práticas político-econômico-sociais.

Em termos pedagógicos, esse método mostra-se bastante fértil por favorecer o pensamento relacional e, ao mesmo tempo, exigir a análise dos enunciados dos diversos campos do saber envolvidos, inclusive os matemáticos. Essa análise é guiada pelas regularidades determinadas pelos documentos o que acarreta a superação da dualidade aspectos internos/externos na reconstituição histórica.

Por exemplo, em meu estudo sobre as geometrias não-euclidianas, em um determinado momento uma regularidade que se mostrou por meio do exame da análise dos documentos foi a crença de que a geometria euclidiana era um conhecimento *"comprovado e cem por cento inabalável"* (SACCHERI apud ENGEL, F. e STÄCKEL, P., 1968:45), crença essa exitente tanto na filosofia racionalista, na teologia, na arte renascentista, na física, quanto nos trabalhos sobre o quinto postulado euclidiano realizados por Saccheri e Lambert. Assim, naquela oportunidade tive que realizar um estudo de todos esses campos do saber e, particularmente, uma análise bastante aprofundada do discurso matemático contido nas obras do jesuíta e geômetra genovês e do filósofo e matemático suiço.

Notamos, pelo exemplo anterior, que a organização dos documentos pelo método arqueológico confere destaque às descontinuidades que eram suprimidas pela história em sua forma clássica.

A finalidade última da arqueologia exposta por Foucault, parece-nos essencial para uma reconstituição histórica com fins pedagógicos. Segundo ele:

> *"O que se analisa aqui (na arqueologia) não são, certamente, os estados terminais do discurso, mas os sistemas que tornaram posssíveis as formas sistemáticas últimas, são **regularidades pré-terminais** em relação às quais o estado último, longe de constituir o lugar de nascimento do sistema, se define, antes, por suas variantes. Atrás do sistema acabado o que se descobre (...) é um conjunto cerrado de relações múltiplas. E, além disso, essas relações, apesar de não serem a própria trama do texto, não são por natureza estranhas ao discurso".*(1972:94, grifos do autor)

Ou seja, na arqueologia o importante não são as citações de quem, em que época inventou tal teorema, mas qual o processo de construção, quais as regularidades pré-terminais influenciaram a invenção ou o desenvolvimento de uma teoria. Assim, escapamos da história factual tão presente em nossas salas de aula e vamos ao encontro de uma atribuição pedagógica feita por GRATTAN-GUINNESS (1980:1314) à história da matemática:

> *"nesta tradição do ensino de matemática (a apresentada nos livros textos), a maior ênfase é colocada na **acumulação de conhecimentos matemáticos**, no amontoado dos 'fatos' que abarca uma teoria*

matemática, sem parar-se demasiadamente para considerar o ***crescimento do conhecimento matemático****, nem tentar compreender porque uma teoria matemática se desenvolveu e tomou a* ***forma*** *que tomou, e não simplesmente que tem o* ***conteúdo*** *que de fato tem. Pois bem, a história da matemática pode ser de utilidade aqui, uma vez que qualquer teoria matemática é o resultado de esforços humanos do passado, e algumas idéias pelo menos de suas motivações originais podem muito bem ser oportunas ou ter um valor educativo."* (grifos do autor)

Esperamos ter, com essa discussão, atingido nosso objetivo inicial, qual seja, buscar algumas relações entre algumas metodologias de pesquisa utilizadas para se realizarem reconstituições da história da matemática e as implicações pedagógicas que dessas reconstituições.

Para finalizarmos, gostaríamos de salientar nossa consciência de que apenas uma metodologia de pesquisa para a reconstituição não garante o alcançamento das funções atribuídas à história no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Além de uma preocupação com essa metodologia deve haver outra em relação ao modo de inserção dessa história em sala de aula a partir de uma metodologia de ensino que vise a construção do conhecimento pelo aluno.

Referências bibliográficas

BRITO, A. J. - *Geometrias não-euclidianas: um estudo histórico-pedagógico* - Dissertação de mestrado - FE -UNICAMP - 1995.

ENGEL, F. e STÂCKEL, P. - *Die Theorie der Parallellinien* - Johnson Reprint Corporation - West Germany - 1968.

EVES, H.W. - *Estudios de la geometria* - Tomo I - Union Tipográfica Editorial - México - 1963.

FERRY, L. - *Homo Aestheticus* - Ed. Ensaio - SP - 1994.

FOUCAULT, M. - *Microfísica do poder* - Ed. Graal - RJ - 1984.

__________ - *A arqueologia do saber* - Ed. Vozes - RJ - 1972.

GERDES, P. - *Etnomatemática: cultura, matemática, educação* - Instituto Superior Pedagógico- Maputo - 1991.

GRATTAN-GUINNESS, I. - *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910* - Alianza Universidad - Madrid - 1980.

JONES, P. - " The history of mathematics as a theaching tool" - *Historical topics for the mathematics classroom* - Washington, D.C.: NCTM , 1969.

MIGUEL, A. - *Três estudos sobre História e Educação Matemática* - Tese de doutorado - FE - UNICAMP - 1993.

SEBASTIANI, E. et all - "O estudo da história da matemática na formalização de conceitos" in *BOLEMA* Especial nº 2 : 26-41 - Rio Claro -1992.

O *DE CREPUSCULIS* DE PEDRO NUNES

Carlos A. S. Vilar, Universidade do Minho, Braga

É talvez a obra prima de PEDRO NUNES, "*digna, por certo, de memória eterna*", ou ainda, "*a que mais honra faz à sagacidade do seu espírito*" – assim se exprime Garção Stockler, no seu "*Ensaio histórico, sobre a origem e progressos das matemáticas, em Portugal*".
Igualmente significativo é o comentário da Comissão responsável pela edição mais recente da obra: "*É uma obra prima o De Crepusculis. A sua originalidade, o eco que teve, a influência que exerceu, atestam a sua importância. Só por si justifica o De Crepúsculis a glorificação astronómica, que a* PEDRO NUNES *foi dada, atribuindo o seu nome a uma das crateras da lua*".
E António Pinheiro, que foi mestre no Colégio de Santa Bárbara, em Paris, e, mais tarde, Bispo de Miranda e depois de Leiria, pregador régio e, praticamente, orador oficial da corte, no seu *carmen laudatório*, que se lê, na obra, logo após a dedicatória, que PEDRO NUNES dela faz ao Rei D. João III, expande o seu apreço, com a liberdade e entusiasmo, que só os poetas usufruem:

"*Tudo isto, ó leitor, inquiriu Pedro Nunes / Com arte, e te ensinou com hercúleo esforço. / Ergue o ânimo e deixa os anseios terrenos, / Que este livro, não grande, encerra grandes coisas*".

Foi, certamente, o *De Crepusculis*, de todos os escritos de PEDRO NUNES, o que mais o notabilizou, no mundo científico do seu tempo. São disso o melhor testemunho, três edições, nos anos quinhentos, duas das quais, em vida do autor, a aceitação e louvores, não regateados, dos homens doutos da época, e entre eles, TYCHO BRAHE, e o elogio rasgado, que dele faz e do seu autor, o célebre jesuita bávaro CRISTÓVÃO CLÁVIO – *o Euclides da Companhia de Jesus*, como ficou conhecido – na apresentação da "*Digressio geometrica de crepusculis*" – resumo do *De Crepusculis* de PEDRO NUNES, em vinte e quatro proposições – que ele próprio elaborou e integrou na sua obra "*In sphaeram Joannis de Sacro Bosco commentarius*".

Inicia PEDRO NUNES o prefácio com a dedicatória ao Rei D. João III:
"*AO MUITO ALTO E MUITO PODEROSO REI DE PORTUGAL, D. JOÃO, O TERCEIRO, Senhor de África, Etiópia, Arábia, Pérsia e Índia, prefácio de* PEDRO NUNES, *geógrafo, à sua obra Do Crepúsculo*".

Propôs-se escrever sobre o tema – *os crepúsculos* – após uma reflexão académica, na presença do Infante D. Henrique, irmão de D. João III, algum tempo depois, Arcebispo de Braga e, mais tarde, Cardeal e Rei, de quem era preceptor e mestre, e

que o terá suscitado, conforme, aí, o declara, quando levantou o problema da duração dos crepúsculos, nos diferentes climas. Não se fizeram esperar as respostas, porventura convictas, mas não convincentes para o espírito científico de PEDRO NUNES, antes *"coisas muito sabidas e gastas e por ninguém, que eu saiba, até agora demonstradas"*. Foi, então, que despontou, na sua mente, a ideia e, na sua vontade, a determinação de *"explicar claramente o assunto, mediante os princípios certíssimos e evidentíssimos da matemática"*.
E continua PEDRO NUNES, na apresentação da sua obra. *"Nesta ordem de ideias, meditando e investigando, descobri coisas, que em parte alguma li e não mereceriam crédito, se não fossem demonstradas, a saber:*
Os dias começam a crescer e os crepúsculos a minguar, quando o sol tiver entrado na primeira parte de Capricórnio; antes de ele percorrer toda a quarta hiemal do Zodíaco, dá - se o mínimo crepúsculo, no horizonte de Lisboa, a 25 de Fevereiro, no nosso tempo, como mostrou um cálculo muito exacto; e, a partir de então, aumentam até ao trópico estival. Para os que habitam sob o equador, vastíssima região sob o Vosso império, quando o sol está no zénite, na ocasião do equinócio, os crepúsculos são mínimos, crescendo diariamente, à medida que o Sol se aproxima de um ou de outro trópico".
"Muitas outras coisas demonstrei, que merecem ser conhecidas" – acrescenta, ainda – afirmando, logo a seguir, ter usado um método de demonstração, *"por vezes, diferente do empregado pelos antigos e doutos autores* MENELAU, PTOLEMEU e GEBRE", mas que *"não diverge, de modo algum, do de* EUCLIDES e TEODÓSIO".
É de notar, desde já que, nas suas demonstrações – e PEDRO NUNES, cientista exímio e extremamente honesto, não faz qualquer afirmação, que não demonstre minuciosamente, a ponto de ter sido criticado, como demasiado prolixo e exagerado – invoca, constantemente, EUCLIDES, nos problemas geométricos, e TEODÓSIO, nos respeitantes a assuntos de astronomia, mostrando conhecê-los profundamente e aceitar, sem reservas, a sua autoridade.

Assim nasceu o *De Crepusculis*, *"livro de mui pequena extensão, não chegando a formar um volume razoável"* – diz PEDRO NUNES – que acrescenta tê - lo escrito, todavia, *"para utilidade comum, pois, para ser de alguma maneira prestável aos estudiosos das artes liberais, aplico-me assiduamente a estes estudos"*.

O tema havia sido já tratado, muito tempo antes, por um estudioso e fecundo escritor árabe, chamado ABU ALI AL HASAN BEN AL HOSAIN BEN AL HAITAM, mas conhecido por ALLACEN, a quem são atribuidos mais de cem trabalhos de geometria, física, medicina, filosofia e astronomia. Entre eles, se conta um, muito pequeno, sobre os crepúsculos, que com o título *Liber de crepusculis tractatus I*, figura na relação dos escritos traduzidos por GERARDO DE CREMONA – *"Haec, vero sunt nomina librorum, quos transtulit Girardus Cremonensis in Toleto"* – o que, além de identificar, sem margens a dúvidas, o tradutor, do árabe para o latim, terá, só por isso, contribuido para que a sua autoria jamais tenha sido contestada. Não sendo conhecido, porém, nenhum códice com o texto original árabe, não é possível averiguar a fidelidade daquela tradução. Dela teve conhecimento PEDRO

NUNES, mas tão degradado e cheio de erros estava o texto, a que teve acesso, que lhe exigiu mais trabalho a sua correcção do que elaborar ele mesmo o seu próprio escrito, não se eximindo, todavia, a dá - lo a conhecer, anexando - o à sua obra .
Diz, com efeito, "*acrescentei - lhe um opúsculo de Allacen, árabe mui antigo, trasladado outrora para latim por Gerardo de Cremona, no qual se examinam, com exactidão, as causas dos crepúsculos; tão deturpado, porém, e tão eivado de erros o encontrei, que tive mais trabalho em corrigir o alheio códice, que em compor novamente o meu escrito*".
Ele mesmo ou o seu editor o referem sempre no título da obra "UM LIVRO de PEDRO NUNES, *SALACIENSE*, sobre os Crepúsculos. "ITEM de Allacen, árabe muito ilustre, sobre as causas dos Crepúsculos, um livro traduzido, outrora, em latim, por Gerardo de Cremona (1114 – 1187) e, agora, de novo revisto, pelo mesmo Pedro Nunes".
Presume - se que PEDRO NUNES terá acabado a redacção do De Crepusculis, em 1541, visto que o prefácio está datado de 17 de Outubro desse ano. Todavia, a variedade e complexidade dos assuntos versados e a ordem e profundidade de exposição, notáveis ao longo de toda a obra, levam a crer que o tema era já objecto de estudo para PEDRO NUNES, muito antes da interpelação do Infante, que terá ocorrido, um ano atrás.

Compõe-se de duas partes. A primeira, muito homogénea, relativamente aos assuntos versados, contém, generalidades sobre *crepúsculos*. É, como que uma introdução ao tema, de que, só na segunda parte se ocupa verdadeiramente. São *Apêndices*, na primeira parte, e *Proposições*, na segunda, os enunciados ou teoremas, que propõe e demonstra.
As demonstrações, feitas até ao pormenor, e, por vezes, mais do uma para um mesmo enunciado, são acompanhadas de figuras, mais ou menos complexas, pelas quais PEDRO NUNES nutria um encanto especial.
Usa, nelas, letras minúsculas e maiúsculas, indiscriminadamente, por vezes até a mesma letra, numa e noutra forma, devido, provavelmente, ao grande número e variedade de pontos a assinalar.
Quase todas elas – na sua maioria figuras planas – contêm um meridiano – o do lugar – substituido, em algumas proposições, pelo coluro dos pontos solesticiais, os traços do equador, por vezes da eclíptica, do horizonte e de paralelos ao equador, ou à eclíptica, ou ao horizonte, bem como rectas e pontos auxiliares para as demonstrações em vista. Só no fim da segunda parte da obra, têm outra configuração as figuras, então adaptadas a outro tipo de demonstração, com o recurso à trigonometria esférica.

É notória a influência euclidiana, na sua exposição:
– não aceita nem propõe qualquer afirmação matemática, sem demonstração;
– admitida como verdadeira uma proposição, mostra que ela satisfaz ás condições estabelecidas;
– respeita a hierarquia e função das proposições: o *enunciado principal* – a que chama *apêndices*, na primeira parte da obra, e *proposições*, na segunda, e se

propõe demonstrar – o *lema*, ou proposição auxiliar, destinada a facilitar alguma demonstração posterior, e o *corolário*, como consequência directa de alguma demonstração, que acaba de fazer.

Na metodologia demonstrativa, adopta PEDRO NUNES o estilo de PTOLOMEU e de astrónomos árabes famosos, nomeadamente GEBRE e ALBATÉNIO – são geométricas quase todas as demonstrações, ao longo da obra, e do tipo planimétrico, recorrendo a planos diferentes e "rebatimentos", e só no fim da segunda parte, conforme se assinalou já, recorre à trigonometria esférica.

PEDRO NUNES usa, apenas, duas funções trigonométricas, no *De Crepusculis*: o seno recto e o seno verso.
Sendo AB um arco de um círculo, de centro em O e raio OA,
– *seno recto* do arco AB, *sr*(AB), é a medida do segmento BC, perpendicular a OA, expressa em partes das que o raio do círculo possui, em número máximo;
– *seno verso* do arco AB, *sv*(AB), é a medida do segmento CA expressa também em partes das que o raio do círculo possui, em número máximo.

No *De Crepusculis*, o seno recto e o seno verso são expressos em partes do número total das 100000 partes do seno total ou raio da esfera celeste.

É, no *De Crepusculis*, que, pela primeira vez, faz uso da função *seno verso*. Pode - se presumir, todavia, que conhecia já esta função, quando, em 1537, publicou o seu tratado *De Sphera*, apesar de aí usar somente o seno recto.

Uma propiedade importante e sempre presente nas suas demonstrações é a que relaciona senos rectos e senos versos de arcos equivalentes – arcos, que subtendem ângulos ao centro iguais. Mostra, com efeito, num dos lemas da primeira parte, que os seno rectos, bem como os senos versos desses arcos são proporcionais aos raios dos respectivos círculos.

Parece, à primeira vista, que PEDRO NUNES não conhecia a função *coseno*, porquanto nunca a menciona, no *De Crepusculis*. Mas, frequentíssimas vezes, faz uso do seno recto do complemento de um arco, que é, exactamente, o coseno recto do mesmo, o que permite dizer que, desconhecendo, muito embora, o nome, já que nunca o usa, conhecia, todavia, a função e ainda, que, na noção de seno verso, no *De Crepusculis*, está envolvida, de algum modo, a noção da função coseno.

No que respeita à trigonometria esférica, usa - a, apenas e quase exclusivamente, na Proposição XVII, em problemas, que envolvem a resolução de triângulos esféricos, quer no desenvolvimento do tema principal – o crepúsculo mínimo – quer em problemas subsidiários.

Roteiro seguido por PEDRO NUNES, ao longo do *De Crepusculis*.

Do prefácio de PEDRO NUNES à sua obra *De Crepúsculis*, pode concluir-se, desde logo, que o estudo, que se propõe fazer sobre o tema, conduz a resultados não condizentes com o que até então se pensava, sobre a sua duração, sendo esse, ademais, o seu objectivo – corrigir, mostrando a sua inexactidão e estabelecendo uma nova teoria, baseada, como diz, nos sólidos princípios da matemática.

Segundo a noção de crepúsculo, referida por PEDRO NUNES, conforme à que vinha já dos astrónomos antigos, começa o crepúsculo matutino e termina o vespertino, quando o sol, no seu movimento diurno, se encontra 18 graus, abaixo do horizonte. (É, precisamente, neste momento, que os astrónomos devem terminar, antes do nascer do sol, ou começar, depois do ocaso, as suas observações).

Mostra PEDRO NUNES, na primeira parte do *De Crepusculis*, que a iguais depressões do sol, correspondem arcos horários, que diferem, com a latitude do lugar e com a declinação do sol, pelo que a duração dos crepúsculos – admitindo mesmo que corresponde a uma depressão do sol de 18 graus – varia, num mesmo dia, de lugar para lugar, isto é, com a latitude, e, num mesmo lugar, de dia para dia, com a declinação do sol.

Num mesmo dia e lugar, são iguais os crepúsculos matutino e vespertino.
É esta a primeira afirmação relevante, que PEDRO NUNES faz e demonstra, e que lhe permitirá, quando se refere à sua duração, falar simplesmente de crepúsculos, sem qualquer discriminação.

Num mesmo lugar, são iguais os crepúsculos, que ocorrem à passagem do sol por pontos equidistantes de um mesmo ponto solsticial, o estival ou o hibernal.
Em cada lugar, ocorrem, pois, crepúsculos com a mesma duração, duas vezes, por ano: uma, no movimento ascensional aparente do sol, ao longo da eclíptica, e outra, no movimentao descendente. São únicos, porém, os crepúsculos correspondentes à passagem do sol pelos pontos solsticiais.

A posições do sol, na eclíptica, igualmente afastadas de um ou outro dos pontos equinociais – o vernal ou o autumnal – correspondem, em cada lugar, crepúsculos de diferente duração:
– nos lugares setentrionais, são maiores os crepúsculos correpondentes à posição boreal do sol, na eclíptica;
– nos lugares meridionais, são maiores os crepúsculos correpondentes à posição austral do sol, na eclíptica.
Caminhando o sol, no seu movimento anual aparente, ao longo da eclíptica, a cada posição num dos hemiférios – o austral ou o boreal – corresponde uma outra, no outro hemisfério – o boreal ou o austral, respectivamente – equidistantes de um mesmo ponto equinocial, o vernal ou o autumnal. Por outro lado, a cada posição, em qualquer dos hemisférios, corresponde sempre uma outra, diametralmente oposta, no outro hemisfério, sendo, então, iguais as suas distâncias, de uma ao ponto vernal e da outra ao ponto autumnal. Os crepúsculos, que ocasiona, em algum lugar, à sua passagem por cada um daqueles pares de pontos da eclíptica, têm diferente duração: num lugar setentrional, é maior o que corresponde à posição boreal, e, num lugar meridional, o que corresponde à posição austral.

Quando o sol percorre os signos boreais da eclíptica, os crepúsculos, em qualquer lugar setentrional, aumentam à medida que o sol se aproxima do trópico estival.
Este aumento "contínuo", na duração dos crepúsculos, em qualquer lugar setentrional, com a aproximação do sol do princípio de Câncer, verifica-se, ademais, como o mostrará, mais adiante, PEDRO NUNES, a partir de um valor mínimo, que ocorre, à passagem do sol, no seu movimento ascencional, por um certo ponto da eclítpica, ainda antes do princípio de Aries, ou equinócio da primavera.

No equador, têm igual duração os crepúsculos correspondentes a posições do sol, na eclíptica, equidistantes de um ou outro dos pontos equinociais – o vernal ou o autumnal – e durações diferentes, os que correspondem a outras posições, sendo, então, mais longos, os que o sol ocasiona, na posição mais afastada.
Já antes havia estudado PEDRO NUNES o comportamento dos crepúsculos, no que respeita à sua duração, quando gerados pelo sol, em lugares setentrionais, ou meridionais, à sua passagem, na eclíptica, por pontos equidistantes do um ou outro dos pontos equinociais – o vernal ou o autumnal. Ao contrário do que, então, acontecia – tinham aí diferente duração – eles são iguais no equador. A outras posições do sol na eclíptica, porém, correspondem, no equador, crepúsculos de diferente duração, sendo então mais longos os correspondentes à posição mais afastada.
Pode, desde já, estabelecer-se a variação dos crepúsculos, no equador, com a ascenção do sol, na eclíptica, do princípio de Capricórnio, ao princípio de Câncer: decrescem, de um valor máximo, até um mínimo, ocorrendo este, quando o sol passa pelo princípio de Aries, (equinócio da primavera), e crescem, depois, até um valor máximo, igual ao anterior, que ocorre, quando o sol atinge o princípio de Câncer.

Os crepúsculos são sempre mais longos, nos lugares mais boreais, qualquer que seja a posição do sol, na eclíptica – nos signos meridionais, ou nos pontos equinociais, ou nos signos setentrionais.
Qualquer que seja a posição do sol, na eclíptica, os crepúsculos, que ocasiona, em dois lugares boreais, quaisquer, são mais longos, no lugar mais boreal.
Analogamente, sendo austrais os dois lugares, é no mais austral, que ocorrem crepúsculos de maior duração.

É evidente, em face do exposto – o essencial da primeira parte do *De Crepusculis*, no que respeita expressamente ao estudo dos crepúsculos – que seria inteiramente inaceitável atribuir um valor constante à sua duração, em qualquer dia e qualquer lugar, mesmo admitindo ser constante e igual a 18 graus a depressão do sol, no começo do crepúsculo matutino e no fim do vespertino.

Não se ficou por aqui, todavia, PEDRO NUNES. Foi muito mais longe, conforme era, ademais, a sua intenção, no estudo, a que se devotou, na segunda parte da sua obra, e que foi também o que mais admiração e mais elogios lhe grangeou.

Não é constante a depressão do sol, no início do crepúsculo matutino e fim do vespertino.
É esta a primeira afirmação de PEDRO NUNES, marcantemente inovadora, sobre o tema, logo no começo da segunda parte do *De Crepusculis*.
Admitia-se, com efeito, que era constante aquela depressão, embora sem consenso, quanto ao seu valor – 17 graus e meio, segundo ESTRABÃO, 19 graus, para ALLACEN, e 18 graus, na opinião dos astrónomos mais recentes. Não o aceita PEDRO NUNES, mostrando antes a sua dependência das condições envolventes, em cada lugar e em cada dia, concretamente, da altura dos vapores e poeiras, que são, em última análise, a causa dos crepúsculos, pela reflexão da luz solar, a que dão origem, antes de o sol atingir o horizonte, no crepúsculo matutino, ou depois de o ultrapassar, no vespertino. Admitindo, muito embora, teoricamente e como ponto de partida, o valor de 18 graus, para aquela depressão, propõe-se, ainda, PEDRO NUNES estabelecer um método para o determinar, com exactidão, o que fará, numa das últimas proposições.

Nem todos os assuntos, versados na segunda parte da obra, dizem respeito aos crepúsculos. Alguns há, que, nem directa nem indirectamente, e outros, só indirectamente, estão com eles relacilonados.
Todos, porém, têm lugar num tratado de astronomia esférica e há mesmo quem assim considere o *De Crepusculis*.

Assim, ensina PEDRO NUNES
– a calcular a declinação de qualquer ponto da ecliptica;
– a construir um astolábio, para determinar a altura de um astro, e aqui expõe e fundamenta a sua teoria para obter fracções do grau, unidade de medida;
– a determinar a latitude de um lugar, e, conhecida esta, como determinar a declinação de um astro, no meridiano do lugar;.
– a determinar a distância de um astro ao meridiano do lugar;
– a resolver problemas, muito variados, de mudança de coordenadas celestes, entre os quais – na *Proposição* VI, célebra pela sua extensão e pelas críticas, que suscitou, sobretudo em DELAMBRE – o da determinação da declinação de uma estrela, conhecidas a longitude e a latitude, e da longitude, bem como da ascenção recta, dadas a latitude e a declinação.

São particularmente importantes os seus ensinamentos, directamente relacionados com os crepúsculos. Expõe e fundamenta diversos métodos para calcular
– a duração dos dias e das noites e dos *crepúsculos*, em qualquer horizonte oblíquo;
– a duração dos crepúsculos, num horizonte oblíquo, quando o sol ocupa algum dos pontos equinociais;

– a duração dos crepúsculos, em lugares equatoriais.

Ficou célebre, sobretudo, a *Proposição* XVII, onde PEDRO NUNES explica a evolução dos crepúsculos, no que respeita à sua duração, à medida que o sol se desloca, ao longo da eclíptica, do princípio de Capricórnio, até ao princípio de Câncer.
Depois de lembrar – *o que é de todos sabido* – que os dias aumentam, no hemisfério norte, à medida que o sol sobe, na eclíptica, do princípio de Capricórnio (solstício do inverno), até ao de Câncer (solstício do verão), e são iguais às noites, à sua passagem pelo princípio de Aries (equinócio da primavera), diz PEDRO NUNES – enunciando o que se propõe demonstrar – que, no que respeita aos crepúsculos, estes, naquele mesmo espaço de tempo,
– começam a decrescer e de um modo "sensível", até ao dia em que o sol ocupa o ponto da eclíptica, para o qual, a razão do seno recto da altura do polo (latitude do lugar), para o seno total, é a mesma que a do seno recto do arco da depressão do sol, no começo do crepúsculo matutino, ou no fim do vespertino, para o dobro do seno recto da declinação daquele ponto;
– continuando a decrescer, quando o sol está ainda num certo ponto da eclíptica, antes do principio de Aries (equinócio da primavera), são iguais aos que se registam, à passagem do sol por este ponto equinocial;
– a partir de então, continuam ainda a decrescer, mas de um modo quase "insensível", atingindo um valor mínimo, à passagem do sol por um certo ponto da eclíptica, ainda antes também do princípio de Aries;
– crescem, finalmente, à medida que o sol vai subindo, na eclíptica, desde aquele ponto, a que corresponde o valor mínimo, até atingir o princípio de Câncer (solstício do verão).
Integrados nesta proposição, estão os cálculos, que ele mesmo fez, para determinar não só os dias, em que ocorrem os crepúsculos mínimos, no horizonte de Lisboa, um, no decurso da marcha ascendente, e outro, na marcha descendente do sol, ao longo da eclíptica, como também a sua duração.

Finalmente, e ainda antes de terminar a sua obra, com a análise do problema do crepúsculo, no cume e sopé de um monte, PEDRO NUNES retomou e desenvolveu, minuciosamente, as considerações já iniciadas, que relacionam a depressão do sol, no começo do crepúsculo matutino, ou no fim do vespertino, com a altura dos vapores e poeiras, que tornam o ar suficientemente denso e espesso para provocar a reflexão da luz solar, sobre o horizonte, e assim, originar os crepúsculos.

O *De Crepusculis* foi editado quatro vezes:
– em 1542, nas oficinas de Luis Rodrigues, em Lisboa;
– em 1573, nas oficinas de António Maris, em Coimbra;
– em 1592, sob a responsabilidade de Sebastião Henricpetrus, em Basileia;
– em 1943, na Escola Tipográfica da Imprensa Nacional de Lisboa, pela Academia das Ciências, sob a responsabilidade dos ilustres e doutos académicos Joaquim de Carvalho e Manuel António Peres Júnior.

GÉOMÉTRIE ET MOUVEMENT: UN EXEMPLE D'AUTOFORMATION

Carlos Mederos Martín. Seminario Orotava de H[a] de la C.

INTRODUCTION

Quand nous voulons développer des activités liées à l'Histoire des Mathématiques, nous nous rendons compte que notre formation en tant que professeur d' Enseignement Secondaire (17-18 ans), est, souvent, assez déficitaire dans ce domaine.
D'autre part, nous pensons que le cours de Mathématiques doit contribuer à la formation culturelle de nos élèves et que l'étude de l'Histoire d'une discipline permet de façon naturelle de lier cette discipline à la culture, nous arrivons à la conclusion que nous devons, avant de travailler avec les élèves, consacrer un certain temps à notre propre formation.
Pour cela nous travaillerons à deux niveaux de formation: un niveau qui implique les élèves et les professeurs (mise en practique des activités) et un autre niveau, préalable, qui implique seulement le professeurs (période d'autoformation).
Dans cette étape d'autoformation, des professeurs de différentes matières se réunissent pour étudier en profondeur un sujet qui leur est commun,interdisciplinaire. C'est là que l'on trouve les thèmes les plus attirants et motivants. C'est une période de recherche de la beauté et de la simplicité qui va améliorer leur propre estime en tant que professeurs. Tout cela crée un climat propice à la conception d'activités et au développement de projets éducatifs dans lesquels interviennent les élèves.
Le travail exposé ici en est un exemple et s'insère dans le "Proyecto Helena", développé par un groupe de professeurs l'île de Ténérife, et dont l'objetif est de mettre les Mathématiques au service de la culture. Nous nous centrerons sur la période de l'histoire durant laquelle naquit la Science Moderne: le 17ème. siècle.
Le thème choisi était d'un grand intérêt pour les mathématiciens de l'époque, à cause du côté surprenant de ses propriétés géométriques et mécaniques: la courbe cycloïde. Nous l'étudierons au moyen de la géométrie et des conceptions sur le mouvement existantes à l'époque.

GÉOMÉTRIE ET MOUVEMENT AU XVIIÈME SIÈCLE

Au début du XVII ème siècle on croyait que por être cultivé on devait connaître la géométrie des "ELEMENTS" d'Euclide, basée sur les raisons de magnitudes et spécialement sur l'égalité entre elles, c'est-à-dire, sur les proportions. Rappelons, dans ce sens, des résultats tels que les théorèmes de Thalès, du Cathète, ainsi que de certaines relations entre arcs et angles inscrits, très utiles pour la démonstration de quelques propriétés que nous allons énoncer ici.

D'autre part, quant à l'étude des conceptions du mouvement de cette époque-là, nous considérons que l'oeuvre de Galilée "DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE IN TORNO À DUE NUOVE SCIENZE"", publiée en 1638 est très intéressante pour ce faire.
Nous nous bornerons à la "TROISIÈME JOURNÉE", et tout particulièrement à la partie consacrée à l'étude du mouvement naturellement accéléré (mouvement de la chute des corps).Là, et partant d'un postulat obtenu expérimentalement, Galilée démontre plusieurs théoremès sur la chute des corps où l'on découvre le rapport entre géométrie et mouvement. Galilée utilise des réalités géométriques: segments, triangles, surfaces, oú les concepts liés au mouvement sont représentés. C'est-à-dire: espaces,temps,vitesse...
Nous pouvons représenter cette relation avec le schéma suivant:

ÉTUDE DU MOUVEMENT
↓
BESOIN DE MESURER LE TEMPS
↓
DIFFICULTÉS TECHNIQUES DE L'ÉPOQUE
↓
RELATIONS ENTRE TEMPS
↓
GÉOMÉTRIE ⟹ RELATIONS ENTRE SEGMENTS ⇒ CONCLUSIONS SUR LE MOUVEMENT.

Dans l'étude du mouvement, celui de la chute des corps a un intérêt spécial car, c'est vrai, les corps tombent très rapidement. Si nous tenons compte que les horloges de l'époque n'étaient pas construites pour mesurer des temps courts, l'utilisation des segments comme mesure du temps devient une excellente idée. Et c'est là que Galilée en obtient les premiers résultats qui, plus tard, seront généralisés.
En voilà quelques-uns:

POSTULAT: Les différentes vitesses atteintes par un mobile sur des plans différemment inclinés seront égales si les hauteurs sont égales.

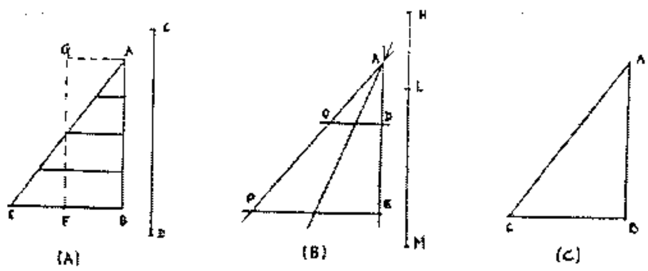


figure 1

THÉORÈME I: Le temps dans lequel un espace déterminé est parcouru par un mobile qui part du repos avec un mouvement uniformement accéléré est égal au temps dans lequel le même espace aurait été parcouru par le mobile ayant un mouvement uniforme dont la vitesse en serait la moitié de la vitesse maximale atteinte. (figure 1 A).
THÉORÈME II: Si un mobile tombe, partant du repos et avec un mouvement uniformement accéléré, les espaces parcourus, quelque en soit le temps, ont la même raison entre eux que le carré de la raison entre les temps. (figure 1 B).
THÉORÈME III: Si un mobile se déplace, partant du repos, sur un plan incliné et le long d'une verticale, ayant toutes les deux la même hauteur, la raison entre les temps des mouvements sera la même que pour les longueurs des deux plans.

Le pas suivant consistera à appliquer les conaissances acquises à l'étude du mouvement de chute le long d'une courbe. On y arrive à travers des segments de tangente, considérés chacun d'eux comme un plan incliné où l'on peut appliquer les lois du mouvement considérant qu'il a été parcouru à une vitesse constante due à la chute du point le plus haut jusqu'au point de tangence. Voilà pourquoi on en déduit que le problème fondamental dans l'étude du mouvement le long d'une courbe est de nature géométrique: LA DÉTERMINATION DE LA TANGENTE.

LE MOUVEMENT DE CHUTE LE LONG DE LA CCYCLOÏDE

A partir de ce qu'on vient de dire, nous allons étudier, à titre d'exemple, le mouvement de chute le long de la courbe cycloïde et ses propriétes mécaniques.

La cycloïde est définie comme la trajectoire que décrit un point d'une circonférence qui roule sur une ligne droite sans glisser sur elle. Cette courbe possède deux propriétés mécaniques fondamentales: LA BRAQUISTOCHRONIE (du grec braquisto = plus court, chronos = le temps) et la TAUTOCHRONIE (du grec tauto = le même, chronos = le temps).
Nous allons étudier la première de ces propriétés, LA BRAQUISTOCHRONIE.

Un livre publié en 1673, écrit par Christian Huygens "HOROLOGIUM OSCILATORIUM" va nous aider à le faire. La deuxième partie de ce livre traite justement cette question: la chute des graves et le mouvement sur la cycloïde. On y voit quelques propriétés géométriques ainsi qu'une étude pour en déterminer les tangentes.

Pour y arriver, la propriété suivante est très intéressante:
Soit maintenant la cycloïde ABC (figure 2). Nous pouvons affirmer que le segment EG est égal à l'arc GB, étant E n'importe quel point sur la courbe.

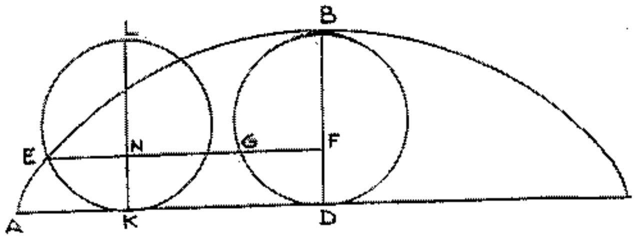


figure 2

En effect: EG = KD = AD - AK = arc(DGB) - arc(GD) = arc(BG)

Soit maintenant une cycloÏde ABC (figure 3) et sur elle un point B quelconque sur lequel on veut mener la tangente:

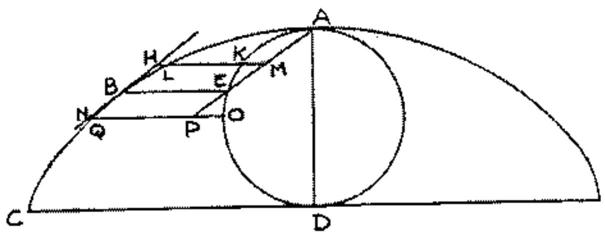


figure 3

Soit décrit autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur et soit menée la parallèle BE à la base de la cycloïde qui rencontre le cercle cité en E, que A et E soient joints et qu'enfin soit menée par B, HBN parallèle. Nous disons que celle-ci touche la cycloïde en B. En effet, prenons sur elle un point quelconque, H, en dessus de B et séparé de lui et un autre point, N, en dessous. Nous démontrerons que ces deux points sont en dehors de la cycloïde, c'est-à-dire, la ligne droite HBN en est tangente en B. Menons la parallèle à la base qui coupe la cycloïde en L, le cercle en K et la droite EA en M. Alors

ML = KL + KM = arc(KA) + KM < arc(KA) + arc (KE) = arc(EA) = BE = HM

Par conséquent H est en dehors de la cycloïde. Nous agirons de la même manière avec le point S.

Una fois la tangente déterminée, nous approcherons la courbe au moyen de petits segments de celle-ci. Nous définissons les polygonales C_k (k=1,2,3,...,n,...) comme le montre la figure 4:

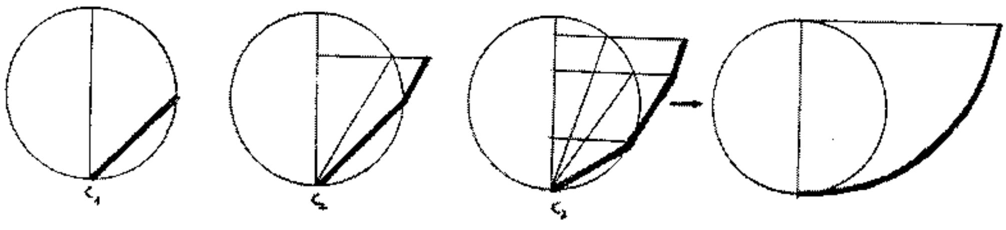


figure 4

C'est-à-dire: des polygonales formées par des segments de tangente, de telle manière que si nous augmentons indéfiniment le nombre de segments, la polygonale "s'approche" de la courbe.

Maintenant nous pouvons faire des considérations sur le mouvement le long de ces polygonales supposant que chaque segment est un plan incliné parcouru à une vitesse constante pour en appliquer les résultats à la courbe.

Un exemple d'application est la résolution du problème de la BRAQUISTOCHRONIE. Ce problème-ci, que Galilée avait étudié mais pas résolu, s'est posé formellement pour la première fois en juin 1696 par Johann Bernouilli dans la revue "Acta Eroditorum Lipsiae" dans les termes suivants:

"Déterminer la ligne courbe qui relie deux points précis, placés à de différentes distances de l'horizon, mais non pas en une même droite verticale, sur laquelle un corps, qui commence un mouvement à partir d'un point supérieur et d'une situation de repos, descendrait le plus rapidement possible vers le point inférieur"

Nous verrons par la suite le schéma d'une solution à ce problème trouvée par la combinaison de quelques idées de Johann Bernouilli sur la polygonale C précédemment définie:

1.-Le principe de Fermat affirme que la lumière va d'un point à un autre en un minimum de temps possible.

2.-La lumière a des vitesses différentes selon le milieu où elle se déplace. Si nous avons deux milieux différents et la lumière se déplace aux vitesses v1 et v2, la loi de refraction énoncée par Snell et démontrée par Hobbes dans son oeuvre "Tractatus Opticus", en 1644, établit la relation suivante entre vitesses et angles:

$$\frac{\sin}{\sin} = \frac{v_1}{v_2}$$

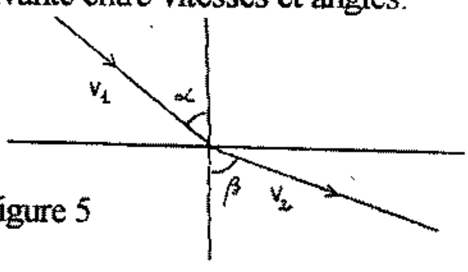


figure 5

3.-Par conséquent, si nous avons deux points, A et B, voir figure 6, la trajectoire poligonale, où la chute se fait en un minimum de temps, considérant que chaque segment est parcouru à une vitesse constante, sera du même type que la trajectoire suivie par la lumière, c'est-à-dire, elle suivra la loi dans ses sommets.

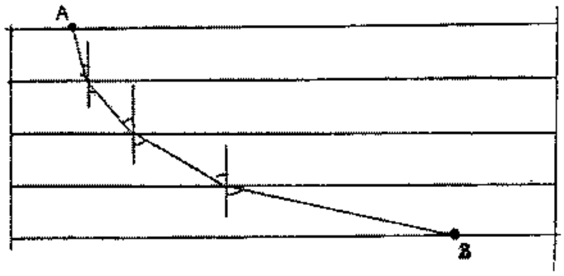


figure 6

4.-Nous allons voir que nos polygonales C_k, avec une assignation de vitesses adéquates, respectent cette condition.
Soit, par exemple, la polygonale C_2 (figure 7):

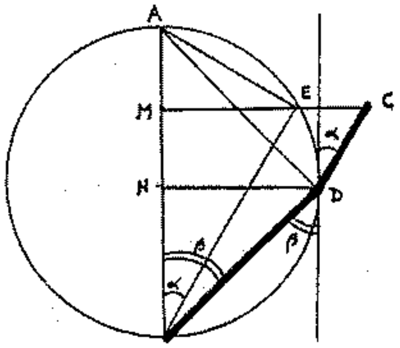


figure 7

Supposons qu'un corps tombe du point C au point B par la polygonale CDB, de telle manière que le segment CD est parcouru avec une vitesse constante acquise par la chute d'une hauteur AM et que le segment DB est parcouru à une vitesse constante acquise par la chute d'une hauteur AN. Dans ces conditions, nous avons:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{AE/AB}{AD/AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{\sqrt{AB\,AM}}{\sqrt{AB\,AN}} = \frac{\sqrt{AM}}{\sqrt{AN}} = \frac{v1}{v2}$$

pour cette dernière égalité nous avons pris en considération ce théorème de Galilée, très connu d'ailleurs, où l'on voit que les vitesses de la chute d'un corps, placé à des hauteurs différentes, sont entre elles comme les racines carrées des hauteurs. Il s'ensuit que les polygonales C sont braquistochrones et, par conséquent, la cycloïde l'est aussi.

O conceito de derivada no ensino da Matemática no Brasil do século XIX

Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

Resumo: A introdução do conceito de derivada nos livros-texto utilizados no Brasil, no século XIX, apresenta uma forte influência francesa. O livro "Tratado Elementar do Cálculo Diferencial e Integral" do francês Lacroix, publicado em 1802, foi traduzido para o português e introduzido no ensino a partir de 1812. Analisa-se o conceito de derivada nesta obra, detectando-se a influência e estilo que o autor seguiu. Além disso, apresenta-se uma outra abordagem de derivada apresentada pelo docente da Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Licínio Cardoso, com declarada concepção filosófica positivista, na obra que publicou em 1885 e que foi utilizada no ensino da referida Academia.

Palavras-Chave: Derivada, Cálculo Diferencial e Integral, Lacroix, Ensino do Cálculo no Brasil no século XIX, Comte.

Introdução

A resolução de problemas relativos a determinação de tangentes, áreas e volumes levou a criação do Cálculo Diferencial e Integral. Esta nova área da Matemática não foi obra de uma única pessoa, mas sim, resultou num esforço de várias gerações. Os trabalhos de Descartes, Wallis, Fermat, entre outros, prepararam o terreno para os matemáticos Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716), que deram uma forma quase definitiva para o Cálculo. As regras de derivação nunca foram um problema para os matemáticos, mas o mesmo não se pode dizer sobre conceitos básicos, tais como limite, continuidade e derivada. Os livros que apareceram após Newton e Leibniz, no século XVIII, tentaram sem sucesso explicar esses conceitos e justificar os seus procedimentos.

O surgimento do novo "objeto matemático" - a **derivada** - trouxe em sua bagagem outros entes um tanto estranhos : quantidades infinitamente pequenas que se aproximam de zero, mas que são diferentes de zero e, mais ainda que poderiam ser desprezadas; quantidades desvanescentes, na linguagem dos matemáticos. Esses entes misteriosos e a complicada passagem ao limite, necessária para a definição de derivada, não alcançou, no século XVIII, uma formulação adequada em termos algébricos.

Segundo Félix Klein, a notação diferencial de Leibniz $\frac{dy}{dx}$ sugere que procedeu-se a um **quociente** de diferenças, mas o **d** em contraposição com o Δ, que se utiliza para diferenças finitas, indica aqui **algo novo**, ou seja, a passagem ao limite. Mesmo que, atualmente[1], a maioria dos autores defina derivada como "limite do quociente de incrementos finitos correspondentes da função e da variável $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ supondo que este limite exista, não se está pensando em $\frac{dy}{dx}$ como um quociente no qual dy e dx tenham uma significação própria e independente". Na visão formalista de Leibniz, era completamente indiferente o significado real que

[1] Felix Klein está se referindo a concepção de derivada do início do século XX.

pudessem ter as diferenciais, ou mesmo que não tivessem nenhum significado, o que importava mesmo eram as operações com aquelas magnitudes que chegavam sempre a resultados corretos.

Acompanhando os desenvolvimentos que a Matemática experimentava, havia a necessidade de se introduzir no ensino os novos resultados produzidos pelos matemáticos. Os livros-texto de Cálculo Diferencial e Integral, destinados principalmente as escolas militares, começaram a surgir no século XVIII. Um nome popular foi Etiènne Bézout (1730-1783), cujo primeiro manual "Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillion et de la marine" surgiu em Paris, em 6 volumes, de 1764 a 1769. Estas obras tinham status oficial e obtiveram a aprovação da Academia de Ciências de Paris para serem utilizados nas escolas.

Bézout foi o autor recomendado para a disciplina de Cálculo Diferencial na Faculdade de Matemática (1772) da Universidade de Coimbra. Segundo Francisco Gomes Teixeira (1851-1933), Monteiro da Rocha, um dos primeiros docentes da Faculdade de Matemática, traduziu os Élements d'Analyse Mathématique de Bézout, e esta foi publicada em edições de 1775, 1785 e 1812. (TEIXEIRA, 1934, p. 229).

O Ensino do Cálculo no Brasil

A introdução do Cálculo Diferencial e Integral como disciplina do currículo do Curso Matemático da Academia Militar do Rio de Janeiro, em 1810, seguiu uma trajetória um pouco diferente daquela da Faculdade de Matemática de Coimbra (1772), que orientou-se fortemente nos livros-texto de Bézout. No Brasil, os nomes Bézout, Anastácio da Cunha, Lagrange e Cauchy não tiveram quase nenhuma repercussão, se compararmos com o nome Lacroix. Entre 1812 e 1814, o português Francisco Cordeiro Torres Alvim traduziu a obra Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Integral (edição de 1802) de Lacroix.

Embora os primeiros docentes do Curso Matemático da Academia Militar do Rio de Janeiro, fundada em 1810, tenham obtido a sua formação acadêmica quase que exclusivamente em Portugal, no nosso país, este autor não teve, curiosamente, influência no ensino do Cálculo. O Curso Matemático da Academia Militar do Rio de Janeiro, em 1810, teve seus princípios e concepção definidos na carta de Lei de 1810. Nela os livros-texto são explicitamente indicados, tornando o seu uso obrigatório no ensino. Assim, gerou-se uma situação similar à francesa, segundo Dhombres, que justifica em certa medida o sucesso dos livros de Lacroix, os quais faziam parte das listas oficiais de autores recomendados para as Escolas Centrais. Desta forma os livros-texto de Lacroix alcançaram, no Brasil, por muitos anos um status oficial.

Com o surgimento da Escola Politécnica de Paris, em 1794, a França passou a ser o centro mundial da Matemática. Dessa escola despontou o principal escritor de livros-texto da época - Sylvestre Lacroix (1765-1843). Ele foi sem dúvida o autor de livros-texto mais produtivo dos tempos modernos, se considerarmos as múltiplas edições de seus livros. O Traité du Calcul différentiel et du calcul intégral é considerado pelos historiadores como um livro importante para a História da Matemática porque apresenta praticamente todos os resultados obtidos na área até aquela época. Grattan-Guinness utiliza a denominação "Grande Lacroix" para esse livro e "Pequeno Lacroix" para o Traité élémentaire de Calcul différentiel et de calcul intégral.

O "Pequeno Lacroix" foi muito difundido na Europa e também no Brasil. A versão de 1802 foi traduzida para o português, entre 1812 e 1814, por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim e foi o primeiro livro-texto de Cálculo, em língua portuguesa, a ser adotado para o ensino da matemática superior, no Brasil. A tradução em língua alemã do livro de Lacroix da quarta edição de 1828 foi feita por Baumann e publicada no ano de 1830 em Berlin. Na Itália, assim como na Espanha, foram feitas várias traduções das obras de Lacroix. A tradução feita por Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim foi publicada pela Impressão Régia, em 1812, no Rio de Janeiro, com o título "Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Integral", segundo Lacroix.

Visconde de Jerumarim - o tradutor de Lacroix

Francisco Cordeiro da Silva Torres e Alvim, Visconde de Jerumarim, nasceu em Portugal em 24 de fevereiro de 1775. Cursou a a Academia da Marinha e foi promovido a guarda-marinha em 1798. Em 1799 era segundo tenente da armada portuguesa e no ano seguinte embarcou na fragata Amazonas e viajou em missão de trabalho para o Brasil, onde permaneceu por dois anos. Em Portugal, trabalhou em problemas de hidráulica relativos ao encanamento do Rio Tejo.

Chegou ao Brasil em 1809 e dois anos depois ingressou como docente da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, e nela atuou por 25 anos. No Rio de Janeiro, trabalhou também como engenheiro e planejou durante o reinado de D. João VI as principais obras hidráulicas para a cidade. Foi um dos fundadores do Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro e um de seus primeiros diretores. Morreu em 8 de março de 1856. Entre as suas obras encontramos: as traduções de livros-texto de Lacroix sobre a Aritmética[2] em 1810, de Álgebra[3] em 1811, de Cálculo Diferencial e Integral em 1812, Apontamentos extraídos de Mr. John Adams sobre pesos e medidas dos EU, em 1833, e várias obras referentes a assuntos de engenharia, economia e geografia.

O Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Integral de Lacroix divide-se em duas partes independentes: a primeira destina-se ao Cálculo Diferencial e a segunda ao Cálculo Integral. O tradutor manteve-se fiel ao texto, ao contrário de Baumann que afirmou ter acrescentado algumas notas ao texto[4].

Lacroix seguiu a tradição de Leibniz e utilizou o termo diferencial, ou mais precisamente, o termo **coeficiente diferencial** para a derivada. Segundo Guiccinardini (GUICCINARDINI, vol.1, p.308) Lacroix, sucessor de Lagrange, deixou transparecer marcas significativas da influência de seu mestre.

Embora o autor coloque o conceito de função como ponto de partida para o Cálculo, não apresenta para este termo uma definição satisfatória. Há falta de clareza na conceituação e parece que o próprio Lacroix não estava muito satisfeito

[2]Tratado elementar de arithmetica de Lacroix, traduzido do francez por ordem de sua alteza real o principe regente, etc, para uso da real academia militar, e acrescentado com taboas para a reducçao das medidas francezas, antigas e modernas, entre si à medidas portuguezas, e reciprocamente. Rio de Janeiro, 1810, 156 p.

[3]Elementos de algebra por Mr. Lacroix, traduzidos em portuguez por ordem de sua alteza real o principe regente, etc, para uso dos alumnos da real academia militar, desta corte. Rio de Janeiro, 1811, 345 pg.

[4]Uma destas notas, a denominada Nota A é uma longa discussão sobre o método dos limites. (Baumann, 1830).

com sua abordagem pois afirma que o significado do termo **função** iria se esclarecer com o seu uso. A idéia de derivada de uma função foi introduzida como o quociente de diferenciais. Inicialmente o autor mostra, através de exemplos, o que acontece com uma função se a variável x recebe um incremento.

Ele considerou a função $u = ax^3$e a partir daí untroduziu a idéia de diferença e diferencial.

> [...] tem-se obtido na expressão $u'-u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$, o desenvolvimento da diferença de dois estados da função u, ordenado segundo as potências do aumento h, que se supõe a variável x, e o limite $3ax^2$ da relação dos aumentos u'-u e h, não depende senão da consideração do primeiro termo $3ax^2$ desta diferença. Este primeiro termo não sendo senão uma porção da diferença, nós o chamaremos de **diferencial**, e o designaremos por du, servindo-nos da letra d, como de uma característica, teremos pois no exemplo de que tratamos $du= 3ax^2h$. Para passar daqui para o limite buscado, será necessário dividir por h, e obter-se-á $\frac{du}{h} = 3ax^2$[...] escreveremos pois em lugar da quantidade h o sinal dx, a fim de conservar a uniformidade e teremos $du = 3ax^2dx$ e $\frac{du}{dx} = 3ax^2$, a primeira expressão será a diferencial de u ou de ax^3, e a segunda que exprime a relação das mudanças simultaneas da função e da variável, tomará o nome de **coeficiente diferencial**, porque a quantidade, quando ela representa não é outra coisa senão o multiplicador da diferencial dx na expressão da diferencial du. Segue-se daqui, que o limite da relação dos aumentos ou o coeficiente diferencial da função se obterá dividindo a diferencial da função pela diferencial da variável, e reciprocamente obter-se-á o diferencial multiplicando o limite da relação dos aumentos, ou o coeficiente diferencial pela diferencial da variável"(§5)

O conceito de limite utilizado por Lacroix é ainda intuitivo. Ele introduziu os dois termos "limite" e "continuidade" sem uma definição rigorosa, como entendemos atualmente.

Quando ele toma como exemplo a função $u = ax^2$ e dá um acréscimo a variável x, obtendo $u' = a(x^2 + 2hx + h^2)$ e subtrai u de u' para depois dividir tudo por h, ele considera que na expressão obtida, ou seja, $\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah$, esta é formada por duas partes, uma delas não depende do valor particular do aumento, mas a outra é afetada por esse valor. "Se se concebe que esta quantidade vá diminuindo, o resultado se aproximará sem cessar de 2ax e não lhe será igual senão supondo h =0, de sorte que 2ax é o **limite** da relação $\frac{u'-u}{h}$, isto é, o valor para o qual ela tende a medida que a quantidade h diminue, e do qual pode aproximar -se-á tanto quanto se quiser". Esta é a primeira referência a palavra limite. Mais adiante ele afirma que a diferencial da função $u = ax^3$ é $du= 3ax^2h$ (onde h é o acréscimo que experimentou a variável x), ele necessita chegar a expressão da derivada e justifica isso dizendo "Para passar daqui a $3ax^2$, que é o **limite** buscado, basta dividir por h, e obter-se-á $\frac{du}{h} = 3ax^2$ ". Relativamente a idéia de continuidade, ela surge quando ele mostra a interpretação geométrica da derivada, ou conforme sua expressão "aplicação do cálculo diferencial a teoria das curvas". Pela lei da continuidade ele entende aquela lei "que se observa na descrição das linhas pelo movimento e segundo a qual os pontos consecutivos de uma mesma linha se sucedem sem intervalo algum". Observa-se, aqui, novamente uma idéia intuitiva de continuidade. Uma curva é contínua se ela for gerada pelo movimento de um ponto, de tal foma que não exista intervalos entre os pontos consecutivos. Esta concepção é muita próxima daquela apresentada por Euler no vol. II do Introductio de 1748.

As regras de derivação surgem no livro-texto sem qualquer motivação, seja ela de caráter físico ou geométrico. A interpretação geométrica só será apresentada no final da exposição das regras de derivação. Mesmo salientando que o cálculo diferencial surgiu por causa de indagações geométricas, segundo Lacroix, ele repousa sobre um **fato analítico** - este importante termo, não tem qualquer explicação no texto. Aqui, é clara a influência do mestre Lagrange:

> [...] qualquer que seja a origem que se dê a este cálculo, ele repousa sempre imediatamente sobre um fato analítico pré-existente a toda a hipótese, como a queda dos corpos graves para a superfície da terra, pré-existe a todas as explicações que se lhe tem dado: e este fato é precisamente a propriedade de que gozam todas as funções, de admitir um limite na relação, que seus aumentos tem com os aumentos da variável, de que eles dependem. (LACROIX, §60).

O livro de Cálculo de Lacroix recomendado desde o início da criação da Academia Militar permaneceu por muitas décadas como o livro-texto "oficial" da escola. Ainda em 1871, deveria ter sido utilizado como livro-texto pois, num exemplar encontrado na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ, que pertenceu a Licínio Cardozo, lê-se questões do exame da primeira cadeira, pelo major Bezerra, (24 de março de 1871). Além das questões propostas estarem escritas manuscritamente nas folhas do livro, Licínio escreveu, nas páginas iniciais, uma das respostas sobre a questão da diferenciação.

As edições do Traité Élémentaire de calcul Différentiel et de Calcul Intégral de Lacroix surgidas no século XIX não apresentam modificações significativas. A sétima edição de 1867 foi revista e ampliada por Hermite (1822-1900) e Serres.

Em 1842 foi publicada a obra "Elementos de Calculo Differencial e de Calculo Integral, segundo o Systema de Lacroix, para uso da Escola Militar" escrita por José Saturnino da Costa Pereira. Esta é possivelmente a primeira tentativa que um docente de Matemática empreende para redigir um livro-texto de Cálculo no Brasil. A análise desta obra ainda não foi concluida, mas pode-se antecipar que o autor encontrava-se ainda muito apegado ao estilo de Lacroix e por isso ela parece não representar qualquer alteração no modo como o cálculo vinha sendo ministrado no ensino. Outra obra, que ainda não conseguimos localizar, foi escrita por Albino Carvalho em 1874 e intitula-se Calculo Diferencial e Integral.

Licínio Athanasio Cardoso

Licínio Athanasio Cardoso nasceu no Rio Grande do Sul. Bacharelou-se em Matemática na Escola Militar, foi capitão honorário do Exército e docente da

Escola Politécnica. Escreveu várias obras entre elas: Theoria da Rotação dos Corpos, em 1887, Theoria Elementar das Funções em 1891, O Ensino que nos convem, em 1925. Foi fervoso defensor das idéias positivistas.

No livro-texto, que escreveu para os alunos da Escola Politécnica, apresenta uma versão do conceito de derivada, distinto daquele de Lacroix. Licínio Cardozo escreveu um texto sui-generis, também ainda muito pouco estudado. Apresentou um conceito de derivada, livre dos infinitamente pequenos e baseado na idéia de limite que ele procura, no fundo fugir: a derivada não é o limite da relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, mas sim, um dos estados da referida relação, quando esta se torna indeterminada. Licínio Cardozo afirma , no prefácio do livro "Teoria Elementar de Funções", ter escrito o referido texto para servir de guia para os seus alunos. Nesta época, ele já deveria ser docente da Escola Politécnica. Em 1890, ele era com certeza docente da referida escola, conforme dados obtidos em fonte manuscrita do Arquivo Nacional. Ainda no prefácio, o autor confessa ser um positivista convicto e orientar-se fortemente nas obras "Política Positiva" e "Síntese Subjetiva" de Auguste Comte: "A opinião de Comte tem para nós o peso de um dogma." (CARDOZO, 1885, p.7).

No prefácio e introdução, o autor expõe os princípios do positivismo e nos três capítulos seguintes, apresenta uma classificação de funções, as derivadas e aplicações e, as noções sobre "diferenças", com fórmulas de Taylor e interpolação.

Algumas vezes, Licinio Cardozo não parece um comtiano muito convicto, parecendo querer fugir das regras restritas do sistema de Comte e formulando suas próprias, como é o caso das categorizações que apresenta sobre funções simples e compostas. Ele inclusive atreve-se a entrar em terreno proibido, como é o caso das funções elipticas (que Comte não abordou). Aqui, ele faz um pequeno comentário sobre os autores que desenvolveram a teoria das funções elipticas e apresenta as integrais elípticas de três espécies, segundo Legendre.

Após abordar os conceitos de limite introduz o conceito de estado principal, o qual ocorre quando há uma indeterminação. O símbolo $\frac{0}{0}$ é chamado indeterminado porque representa todos os números possíveis. A definição de estado principal surge desta maneira: "Chamaremos estado principal do produto de uma quantidade qualquer por $\frac{0}{0}$ (provindo da anulação de duas quantidades idênticas), o que resulta da substituição deste termo por 1. Assim, o estado principal de A x $\frac{0}{0}$, é A" (a.a.O., p.61).

Desta forma, o estado principal de $\frac{a(x-b)}{c(x-b)}$, quando x = b é indicado por $P_b \frac{a(x-b)}{c(x-b)} = \frac{a}{c}$. O conceito de derivada é definido, a partir do conceito de estado principal. Seja y = f(x), onde x é a variável independente e y a variável dependente ou função, e Δx é um acréscimo dado a variável independente x e; Δy é um acréscimo dado a variável dependente y; a derivada da função y é o estado principal de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando o acréscimo Δx torna-se zero, caso em que a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ torna-se indeterminada.

Notação: $P_o \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. (a.a.O.,p.65).

Não há qualquer referência a uma interpretação geométrica da derivada no texto de Cardoso.

A longa lista de autores citados por Cardoso inclui, além de Comte, os nomes de: Descartes, Leibniz, Newton, João Bernoulli, Lagrange, Cournot, Legendre, Mac-Laurin, Taylor, D'Alembert, Fagano, Euler, Landen, Abel, Jacobi, Clairaut, Carnot, Duhamel e Fleury. Este último nome é citado especialmente quando o autor comenta sobre a definição de derivada, substituindo o expressão de limite pela de "estado principal". Cardoso afirma ter seguido neste ponto as idéias do Sr. Fleury. Encontramos vários exemplares da obra escrita por P. Henry Fleury intitulada "Théorie rationnelle de l'inifini mathématque et du calcul infinitesimal", com edições de 1979 e 1889, na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ. Fleury foi também influenciado por Auguste Comte, que ele cita inúmeras vezes. O autor faz uma extensa abordagem sobre o conceito de infinito, sobre grandezas infinitamente pequenas e sobre formas indeterminadas. Estes são conceitos que servem para introduzir a idéia de derivada. De forma muito resumida, apresentamos as idéias de Fleury.

Para exprimir que $\frac{a}{a'}$ representa o valor principal correspondente a x na expressão $y = \frac{ax + bx^2 + cx^3}{a'x + b'x^2 + c'x^3}$ eu escrevo $\frac{a}{a'} = P_0 \frac{ax + bx^2 + cx^3}{a'x + b'x^2 + c'x^3}$.

Se supusermos $y=x^3$ e designando por h o incremento de x e por k o incremento de y, teremos $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, de tal forma que $\frac{h}{k} = 3x^2 + 3xh + h^2$. Se supusermos h infinitamente pequeno então $\frac{h}{k} = 3x^2$. Se h não pode ser nulo, $3x^2$ será o limite da relação $\frac{k}{h}$, mas se fizermos h=0 , diz-se que $\frac{0}{0} = 3x^2$. Mas, como isso não pode acontecer, resulta que $3x^2$ é o valor principal da relação indeterminada e indica-se por $P_0 \frac{k}{h} = 3x^2$. A mesma relação rescreve-se simplesmente $\frac{dy}{dx} = 3x^2$, seguindo a notação de Leibniz.

Após a obra de Licínio surgiram a de Regó e Rego intitulada Tratado de Geometria Diferencial : Estudo Geral da Diferenciação, na Imprensa Nacional em 1891 e a de Roberto Trompowsky de Almeida em 1904, autores estes influenciados, também, fortemente por Auguste Comte.

Observações Finais

O livro-texto de Cálculo de Lacroix foi durante décadas praticamente o único livro utilizado para o ensino de Cálculo, no Brasil. Outros autores como H. Sonnet, L. Francoeur, Bertrand, Duhamel, F. Gomes Teixeira e Gregory, faziam parte do catálogo da biblioteca da Escola Politécnica, mas a sua utilização no ensino era muito reduzida como se pode constatar pelas referências dos autores brasileiros e outras fontes manuscritas. Mesmo que a abordagem do Cálculo por Lacroix não fosse do ponto de vista do rigor satifatória (ele não questionava sobre a diferenciabilidade das funções, por exemplo), ele foi durante muito tempo o único livro-texto de Cálculo da França e o mesmo aconteceu no Brasil.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, R.T. *Lições de Geometria Diferencial.* Rio de Janeiro, Imprensa Nacional, 1904.

BAUMANN, F. *Handbuch der Differential-und Integral-Rechnung von Lacroix.* Berlin: reimer, 1830.

CUNHA, J.A. *Princípios Matemáticos.* Coimbra, Gráfica de Coimbra, 1987.

DHOMBRES, J.French Mathematical Textbooks from Bézout do Cauchy . In. *Historia Scientiarum*, nº28 (1985).

FLEURY, P. H. *Le Calcul Infinitésimal fondé sur des principes rationelles.* Paris, Librairie Centrale des Arts & MAnufactures, 1879.

GRATTAN-GUINNESS, I. Qué es y qué deberia ser el cálculo? In: *Mathesis* 7 (1991).

GUICCIARDINI, N. Three traditions in the calculus: Newton, Leibniz and Lagrange In: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences* (Edited by Grattan-Guinness). Londres: Routledge, 1992.

KLEIN, F.. *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Madrid:Nuevas Graficas, sem ano.

LACROIX, S. *Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Integral.* (Tradução de Francisco Cordeiro da Silva Torres Alvim). Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1812.

LACROIX, S. *Traité Élémentaire de Calcul Différrentiel et de Calcul Intégral.* Paris: Gauthier-Villars, 1867.

LAGRANGE, L.. *Theorica das Funções Analíticas.* (Tradução de Manoel Jacinto Nogueira da Gama). Rio de Janeiro: Impressão Régia, 1812.

LAMANDE, P. *La mutation de l'enseignement scientifique en France (1750-1810) et de Role des Ecoles Centrales: L'Exemple de Nantes.* Université de Nantes. Vol.15 Annee 1988-1989.

OLIVEIRA, J. T. Jozé Anastácio, o Geómetra exilado no interior.In: Em Homenagem a José Anastácio da Cunha. Universidade de Coimbra, 1987.

PEREIRA, J.S.C. *Elementos de Calculo Differencial e de Calculo Integral: segundo o systema de Lacroix.* Rio de Janeiro:Typografia Nacional, 1842.

REGO, A. M. E REGO, A. G., *Tratado de Geometria Diferencial* . Rio de Janeiro:Imprensa Nacional, 1891.

SILVA, C.M.S. A Primeira Faculdade de Matemática. In: *Perspicillum*, vol.8, n.1, novembro 1994.

SILVA, I. F. Dicionario Bibliografico Português: estudos de Innocencio Francisco da Silva aplicaveis a Portugal e Brasil. Tomo segundo. Lisboa. Imprensa Nacional, 1859.

TEIXEIRA, F.G. *Histórias das Matemáticas em Portugal.* Academia das Ciências de Lisboa. Lisboa: Imprensa da Universidade, 1934.

GEOMETRY AND ART IN THE RENAISSANCE MATHEMATICS

Clara Silvia Roero, University of Turin

Everybody knows that from the antiquity the pair of compasses played an important rôle either in history of mathematics for its use in geometry or in general history, for its employment in many other fields, like architecture, astronomy, drawing, painting, sculpture, and so on. For Plato and the Greek mathematicians ruler and compasses were the ideal tools chosen for the solution of all mathematical problems. In Raffaello's fresco, the *School of Athens*, for instance, the group of people in right side represents the geometers, in particular Euclid, with Bramante's features, who showes to four pupils the proof of a theorem using the compasses. And it is not by chance that in some representations of the world creation, God often handles a pair of compasses (cf. *Bible Moralisée*, cod. Vindob. 2554). He is the well known *Deus geometra* or Θεὸς αει γεωμετρει who over and over again appears in pictures and literature. We can mention the verse by John Milton in *Paradise Lost* (1667, VII 225-231):

"He took the gold'n Compasses, prepar'd
In Gods Eternal store, to circumscribe
This Universe, and all created things:
One foot he centerd, and the other turnd
Round through the vast profunditie obscure,
And said, Thus farr extend, thus farr thy bounds,
This be thy just Circumference, O World."

In this paper I wish to devote my attention to the pair of compasses with a fixed opening which in the Renaissance attracted the interest both of artists and mathematicians. This instrument allowed in fact the painters to draw geometrical figures with the greatest possible exactness, a very important quality particularly for that master who had other pupils working for him, to whom it was necessary to give the easiest possible instructions. While the variable opening of compasses can make errors in the geometrical constructions, the fixed one is almost free from measure mistakes. It is also for this reason that the pair of compasses with a fixed opening was called in Italy, during the Renaissance and later on, *fedele*, that is faithful, something trustworthy. Some drawings of this tool appear in treatises of practical geometry, such as in Pomodoro's *Geometria pratica* of 1599 (cf. Plate 1). On the contrary this kind of compasses permitted the Renaissance mathematicians to extend the theory of the geometrical constructions, restricting the field of tools used in Euclidean geometry to solve the problems. It is true that the first mathematicians who attended constructions with such these compasses (the Islamic mathematicians) had no abstract aims, but little by little the things changed and the studies became more and more theoretical. So the point of view by artists, artisans and mathematicians of the Reanaissance, who were interested in compasses with a fixed opening, became quite different.

I intend first of all to show this difference, pointing out the only practical requirement by the painters, whereas the theoretical one by the mathematicians of the Renaissance. The second point is to list some historical and cultural motivations which let this part of geometry to be considered at that time. The third point is to signal when and from whom this patrimony of geometrical knowledge was inherited and how it contributed to the development of the theoretical aspects of the geometry of compasses.

In the history of the geometrical constructions by means of a pair of compasses with a fixed opening, from the antiquity to the Renaissance period, we met the following authors: the Islamic mathematician Abu l-Wafa', the artists Leonardo da Vinci and Albrecht Dürer, and the Italian mathematicians: Ludovico Ferrari, Girolamo Cardano, Niccolò Tartaglia and Giovanni Battista Benedetti.

Abu l-Wafa' in the 10th century devoted a part of his work to find geometrical constructions by help of one single opening of the compasses. It results from the lessons he gave in Bagdad which were collected by a pupil of him and then rewritten and translated into Persian by Abuk Ishah ben Abdallah in a manuscript now kept in the National Library of Paris. At the end of the last century this manuscript was translated into French and published by Woepke (cf. Woepke 1855) and a new edition has been published in 1978. I can not dwell upon all the Abu l-Wafa's constructions. I shall limit myself to one of them. I want to emphasize that Abu l-Wafa' often considers as the fixed opening of the compasses a given definite line-segment, so he is able to obtain constructions much easier than with any other given length. For instance he teaches to construct the regular octagon on the side AB and with the fixed opening AB of the compasses (fig. 1). Having just shown how to do the square ABCD, he extends its diagonals CA, DB and with centers A, and then B, he takes AE = BF = AB. He joins E, F and draws through E, F the perpendiculars EG = FH = AB. He joins G and H and divides by half the right angles between EG and GH, FH and GH. On the line which bisects the angles Abu l-Wafa' takes GI = HK = AB. So he found the requested octagon ABFHKIGE. Abu l-Wafa, who presents many examples of geometrical problems solved by means of compasses with a fixed opening, was probably induced to use such compasses by practical requirements, as the construction of architectural buildings, of manufactured goods, or of astronomical tools.

Islamic art based on a thousand of geometrical patterns needed the support of mathematical knowledge. From the *Rasa'il* by the Brotherhood of purity we read:

"Know oh brother ... that the study of sensible geometry leads to skill in all the practical arts, while the study of intelligible geometry leads to skill in the intellectual arts because this science is one of the gates through which we move to the knowledge of the essence of the soul, and that is the root of all knowledge."

The circle is the symbol par excellence for the "origin" and "end" of both geometric and biomorphic form, so it had a great importance in Islamic arts and in mathematics. The circle was the archetypal governing basis for all the geometric shapes that unfold within it. From the basic circle and the hexagonal arrangement of a group of tangential circles of the same radius surrounding it emerge the three primary shapes: the triangle, the hexagon and the square. From the study of their structure, subdivision, proportional ratios and interrelatedness Islamic mathematicians found the eight semi regular division of a surface, that is the combinations of triangles, hexagons and squares in repeating patterns. Most of them are specimens showing the use of compasses with a fixed opening. Abu l-Wafa', stimulated by architects and sculptors in his treatise of geometrical constructions taught how to do simple constructions of regular polygons, such as the equilateral triangle, the square, the regular penthagon, hexagon, octagon, decagon. Many of these geometrical constructions appear in Islamic ornamental patterns, where we can recognize, for instance, polygons of a different number of sides put one near the other, like in the above mentioned construction of the octagon. Only for a few polygons Abu l-Wafa gave more constructions (as for the penthagon) and he also performed inscribed figures in other ones, for example an equilateral triangle in a square or vice versa. Also these shapes, one within the other we can see in Islamic artistic patterns. I believe that the principal aim of Abu l-Wafa' was to help his contemporaries, artisans and artists, to perform the easiest constructions, not to write a theory of the geometrical constructions by help of a fixed opening compasses. Besides the analogies between the Abu l-Wafa's examples and the ornamental Islamic patterns, I wish attract attention on the following facts:

i) the use of a fixed opening of compasses is not constant in the whole manuscript. There are many other geometrical constructions without this limitation.

ii) no mathematical proof is given, but only the rule of construction.

iii) no systematic order is followed in the series of examples.

iv) among the constructions of the regular polygons inscribed in circumferences Abu l-Wafa' included also the heptagon, that is an approximated construction next to the exact ones.

Moreover, as above said, often the fixed opening of the compasses is equal to the side of the polygon, a fact that has no importance from a theorical point of view, while is easier to construct by an artisan. So I think that it was the practical utility the principal purpose of Abu l-Wafa' and not the theorical aim.

In West we find a similar use of geometrical constructions by means of compasses with a fixed opening in artists like Leonardo da Vinci and Dürer. There are some pages from the manuscripts by Leonardo where we can see the construction of regular polygons inscribed in circles. These constructions (for example the division of a segment into equal parts, the construction of the hexagon, the penthagon, the equilateral triangle and the square) are performed "con uno aprire di seste", that is with one single opening of compasses.

Also in his treatise on geometry written for artists and artisans and for German youth in general Albrecht Dürer gave a number of geometrical constructions. It is very possible that both Leonardo and Dürer had found some of these constructions from texts of practical geometry of the 15th century, which collected or repeated the Islamic constructions. Some analogies with the constructions by Islamic mathematicians, for instance in the case of the heptagon, we can read in Dürer's work of 1525. The construction Dürer gave for the pentagon by means of one single opening of compasses, fixed equal to the side ac of the polygon, is performed with an easy method (Dürer 1532, p. 55; Peiffer 1995, pp. 207-208). The circles (fig. 2) centred in a, and b, intersect together in n and m. Joining m, n and drawing the circle with center m, Dürer cuts the first circle in q, the straight line mn in o and the second circle in b. The line through q and o and through b and o cuts the circles in f and d, respectively. Then the compass is put with centres f and d, it intersects the line through n, m in u, which is the last vertex of the requested pentagon acfud. The only defect of this elegant construction is that this polygon is not regular, as it has been proved by Benedetti and Clavius at the end of the century. In particular Benedetti demonstrated in his treatise *Diversarum speculationum liber* that three of its angles are equal to 108 22', 109 12', 107 2' (Benedetti 1585, pp. 369-370). The same result was later published by Clavius in his *Geometria practica* (Clavius 1604, VIII, th. 11, prop. 29). The fact that Dürer did not write that his own solution was only approximately regular, leads to say that his aim was practical. A difference of about one or two degrees was not regarded as important by an artist; on the contrary it was considered erroneus by the mathematicians of the Renaissance. The above mentioned geometrical construction granted the practical utility rather than the theoretical purpose, but they had also an influence on the pure mathematics.

A few Italian authors in the 16th century decided in fact to treat from a systematical point of view the geometrical constructions by help of compasses with a fixed opening. Among the motivations to the rise of theoretical interest in this subject, besides the examples of geometrical constructions in Islamic manuscripts and at the artists, there were the discovery and edition of the classical works, as the *Elements* by Euclid, the desire to overcome the classical Greek tradition and to show their own abilities. It can not be passed over in silence the sentence Cardano wrote at the end of his treatment of this theory (Cardano 1550): "Sed haec, ut dixi, ac similia ad ostentationem ingenii, utilitatem vero pene nullam inventa sunt", that is "But these things and other similar ones have been invented to show the genius, but their utility is almost null."

This sentence, after all, show us also the abstract aim of those mathematicians. A first theoretical intention appeared perhaps in Scipio Ferreus' writings, although if there are no documents to prove it, but only a statement wrote by Ludovico Ferrari (Masotti 1976, p.).

Certainly the idea of demonstrating some propositions of Euclid's *Elements* using only ruler and compasses with a given opening was first made public in the mathematical disputes between Tartaglia and Ferrari. It is well known that Ludovico Ferrari was one of Cardano's disciples, so the challenge involved also Cardano, with whom Tartaglia was in conflict because of the solution of the third degree equation. In the second answer by Tartaglia of April 20th, 1547 he proposed to Ferrari and Cardano to solve 31 problems, 17 of which were to use a compass with a fixed opening. Ferrari answered to Tartaglia's challenge in October 1547, giving not only the constructions of the 17 problems but also a suggestion to prove all the propositions of Euclid's *Elements* using only ruler and a compass with a fixed opening. The part of the 5th challenge by Ferrari relating to this geometry of the compasses was translated from Italian into Latin by Cardano, and published in 1550 in Cardano's work *De subtilitate*.

It was perhaps under the stimulus of Tartaglia, or of the public mathematical challenges between Tartaglia and Ferrari (in 1547, 1548), that some years later, in 1552 and 1553, Benedetti wrote his first book on the resolution of all Euclid's problems and of some others, using only a given opening of compasses. Here he did not limit himself to give the constructions of the geometrical problems, according to contemporary practice, but provided also their mathematical proofs. He was only 22 years old when he solved his most important theorem:

"Construct the triangle three sides of which are given such that the sum of two of them is greater than the third."

At the end of its solution he wrote:

"And I did this construction against many clever ancient and modern mathematicians who said that this problem was impossible to solve... I found it in October 15th 1552".

So Benedetti recognized the great importance of his theory, as was emphasized by Libri in 1840, by Cantor in 1892 and by Kutta in 1897. Nevertheless the mathematical contemporaries of Benedetti did not appreciate this work very much.

At last in 1560 there appeared Tartaglia's solutions of the 17th problems proposed by himself to Ferrari-Cardano and many others (71 in total). Tartaglia did not mention Benedetti's work, even if some problems here published show similar solutions. The Euclid's axiom on the possibility to draw a circle with any opening of the compasses is by the Renaissance mathematicians changed with the consideration of a fixed opening. Often we can see the illustrations in their works of the pair of compasses with the given opening, as un fig. from the Cartelli di sfida matematica or from *General trattato*.

We know that all the geometrical constructions in Euclidean geometry depend fundamentally on the following problems:

a. to find the intersections of two straight lines

b. to find the intersections of a straight line and a circle

c. to find the intersections of two circles.

As Jacob Steiner proved in 1833 in his work *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur practischen Benutzung*,when the intersections of a straight line and the given auxiliary circle are given direcly (in our case the ruler and the compasses with one single opening) we may next easily solve the following fundamental problems:

1. to draw parallel lines

2. to multiply at will the length of a given line-segment or to divide it into as many equal parts as we choose

3. to draw lines perpendicular to one other

4. through a given point to draw a line which makes with a given line an angle equal to an angle given in size and position

5. to bisect a given angle or to multiply it at will

6. to draw from a given point in any desired direction a line segment that is equal to a line segment given in size and position.

Some of these problems serve to solve under all circumstances the above mentioned chief problems a, b, c. In the writings by the Renaissance mathematicians we read the constructions of all these problems. The comparison among the Euclidean treatment, arising from unrestricted use of compasses, and those by Ferrari-Cardano, Benedetti and Tartaglia by help of a fixed opening of compasses allows to see the analogies and the different methods. In fig. you can see the constructions of the equilateral triangle, the bisection of a given angle, the bisection of a given line-segment, the construction of the perpendicular to a line at a point of this line, how to drop a perpendicular onto a line from a point outside the line.

All these propositions, logically interlinked, proved that the Euclidean construction by means of ruler and compasses can be performed by help of ruler and compasses with one single opening alone.

To answer the question: from whom this patrimony of geometrical knowledge was inherited?

In the following two centuries we find only sporadic authors who were interested in this subject: the Danish mathematician Georg Mohr in the 17th century and the Italian Lorenzo Mascheroni in the 18th century. Georg Mohr published in 1672 a book on the geometry of compasses with the title *Euclides danicus* and in 1673 a little treatise on the geometrical constructions of the first five books of Euclid's *Elements* by means of compasses with one single fixed opening, the *Compendium Euclidis Curiosi*. This last book was written in Dutch language and translated into English by Joseph Moxon in 1677. Mohr could not be influenced by the Italian mathematicians of the Renaissance because he wrote in his introduction:

"For having read in Peter Ramus his Dutch Geometry, printed at Amsterdam 1622 fol. 44 how that one John Baptista hath set forth a Book wherein with one single opening of the compasses, all Euclid's Propositions and Operations. But that Book I could never yet get sight of. Therefore hath my curiosity prompted me to know the same..."

And also the books by Mohr, having a little diffusion, could not be red by other authors, as for instance Mascheroni. In my opinion the Italian mathematician was the only one to inherit the patrimony of the Renaissance tradition, besides the books on practical geometry. His work, the *Geometria del compasso*, published in 1797 and translated from Italian into French by Carrette in 1798 and from French into German by Grüson in 1825 exerted a great influence on the further development of this theory in the first half of the 19th century in France and in Germany. I can mention Lambert, Servois, Gergonne, Brianchon, Poncelet who developed the geometry of the ruler and Steiner for the geometrical constructions with a ruler, given a fixed circle with its center.

[The theory on the geometrical constructions, as it is well known, was improved by Lorenzo Mascheroni (1750-1800) at the end of 18th century with his *Geometria del compasso* (1797) and it was completed by Jean Victor Poncelet (1788-1867) and Jacob Steiner (1796-1863) in 19th century. The first one, that is Mascheroni, proved in 1797 that all geometrical problems can be solved by means of the compasses alone. The French mathematician Poncelet called then attention to the numerous problems whose solution requires simply the use of the ruler and at last Steiner proved that geometrical constructions with ruler and compasses can be constructed with ruler alone, provided that some fixed ausiliary circle is given in the plane. (if a circle and its center are given in the plane of construction.) So Steiner's book *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur practischen Benutzung*, published in 1833, gave to the theory great generality, becoming a milestone for all the future studies in this field.] It is true that the Mascheroni's field of researches was the geometry of the compasses and not of the compasses with a fixed opening, but he wrote in the introduction of his work that he tried to use as few openings of compasses as possible to spare the errors to the artists and the artisans(Mascheroni 1797, p. 4):

"Aggiungeremo qui in favore degli artisti, in grazia dei quali in gran parte quest'opera è stata scritta, che sapendo essi la molestia ed il pericolo di errore, che nasce dall'allargare e stringere il compasso, a varie aperture precise; noi procureremo di sciogliere i Problemi col minimo numero possibile di aperture di compasso. Sarà poi anche meglio per l'artista avere in pronto tanti compassi fedeli, come li chiamano, ossia tali che uno si possa assicurare che conservano appunto l'apertura data."

Even if the intention by the mathematicians of the 18th and 19th centuries about the geometrical constructions was overall theoretical, nevertheless in a few passages of their writings we read that their theory could be of great benefit to artisans and artists.

Mascheroni for instance declares that his *Geometria* will be useful to instrument makers especially in the construction of astronomical instruments and Steiner writes (Archibald, Stark 1950, p. 11):"the present publication might be not less serviceable to engineers and surveyors."

On the contrary the authors of the Renaissance mathematics insisted on their theoretical purpose. Besides the above mentioned sentence by Cardano we can cite from the *Cartelli* the Ferrari's aim (Masotti 1976, p. 141): "io dunque voglio esser quello che a tale inventione dia tutta la perfettione che può havere dimostrando per questa via non solamente alcune propositioni trovate da nostri maggiori, ma etiandio tutto Euclide" and from Cardano's *De subtilitate*: "quo fit ut operae pretium esse duxerim, ne quandoque tam rarum subtilitatis exemplum periret.

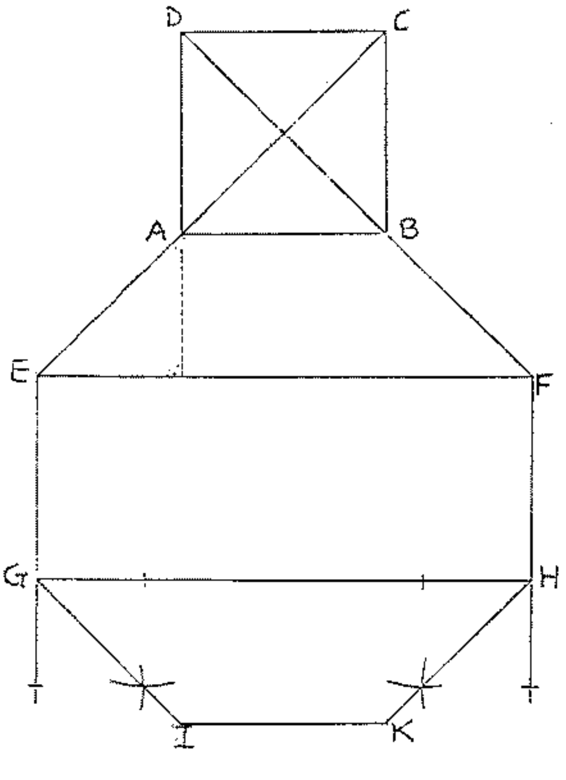


fig 1

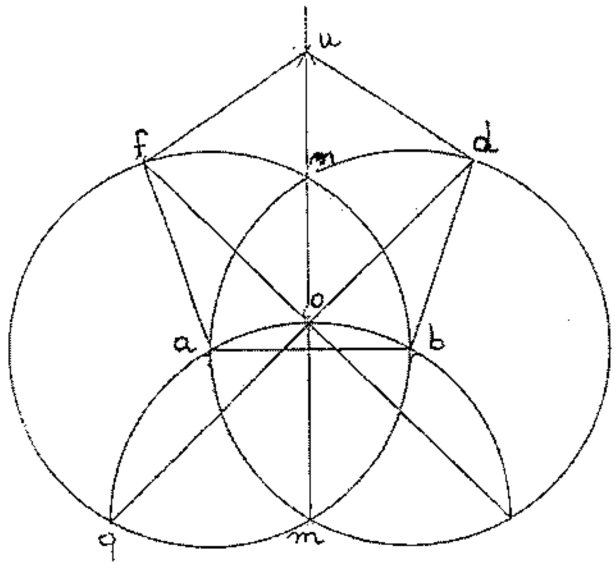


fig. 2

BIBLIOGRAPHY

Abu l-Wafa' 1978 ed. Salah Ahmad Al-Ali, *Ma yuhtaju ilayhi as-sani^c min ^cilm al-handasa [The Elements of the science of geometry which can be used by artisan]*, Bagdad, University Press.

Archibald R. C., Stark M. E. 1950 *Jacob Steiner's Geometrical Constructions with a ruler given a fixed circle with its center,* The Scripta Mathematica Studies 4, New York

Benedetti G. B. 1553 *Resolutio omnium Euclidis problematum aliorumque ad hoc necessario inventorum una tantummodo circini data apertura*, Venetiis.

Benedetti G. B. 1585 *Diversarum Speculationum Mathematicarum et Physicarum Liber Ad Sereniss. Carolum Emanuelem Allobrogum et Subalpinorum ducem invictissimum*, Taurini.

Cardano G. 1550 *De subtilitate,* Norimbergae.

Clavius C. 1604 *Geometria practica* Romae.

Dürer A. 1525 *Unterweisung der messung*...Nurnberg (trad. franc. J. Peiffer 1995, Paris, Seuil)

Dürer A. 1532 *Quatuor his suarum Institutionum Geometricarum libris...* Lutetiae

Geppert H. 1929 *Sulle costruzioni geometriche che si eseguiscono colla riga ed un compasso ad apertura fissa*, Periodico di matematiche, s. IV, vol. IX, pp.292-319.

Kutta W. M. 1897 *Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung*, Nova Acta Abhandlungen der Kaiserl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher LXXI, 8, pp.71-101.

Mascheroni L. 1797 *La geometria del compasso*, Pavia.

Masotti A. 1976 *Ludovico Ferrari e Niccolò Tartaglia Cartelli di sfida matematica.* Riproduzione in facsimile delle edizioni originali 1547-1548, Brescia.

Mohr G. 1673 *Compendium Euclidis Curiosi: Dat is, Meetkonstigh Passer-werck* Amsterdam

Mohr G. 1677 *Compendium Euclidis Curiosi: or geometrical operations* transl. by J. Moxon, The Georg Mohr Foundation 1982

Ravaisson-Mollien C. 1881-1888, *Les manuscrits de Leonard de Vinci,* voll.1-3, Paris.

Steiner J. 1881 *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises..., als* Berlin 1833,Steiner's Gesammelte Werke 1, pp.461-522.

Tartaglia N. 1560 *Libro terzo della Quinta parte del General Trattato di Numeri et Misure*, Venetia.

Woepke F. 1855 *Recherches sur l'histoire des sciences mathématique chez les orientaux,* Journal Asiatique V, 5, pp.218-256.

P14

THE HISTORY OF THE RELATION BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS AS AN ESSENTIAL INGREDIENT OF THEIR PRESENTATION

Constantinos Tzanakis

Department of Education, University of Crete, 74100 Rethymnon, Greece

1. The genetic method

There are quite divergent opinions about the role the history of mathematics could play in its presentation.[1] A very common attitude is simply to ignore it, arguing that a deductive approach is better suited, since in this way all concepts, theorems and proofs can be introduced in a clearcut way. On the other extreme, a rather naive attitude is to follow the historical development of a mathematical discipline as closely as possible, presumably using original books, papers etc. It is clear that both methods have serious defects:

In a strictly deductive approach, the motivation for the introduction of new concepts, theories or proofs is hidden, hence a deeper understanding is not easily acquired. Moreover, in such an approach the emphasis is more on the results and less on the questions and problems that led to them. "From a logical point of view, we need only the answers, but from a psychological point of view, to learn the answers without knowing the questions is so difficult that it is almost impossible" ([1] p.vii). Finally, after maturity has been reached for a mathematical discipline, its deductive - or even strictly axiomatic - presentation is better suited to reveal its logical structure and completeness and it can be useful to those knowing the subject, or at least having enough acquaintance of it or of other related subjects.

On the other hand, a strictly historical approach is not didactically appropriate, since and contrary to what is sometimes naively assumed, the historical evolution of a scientific domain is almost never straightforward and cumulative; it involves periods of stagnation and confusion and new concepts or proofs are not introduced in the simplest and most transparent way. Actually, a historical presentation emphasises real facts, examining problems and theories only to the extent that they are essential to an understanding of these facts ([1] p.vii).We shall adopt an approach between these two extremes, in which knowledge of the basic steps of the historical development of a mathematical subject plays an essential role in the presentation [2]. We may call such an approach **genetic**, since it is neither strictly deductive, nor strictly historical, but its fundamental thesis is that **a subject is presented only after one has been motivated enough to do so, in the sense that questions and problems to which this presentation may answer have been sufficiently appreciated**. Moreover, in such an approach, emphasis is less on **how to use**

[1] By presentation we mean, either teaching in a classroom or writing a textbook, survey article etc.

theories, methods and concepts and more on **why** these theories, methods and concepts provide an answer to specific mathematical problems and questions.

The term genetic, is here used in a sense very close to that used by Toeplitz already since 1926 and appears systematically in [3] and in a more or less similar way in [1], [4]-[6]. More specifically, a genetic approach is based

(i) on a **general knowledge** of the subject's history
(ii) on the determination of the **key steps** of its historical evolution

In this way it is possible

(a) to **realise** conceptual, epistemological or even philosophical **obstacles** that appeared in the historical process and which may possibly reappear in the teaching process. In this way it is possible to decide whether and to what extent a subject can be presented at a particular level of instruction.

(b) to use examples that served as prototypes in the historical process, thus giving the student the opportunity **to understand the motivation** behind the introduction of a new concept, theory , method or proof. In addition the student is thus encouraged to formulate conjectures and to become able to realise why his conjectures or other similar ones that have been put forward in the past, do or do not supply satisfactory answers to the already existing problems.

(c) **to interrelate** completely different, at first glance, domains, thus appreciating the fact that fruitful research activity in a mathematical domain never stands in isolation to similar activities in other domains, but on the contrary, it is often motivated by questions and problems coming from apparently unrelated disciplines.

(d) to make **problem solving** an essential ingredient of the presentation, indispensable for a complete understanding of the subject; many of the historically relevant examples can be restated in sequences of exercises of an increasing level of difficulty, so that each one presupposes (some of) its predecessors. In this way the student has the possibility to arrive at presumably nontrivial results, starting from easy corollaries of the main subject, at the same time the size of a textbook or the teaching time being kept at a reasonable level.

It should be emphasised at this point, that **in a genetic approach, there is no uniquely specified way of presentation** of a given subject. Therefore, it is not a method at all, in the sense of an algorithm; **it is rather a general attitude towards the presentation of scientific subjects in which prevails the desire to explain the motivation behind the introduction of new concepts , theories or key ideas of proofs.**

From what has already been said, it is clear that a genetic approach is not restricted to mathematics only, but it can be applied to any scientific domain capable of deductive presentation, in particular to physics. Thus, in what follows we will illustrate this approach by considering in some detail examples taken from the historical development of mathematics and physics, which at the same time, emphasise the close relationship of these two sciences. Consequently, in the next section a brief account of how this relationship appears historically is given, whereas in section 3 we pass to specific, historically important, scientifically relevant, and didactically appropriate examples.

2. On the relation between mathematics and physics

It must be admitted that at any level of education, there is often a strict separation between mathematics and physics. This fact reflects a corresponding separation of these sciences at the research level, since physicists do not often accept mathematicians, arguing that the latter always stay in a universe of ideal logical rigor, having nothing to do with the real world, whereas mathematicians are suspicious of physicists, characterising them as simple - minded users of mathematics, who do not pay sufficient attention to logical completeness and rigor. That such ideas are erroneous is easily justified by looking at the close relation of the two sciences throughout their history, as it is clearly revealed in the work of great mathematicians, whose contributions to physics rival their purely mathematical works.[2] Evidently we do not mean that the mathematical activity is or should be motivated only by its applications, for instance to physics; we simply want to stress the fact that their close relation indicates that any difference is not so much in method or problems, but mainly in their purpose, [12] ch.II. Historically this relation between mathematics and physics appears in three different ways:

(a) There is a **parallel development** of physical theories and the appropriate mathematical framework, often due to the same persons. Typical examples are (i) the foundation of infinitesimal calculus and classical mechanics in the 17th century, mainly by Newton and Leibniz (ii) the development of vector analysis in the second half of the 19th century, by Maxwell, Gibbs, Heaviside and others, in connection with Maxwell's electromagnetic theory, [13].

(b) New mathematical theories, concepts or methods are formulated in order to solve **already existing** problems, or to provide a solid foundation to methods and concepts of physics. We may think here of classical Fourier analysis, emerging from the partial differential equation of heat conduction; or, more recently (i) Dirac's delta function in quantum mechanics, [14] ch.3, and its later clarification in the context of L. Schwarz's theory of generalised functions, [15] (ii) the foundation of ergodic theory in the 20's and 30's mainly by G. Birkhoff, J. von Neumann and E. Hopf ([16] ch.3, [17] ch.3), motivated by the problems posed by the introduction in

[2] For examples in this century, think for instance of Hilbert e.g. in connection with the foundation of general relativity, [7] ch.7, Minkowski's geometrization of special relativity, [8] ch.5, von Neumann's "Grundlagen der Quantentheorie", [9], and Kolmogorov's renaissance of classical mechanics and dynamical system theory, [10], [11] Appendix 8.

the second half of the 19th century of Boltzmann's ergodic hypothesis in classical statistical mechanics ([18] ch.2, [19] p.10-12, part II section 32).

(c) The formulation of a mathematical theory **precedes** its physical applications. Its use is often made **after** the corresponding physical problems naturally indicate the necessity of an appropriate mathematical framework . Typical examples here are (i) Einstein's work on the foundations of the general theory of relativity in the period 1907-1916, on the basis of riemannian geometry and tensor analysis developped in the 19th century by Riemann, Christofell, Ricci, Levi-Civita and others ([20] ch.12, [21] p.167-168, [22] ch.4) (ii) the invention of Heisenberg's matrix mechanics in 1925, who realised on the basis of purely empirical (spectroscopic) facts that atomic magnitudes have the algebraic structure of (infinite dimensional) complex matrices ([23], [24] Appendix, [25] ch.III).

3. Specific examples

Below we illustrate the genetic method of presentation by considering in more detail three examples, each one corresponding to one of the three different types of interaction of mathematics and physics, that have been outlined in the previous section. [3]

3.1 *Mathematics and Physics evolve in parallel: Calculus and Classical Mechanics*

The basic concepts of calculus are introduced in high school, often in a rather formal way. Given the subtleties involved, it is very helpful to illustrate them by means of many physical examples. For instance, the concept of the derivative of a function helps to overcome a great number of difficulties in any effort to define many physical concepts, like velocity, intensity of electric current, potential of a field etc., or to give simple, unifying answers to problems that can presumably be solved by other methods, which however are more complicated or cannot be easily generalised. Think for instance the unified derivation of the laws of reflection and refraction, using Fermat's Principle of Least Time, as an elementary application of differential calculus to extremum problems (e.g. [26], p.25-27). This can be compared to more elementary geometrical proofs, like that of Hero ([27] ch.26). Many other examples can be given, but perhaps the best ones are taken from elementary applications of simple differential equations. As an example of their fundamental role in physics, one may consider the problem of how the first two Kepler's laws led Newton to conjecture the general validity of his inverse square law of gravitational attraction. In addition, the inverse problem of finding the orbits

[3] More details and further examples (either at the high school or university level) are given in the workshop with the same title, organized in this Summer University (cf. the abstract included in these proceedings).

when the force obeys such a law, leads directly to a nontrivial problem of solving a differential equation, namely

$$d^2r / dt^2 + r = c$$

the trigonometric solution of which can be verified, stating without proof that it is the most general one. Of course all these presupposes a detailed presentation of analytic geometry of conic sections, using vector methods and many details can be given as a sequence of exercises.

3.2 *From Mathematics to Physics: Special Relativity and Matrix Algebra*

In many countries, matrix algebra and elements of (finite dimensional) vector space theory, are introduced in high school's last year mathematics. Given that the aim and power of algebraic methods and concepts lies in the unified approach to distinct, quite different concrete problems, through abstraction, it is expected that high school students, having naturally a lack of mathematical experience, hence of mathematical maturity, meet severe difficulties in the study of abstract algebraic concepts, like matrix vector spaces, linear transformations, group structures etc. Therefore, if such concepts can be taught at all at this level, this ought to be done by giving as many as possible concrete examples (cf. [2a]). For instance, the matrix concept and matrix operations can be introduced via their relation to geometric linear transformations (cf. [2b] sections 2, 3, 5). Below we give an outline of how one can use simple matrix algebra to give an elementary, but nevertheless fairly complete account of the foundations of the special theory of relativity, much in the spirit of Minkowski's original ideas about spacetime ([8] ch.V).

Specifically using the algebra of 2x2 real matrices one can obtain the Lorentz transformation in two dimensions (one spatial and one temporal) in a very simple way and in close analogy to a similar treatment of plane rotations of elementary analytic geometry.

(i) We introduce plane rotations geometrically and show that any such rotation by an angle θ is described by a 2x2 orthogonal matrix A_θ and prove that such matrices form a group under multiplication

$$A_\theta A_{\theta'} = A_{\theta+\theta'} \qquad (1)$$

(ii) Subsequently we may show that A_θ conserves the euclidean norm $x^2 + y^2$ and it satisfies

$$A A^t = I \qquad (2)$$

A^t being the transpose of A and I is the identity matrix.

(iii) After this preparation, the two postulates of special relativity can be introduced, namely (a) the existence of inertial coordinate systems, moving with respect to each other with constant velocity and for which Newton's law of inertia holds (b) the velocity of light in vacuum is constant, equal to c say, in all inertial systems. The aim is to specify the form of the transformation from one inertial system to another. Since by (a) straight lines are mapped to straight lines and assuming the continuity of the transformation, we get that such transformations are linear. Then by (b) the light cone given by

$$x^2 - c^2 t^2 = 0 \qquad (3)$$

is conserved, where (x, ct) are cartesian coordinates in the spacetime plane and it can be shown by elementary means that in general the spacetime "distance" $x^2 - c^2 t^2$ is constant in all inertial systems.

(iv) In close analogy to plane rotations, we look for linear transformations of the plane conserving this spacetime "distance" and we easily find that the corresponding matrices, A say, satisfy (cf. (2))

$$A^t \eta A = \eta \qquad (4)$$

where η is a 2X2 diagonal matrix with diagonal elements $\eta_{11} = - \eta_{22} = 1$. Then simple algebra leads to the following expression for the elements a_{ij} of A

$$a_{11} = a_{22} = \gamma , \quad a_{12} = a_{21} = \alpha , \quad \gamma^2 - \alpha^2 = 1 \qquad (5)$$

where we have required that A is reducible continuously to the identity.

(v) If a certain inertial system moves with velocity v relative to another one, then by considering a point at rest with respect to the latter, it is easily derived that

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} , \qquad \beta = v/c \qquad (6)$$

so that we have obtained the familiar form of the Lorentz transformation.

(vi) It is a computational exercise to show that under matrix multiplication, the Lorentz transformations A_β (cf. (6)) define a matrix group with composition law

$$A_\beta A_{\beta'} = A_{(\beta + \beta')/(1+\beta\beta')} \qquad (7)$$

which readily implies the "relativistic law of velocity addition"

$$\beta'' = \beta \bullet \beta' = (\beta + \beta') / (1 + \beta\beta') , \qquad \beta \in (-1, 1) \qquad (8)$$

giving a nice, nonartificial example of a group structure.

(vii) Equation (6) gives an interesting opportunity to introduce hyperbolic functions, since it is thus possible to make more explicit the analogy between (7) and (1), through the parametrization $\beta = tanh\, \phi$. This implies that (8) is equivalent to

$$tanh\, \phi'' = tanh\, (\phi + \phi')$$

hence (7) is equivalent to

$$A_{\phi + \phi'} = A_\phi A_{\phi'}$$

This is but one example of how the use of simple mathematics helps high school students to understand important physical theories, which are supposed to be "difficult" and unintelligible, at the same time appreciating the power and beauty of abstract mathematical methods and concepts.

3.3 *From Physics to Mathematics: Functional Analysis and the foundations of Quantum Mechanics*

As a final example, we consider the introduction of abstract mathematical concepts at the level of an undergraduate mathematics course; specifically, we consider the introduction of some basic concepts of functional analysis.

As a theory of infinite dimensional vector spaces, functional analysis appears already at the beginning of this century in the works of Fredholm, Hilbert, Volterra, Riesz and others, in the study of integral equations ([28], Introduction). However, it is well known that there was a great impulse in its development just after the invention of quantum mechanics (QM), which called for new mathematical concepts and methods. As a typical example we may consider von Neumann's contributions to the mathematical foundations of QM, [9]. What is perhaps less known, is that in his works he introduces **for the first time**, concepts and methods which today appear **a priori** and **in full generality** in a functional analysis course, whereas this generality was motivated by the mathematical questions QM posed. There are many examples of abstract concepts the introduction of which could be motivated on the basis of quantum mechanical problems. A small sample is the following:

(a) Heisenberg, Jordan and Born on the one hand and Schroedinger on the other, have formulated apparently totally different theories of the atomic phenomena, matrix and wave mechanics respectively, which however led to experimentally identical results. Thus both theories should be true and therefore the question of their relation naturally arose. In a somewhat nonrigorous way, Schroedinger showed that the underlying mathematical structures are isomorphic Hilbert spaces, a result that finally led von Neumann to formulate the abstract concept of a **separable Hilbert space**, and show **the isomorphism of all such spaces**, hence of the two physical theories as well ([28] p.172, [29] p.2).

(b) The spectrum of a bounded operator and the corresponding spectral resolution appears already in the work of Hilbert (1906) on integral equations and the work of Riesz on compact (hence bounded) operators (1916-18). However, most physically relevant **quantum mechanical operators are not bounded**! This led von Neumann to introduce the concept of a closed operator, to the study of densely defined such operators, to the distinction between self adjoint and hermitian operators etc. ([28] ch.VII section 4, [30] section 6.3 p.318-319).

(c) The central problem of Matrix mechanics was the diagonalization of the Hamiltonian operator by an appropriate similarity transformation. The physical requirement that quantum mechanical probabilities of energy states should be conserved under such transformations, gives the latter in terms of unitary operators. This was a main motivation for the clarification of the spectral analysis of normal operators, a special case of which are self adjoint and unitary operators.

(d) Originally, quantum mechanical operators were represented by infinite dimensional matrices, the diagonal elements of which gave quantum probabilities. This was the main motivation for the study of hermitian extensions of a hermitian operator, leading to criteria for the extension of a closed hermitian operator to a self adjoint operator, and consequently to the result that all hermitian extensions have the same matrix in a given complete orthonormal basis. Therefore, the matrix representation of Hilbert space operators is ambiguous ([28] ch.VII section 4). This led to the conclusion, that the mathematically appropriate formulation of the statistical interpretation of QM is given via the eigenprojections appearing in the spectral analysis of an operator ([30] ch.6).

The above examples give a very brief outline of the way the historical development of a mathematical discipline can motivate its genetic presentation in the sense described in section 1.

REFERENCES

1. H.M. Edwards, *"Fermats's last theorem : A genetic introduction to algebraic number theory"*, Springer 1977

2. (a) C. Tzanakis, Proceedings of the *First European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education,* IREM de Montpellier 1995, p.271 (b) C. Tzanakis, *Int. J. Math. Education Sci. Techn.*, **26** (1995), 45 (c) M. Kline, *"Why Jonny can't add? The failure of the new Mathematics"* (greek edition 1990), ch.4

3. O. Toeplitz, *"The calculus : A genetic approach"* , University of Chicago 1963

4. G. Polya, *"Induction and analogy in mathematics"* , Princeton U.P. 1954

5. J. Stilwell, *"Mathematics and its history"*, Springer 1989

6. H. Rademacher, O. Toeplitz, *"The enjoyment of mathematics"*, Dover 1990

7. J. Mehra in *"The physicist concept of nature"*, J. Mehra (ed.), D. Reidel 1973

8. A. Sommerfeld (ed.), *"The principle of relativity"*, Dover 1952

9. J. von Neumann, *"Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik"*, Springer 1932

10. A.N. Kolmogorov in the *"Foundations of mechanics"* by R. Abraham, J.E. Marsden, Benjamin/Cammings Publishing Co. 1978, Appendix D

11. V.I. Arnold, *"Mathematical methods of classical mechanics"*, Springer 1978

12. M. Flato, *"Le pouvoir des Mathématiques"*, Hachette 1990

13. M.J. Crowe, *"A history of vector analysis"*, Dover 1967

14. P.A.M. Dirac, *"The principles of Quantum Mechanics"*, Oxford U.P. 1958

15. L. Schwarz, *"Théorie des distributions"*, Herman 1950

16. I.E. Farquhar *"Ergodic theory in statistical mechanics"*, Wiley 1964

17. A.I. Khinchin, *"Mathematical foundations of statistical mechanics"*, Dover 1948

18. P. Ehrenfest, T. Ehrenfest, *"The conceptual foundations of the statistical approach to mechanics"*, Dover 1990

19. L. Boltzmann, *"Lectures on gas theory"*, California U.P. 1964

20. A. Pais, *"Subtle is the Lord... The science and life of A. Einstein"*, Oxford U.P. 1982

21. D.J. Struik, *"A concise history of Mathematics"*, Dover 1948
22. M. Spivak, *"Differential Geometry Vol.II"*, Publish or Perish 1970
23. B.L. van der Waerden (ed.), *"Sources of Quantum Mechanics"*, Dover 1967, pp. 19-36, 261-321
24. W. Heisenberg, *"The physical principles of the Quantum Theory"*, Dover 1949
25. J. Mehra, H. Rechenberg, *"The historical development of Quantum Theory, vol. 3"*, Springer 1982
26. G.F. Simmons, *"Differential equations with applications and historical notes"*, McGraw Hill 1974
27. *"Greek Mathematical works vol.II"*, The Loeb Classical Library, Harvard U.P./Heinemann 1941
28. J. Dieudonné, *"History of Functional Analysis"*, North Holland 1981
29. M.H. Stone, *"Linear transformations in Hilbert space"*, American Mathematical Society 1932
30. M. Jammer, *"The conceptual development of Quantum Mechanics"*, McGraw Hill 1966.

"Tecnologias da Informação e Alteração do Ensino da Matemática. Uma perspectiva histórica."

Bentes Paulo, J. M., Departamento de Informática, Universidade do Minho

a matemática e as tecnologias da informação

O aparecimento dos computadores deveu-se principalmente à necessidade de se resolverem, em tempo útil, problemas envolvendo cálculos morosos e complexos.

O seu desenvolvimento subsequente esteve relacionado com a manipulação de grandes quantidades de informação, impossível de se realizar com as tecnologias preexistentes. São uma *criação* e simultaneamente *criadores* da Matemática. Não teriam sido inventados sem o apoio da matemática continua Newtoniana e a sua arquitectura depende do evoluir das matemáticas discretas e finitas.

A fronteira entre a tecnologias da informação (TI) e a Matemática sempre foi de difícil definição pois, os objectos de estudo e métodos de trabalho têm muitos pontos em comum.

Alguns domínios "clássicos" das Matemáticas intervêm directamente no desenvolvimento dos computadores.

Por exemplo a topologia algébrica é utilizada para o desenho de circuitos VLSI (Very Large Scale Integration), a geometria algébrica aplica-se na robótica para determinar se um objecto com uma dada forma e dimensão pode ou não atravessar, sem colidir, um dado sistema de obstáculos.

O desenvolvimento de estudos teóricos sobre algoritmos é crucial no desenvolvimento da informática. Por exemplo, Strassen, em 1968, mostrou que se pode executar o produto de duas matrizes quadradas (2 por 2) com apenas sete multiplicações em vez das oito previstas (aumentando o número de adições [Horowitz & Sahni, 1978]. Como as adições são mais rapidamente executáveis, a generalização posterior deste resultado, permitiu poupar muito tempo na execução de multiplicação de grandes matrizes.

Novas especialidades na investigação matemática, como, por exemplo, a teoria dos algoritmos, lógica formal, teoria dos grafos, são resultado directo da sua utilização.

Existiu sempre uma estreita relação entre os conceitos matemáticos e os métodos de cálculo. Cálculos até agora impraticáveis são agora possíveis, basta planificar o trabalho. Os computadores permitem calcular mais, melhor e mais rapidamente, o exemplo do cálculo de números primos é paradigmático.

Com são máquinas lógicas, discretas e finitas, o seu funcionamento levanta questões de optimização que conduzem a novos estudos no domínio dos grafos, da investigação operacional, etc..

O estudo de sistemas dinâmicos, de iterações de transformações e do processo estocástico receberam um novo estímulo produzindo inclusivamente uma nova terminologia (fractal, etc.).

O próprio processo de demonstração matemática sofre a sua influência, surgem novos tipos de demonstrações - numéricas e algorítmicas. Por exemplo, no caso da demonstração do teorema das "quatro cores" serviu para verificar milhares de casos. .

Apesar de não ser uma disciplina laboratorial, no sentido formal das outras ciências, na Matemática sempre existiu uma componente experimental e a observação sempre teve um papel importante na investigação.

Modelos matemáticos são elaborados e executados em computadores servindo como "ferramentas" iniciais para formular hipóteses mais amplas e gerais. A descoberta da solução de algumas equações não lineares foi realizada por experimentação numérica antes de se ter desenvolvido uma teoria rigorosa.

O desenvolvimento dos recentes Sistemas de Cálculo Algébrico (CAS - Computer Algebra Systems) permitem o cálculo com símbolos - realizar operações com fracções racionais, factorizar polinómios, derivar e integrar uma função, resolver certas equações e sistemas lineares, etc. - é, sem dúvida, um dos novos campos de investigação matemática onde se estreita esta inter-relação entre a Matemática e as TI.

Apesar de ainda não se verificar alterações de maior nos actuais curricula académicos, parece pois evidente que esta inter-relação terá de se vir a reflectir no ensino da matemática.

as tecnologias da informação e o ensino

Nas décadas de 50-60 a sua utilização cingiu-se praticamente aos domínios administrativos e científicos\engenharia, sem qualquer propósito educativo. A grande maioria dos computadores de então admitia a linguagem de programação científica FORTRAN (FORmula TRANslator) e outra comercial COBOL (COmmon Business Oriented Languages). Só em 1970, Niklaus Wirth define uma linguagem para o ensino da "boa" programação - Pascal - mãe das linguagem imperativas actuais.

Como vimos, a utilização científica das possibilidades de cálculo dos computadores permitiram ampliar o domínio dos números com os quais era possível trabalhar e desenvolver novos métodos de cálculo numérico. Logo, não é de admirar que no final da década de sessenta e no âmbito do ensino universitário, se introduza a componente de Análise e Cálculo Numérico, onde o computador aparece pela primeira vez em ambientes educativos.

As actividades realizadas pelos estudantes enfatizavam inevitavelmente a escrita de programas informáticos para a resolução de problemas específicos. Apesar de se procurar controlar os resultados do algoritmo através da estimativa do erro cometido, o principal objectivo não era questionar a acurácia ou a eficácia do algoritmo em si, mas sim, obrigar o aluno a estudar e pensar sobre o tópico em questão.

Do ponto de vista pedagógico, o aluno deixava de ser passivo e\ou sujeito, previamente a toda uma série de argumentos teóricos e organizados linearmente sobre o tema . Envolvia-se directamente na sua resolução.

Esta abordagem evoluiu rapidamente no sentido da minimização da actividade de escrita dos programas em benefício da actividade de descrição do processo de execução do computador e de análise dos resultados obtidos. Esta necessidade levou à criação de novas linguagens de programação mais "amigáveis" e, mais tarde de aplicações informática (de uso genérico e\ou específico).

O advento dos conceitos de "interactividade" e de "interface amigável" vieram a permitir o aparecimento de novas aplicações cuja vertente educativa foi o EAC - Ensino Assistido por Computador (CBL - Computer Based Learning, na terminologia anglo-saxónica).

Na sua forma mais rudimentar nas aplicações EAC resumia-se a uma sessão de treino, no sentido behaviorista do termo, onde se colocava o aluno perante um conjunto de questões de resposta múltipla. Partia-se, então, do princípio que o aluno seria capaz, por si só, de identificar os domínios onde o seu conhecimento era deficiente, que a aprendizagem seria reforçada pela apresentação das respostas correctas e ainda que o acesso por parte do docente, do registo do percurso permitiria uma determinar quais os tópicos mais adequados à melhoria do seu processo de aprendizagem.

Devido rápido desenvolvimento das possibilidades tecnológicas a partir de 1985, surgem uma grande quantidade de aplicações educativas. A proliferação e a controvérsia gerada em torno destas aplicações, reflecte-se especialmente na terminologia anglo-saxónica utilizada para classificá-las. Os termos CAL, CAI (Computer Assisted Instrution), CBI (Computer Based Instruction), CBL (Computer Based Learning), CBE (Computer Based Education) são todos utilizados para designar aplicações informáticas criadas para o ensino-educação.

O termo CAI ficou normalmente conotado com o ensino programado e\ou treino (drill and practice) - abordagem behaviorista da utilização de computadores no ensino - e o termo CBL inclui, hoje, todas as aplicações informáticas que envolva actividades de aprendizagem e\ou ensino abarcando inclusive situações onde o computador é utilizado como uma ferramenta educativa.

Seguindo as sugestões de Taylor (1980), e Thomas & Broyson (1984) podemos agrupar as aplicações informáticas educativas relativamente ao modo como são utilizadas no processo de ensino: aplicações que geram o *experiência\integração*, facilitam o *acesso à informação*, ampliam a *produtividade* pessoal e que facilitam a *comunicação* entre indivíduos e\ou grupos. Note-se que uma mesma aplicação, em diferentes contextos de utilização, pode ser incluída em mais de um dos níveis anteriores.

Na primeira categoria, a aplicação é utilizada no sentido de providenciar a realização de experiências e\ou modelos onde se apresentam, intuitivamente, os conceitos básicos como ponto de partida. Jogos educativos, programas de simulação em geral, micromundos - como o Cabri géomètre, o ambiente gráfico do LOGO (tartaruga), - são alguns exemplos de aplicações que permitem o utilizador explorar e manipular realidades artificiais onde, simultaneamente. podem associar ideias prévios ainda desconexas e\ou aplicar os novos conhecimentos a novas situações.

Os Sistemas de Ensino (SE) ou Tutoriais e os Sistemas de Disseminação de Informação (SDI) são os programas mais usados para fornecer informação. Nos Tutoriais a informação é apresentada pedagogicamente, i.e., existe uma componente de ensino que apresenta a informação estruturada, arbitra e avalia a performance e interage com utilizador de forma a optimizar a qualidade da aprendizagem. Nos SDI a apresentação da informação centra-se na basicamente na organização, estrutura e apresentação do conteúdo sem uma preocupação explícita na optimização da aprendizagem.

Estes sistemas são usualmente aplicações multimédia, onde a informação se encontra organizada de modo não linear, que admitem um grau de interactividade significativo e uma multiplicidade de suportes de informação - texto, gráficos, imagens digitalizadas, sequências vídeo, audio.

No domínio da Inteligência Artificial, tem sido desenvolvidos protótipos de sistemas de ensino e\ou os de disseminação de informação "inteligentes" por exemplo no domínio do diagnóstico médico, da aprendizagem da linguagem de programação LISP, etc.. Estes protótipos são ainda muito rudimentares mas apresentam-se como um novo campo promissor para a educação e ensino

No âmbito da produtividade pessoal, existem um conjunto de aplicações - Programas de autor multimédia, Editores e Processadores de Texto, Folhas de Cálculo, Bases de Dados, Sistemas de Cálculo Algébrico, programas de Cálculo Estatístico, etc. - que podem ser utilizadas, durante uma situação pedagógica, para ampliar as capacidades de execução, eliminando ou minimizando aspectos rotineiros ou morosos - gráficos, numérico, algébrico - das actividades a realizar.

Por outro lado, o emergir dos sistemas de *comunicação* informáticos abriu um novo e promissor campo de utilização dos computadores na educação e ensino cujo focus é o modo como as TI podem ser utilizadas para mediar e apoiar o processo de comunicação entre membros de uma comunidade envolvida em actividades de aprendizagem independentemente de restrições inerentes ao tempo e\ou local.

Existem já uma gama significativa de serviços de telecomunicações - transferência de ficheiros, mensagens, notícias, conferência electrónica, vídeo-conferência, etc. - estruturados para facilitar a comunicação entre indivíduos no local e temporalmente dispersos, onde o computador surge como mediador na comunicação e facilitador do trabalho colaborativo e cooperativo. Podem ser usados em sala de aula mas as potencialidades serão, provavelmente, mais adequada a contextos de ensino aberto e a distancia na construção e criação de *salas de aula virtuais* [Hiltz,1994].

O verdadeiro problema na utilização das TI no ensino está no "como utilizá-la" de modo a que promova a aprendizagem e estimule o interesse pelos conteúdos e não no mecanismo de distribuição.

O sucesso da utilização educativa de uma tecnologia inovadora em particular depende principalmente do contexto em que se insere e não da tecnologia *per si*. Depende, por exemplo do modo de modo como se integragra no curso global, do apoio dispensado pela instituição em termos de recursos, quer materiais, quer de estudo e ainda das oportunidades geradas pelo professor - de interacção, relacionamento e "feedback".

No contexto da utilização das TI no ensino, os papeis, quer do professor, quer do aluno são claramente diferente dos tradicionais e exigem um conjunto de "skills" e atitudes diferentes perante o processo de aprendizagem. A Escola, como instituição, terá também de realizar um esforço significativo de transformação de modo a apoiar o aperfeiçoamento do trabalho dos professores e alunos neste novo ambiente, nomeadamente no que se refere a bibliotecas, procedimentos administrativos, infra-estruturas e equipamento.

tecnologias da informação e o ensino da matemática

Tal como as primeiras calculadoras, simples "máquinas aritméticas", vieram perturbar o paradigma confortável da aritmética na escola primária, também as actuais e sofisticadas calculadoras (computadores), que se comportam como "máquinas matemáticas", irão inevitavelmente abalar o ensino da matemática, quer secundário, quer universitário.

Estas máquinas fornecem um conjunto de ferramentas numéricas, gráficas e simbólicas que proporcionam inúmeras oportunidades de alteração curricular no ensino da matemática.

Para alunos que tenham dificuldade em compreender conceitos importantes como o de Variável, Expressões, Equações e Inequações, os programas gráficos e as folhas de cálculo são ferramentas que facilitam a conecção entre as formas simbólicas, as imagens visuais e os padrões numéricos pré-existentes.

Os alunos que tenham dificuldade em manipular expressões algébricas os CAS podem executar esses procedimentos.

No entanto, a utilização dos computadores pode ser negativo se os estudantes não possuírem previamente alguns conhecimentos e conceitos de matemáticos. Lehning e outros investigadores mostraram que os CAS podem servir para detectar algumas concepções erróneas e que só a partir de um certo nível de conhecimentos matemáticos é que os estudantes tiram proveito do seu uso [Lehning et all, 1995].

Há, portanto, que ter em atenção o facto de que o funcionamento didáctico é feito de permamanências, de regularidades funcionais e nem sempre o que a tecnologia é capaz de realizar é do que queremos realizar. Não podemos esquecer estes factos, sob pena de dificultar a integração educativa das TI e a sua viabilidade na sala de aula.

As relação entre o uso da computador e o currículo é uma relação dinâmica e complexa. O impacto dos computadores e calculadoras gráficas não só altera a relação entre alunos e professores, altera também a visão que a Escola e os professores têm do conhecimento matemático, da forma como se aprende e ensina esse conhecimento.

O trabalho passa a ser orientado no sentido da realização de problemas mais complexos e mais "reais" (problemas que envolvem esquemas não-algorítmicos, soluções e critérios múltiplos) e a matemática aparece como um corpo de conhecimentos em evolução, aberto à experimentação e à produção de conjecturas e à modelação de situações reais. [Gómez e & Carulla,1995].

Relativamente à aquisição de conhecimentos Matemáticos e de aptidões (skills) de Cálculo, a utilização de computadores e calculadoras na sala de aula fez renascer o interesse pelo ensino do cálculo mental (aritmético), o cálculo de estimativas, a problemática da visualização matemática, assim como, pela abordagem experimental da matemática.

Os métodos de cálculo mental e de estimativas não são só importantes para a verificação de resultados. São uma das pedras base na monitorização, avaliação e controlo do processo de cálculo. [Boers & Jones, 1994; Reys & Nohda, 1993].

A visualização matemática, estática, dinâmica ou interactiva, facilitada pelos computadores deverá ser, sempre que possível, associada aos correspondentes aspectos numéricos e simbólicos.

Por exemplo, na Análise, o estudo dos gráficos de funções é introduzido normalmente após um longo período de manipulação de entidades numéricas e simbólicas. Muitas das dificuldades na compreensão das funções nas suas variadas representações numéricas, visual e simbólica podem ser minimizadas através da utilização de CAS ou de software específico (Function Analyser, etc.) onde a presença simultânea das suas múltiplas representações, pedagogicamente enquadradas permitem o desenvolvimento de novos tipos de compreensão conceptual [Zimmermann & Cunningham, 1990; Yerushalmy & Shwartz, 1993].

A abordagem experimental no ensino da matemática tem como finalidade motivar os alunos para matemática e suas aplicações e levando-os a formular e testar hipóteses. Alguns exemplos particularmente interessantes da utilização dos CAS neste sentido foram desenvolvidos por Arney (1991), Burbulla & Dodson

(1992) e Leinbach (1991). O projecto METIP [Tanimoto,1995], usando de técnicas de processamento de imagem digital, desenvolveu um conjunto de experiências "laboratoriais" no domínio da aritmética, da álgebra e das probabilidades.

nota final

É conhecida e compreensível a reacção dos professores de Matemática à utilização das máquinas de calcular e computadores no ensino da matemática. Na verdade, parte substancial do seu papel era fazer com que o aluno aprendesse e executasse as regras da aritmética ou do álgebra. Portanto toda a "máquina" que tornasse desnecessária essa aprendizagem tornava-se um obstáculo. Hoje a sua utilização é incontestável mas os probemas ainda não foram resolvidos.

A história das tecnologias ligadas à informação mostra que após o aparecimento uma nova forma (o quadro e o giz, imprensa, gravadores de som, rectroprojectores, vídeo gravadores, computadores, etc.) os professores procuram, com maior ou menor sucesso, usufruir das possíveis vantagens das suas potencialidades educativas. Apesar da complexa e difícil relação entre ambas, nem sempre as alterações no domínio da educação são consequência das modificações tecnológicas e vice-versa.

Um dos potenciais perigos do uso das TI nas escolas parece-nos estar no facto de, após o entusiasmo e investimento inicial, a tecnologia seja relegada e os professores voltem aos métodos tradicionais, perpetuando-se o desfasamento entre ela e a sociedade e, em particular, o mundo do trabalho.

referências

Arney, D.C. (1991) - *Derive® Laboratoriy Manual for Differential Equations.* Eddison-Wesley Pub. Company, U.S.A..

Boers, M.A.M. & Jones, P.L. (1994) - Student's use of graphics calculators under examination conditions. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 25 (4), 491-516.

Burbulla, D.C.M. & Dodson, C.T.J. (1992) - *Self-Tutor for Computer Calculus Using Mathematica.* Prentice-Hall, Canada.

Gómez, P. & Carulla, C. (1995) - Calculadoras Gráficas y precálculo. Efectos en el diseño curricular. Documento não publicado.Bogotá, Universidade de los Andes.

Hiltz, S. R. (1994) - *The Virtual Classroom: Learning without limits via Computer networks.* Ablex Publishing Corporation, New Jersey.}

Horowitz E., Sahni S. (1978) - *Fundamentals of Computers Algorithms.* Pitman Ed., U.K..

Lehning, H. (1995) - Learning mathematics with CAS. Proceedings of*IFIP -World Conference on Computers in Education VI:Liberating the Learner, "WCCE'95"*, Birmingham, U.K.

Leinbach, L.C.(1991) - Calculus*Laboratories Using Derive®*. Wadsworth Pub. Company, U.S.A..

Reys, R.E. & Nohda, N. [Ed.] (1994) - *Computational Alternatives for the Twenty-first Century: Cross-cultural Perspectives from Japan and the United States.* NCTA Inc., U.S.A..

Tanimoto S.L. (1995) - Exploring mathematics with image processing. Proceedings of*IFIP - World Conference on Computers in Education VI:Liberating the Learner, "WCCE'95"*, Birmingham, U.K. (http:// www . cs. washington. edu / reseearch / metip/).

Taylor, R. [Ed.] (1980) - *The Computer in the Scholl: Tutor, Tool, Tutee.* Teachers College Press, U.S.A..

Thomas, R.A. & Boysen, J.P. (1984) - A Taxonomy for the instructional use of Computers. *AEDS Monitor*, 22 (11,12),15-26.

Yerushalmy, M. & Shwartz, J.L. (1993) - Seizing the Opportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting. in Romberg, T., Fennema, E. e Carpenter, T.P. [Ed.] - *Integrating Research on Graphical Representation of functions.* Lawrence Erlbaum Associates, Pub., U.K..

Ymaguti Masaya (1985) - The Influence of Computers and Informatics on Mathematica. Proceedings of *ICMI Symposium - "The Influence of Computers and Informatics on Mathematica, and Its Teaching* ", Strasbourg.

Zimmermann, W & Cunningham, S. [Ed.] (1990) - *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* MAA, U.S.A..

L'ARITHMETIQUE AUX COMMENCEMENTS DES ÉCOLES NORMALES PRIMAIRES EN ESPAGNE

Dolores CARRILLO GALLEGO. Universidad de Murcia

Cet article fait partie d'une étude que nous sommes en train de réaliser sur l'enseignement de l'arithmétique dans les Écoles Normales (E.N.)

Les lois et les règlements qui régissent les études dans ces écoles ne mentionnent quasiment que le nom des matières. C'est pourquoi nous devons avoir recours à d'autres formes d'analyses, parmi lesquelles quelques unes sont utilisées dans cet article.

Nous citons les connaissances arithmétiques exigées à l'examen pour obtenir le titre de maître, avant et à l'époque de la création des E.N.; connaissances qui montrèrent une progression régulière.

Malgré cela, l'arithmétique étudiée en l'E.N. était très élémentaire, ne dépassant pas le niveau de celle étudiée en école primaire. Nous mettons en relief ce fait en analysant la philosophie des études en E.N. et les connaissances arithmétiques exigées pour y avoir accès.

Nous étudions aussi les examens pour obtenir le titre de maîtresse (moins bien régis que ceux des hommes) et pour lesquels l'importance de l'arithmétique est moindre.

Les examens des maîtres

En 1771 est mise en place une Provision Royale ([5], p. 417-418) qui règle un unique titre de maître valable pour tout le royaume. Elle établit que les examens doivent être réalisés dans les mairies et que la confrérie de San Casiano, association corporative des maîtres de Madrid en ait ensuite una partie du contrôle. Les examens traitaient "sur sa compétence en art de lire, d'ecrire et de compter en le faisant écrire en sa présence différentes lettres, et en faisant étendre des exemplaires des cinq comptes comme c'est prévu". En conséquence, en arithmétique on exigeait uniquement de savoir effectuer les oppérations de base, sans devoir les expliquer.

A la mort de Fernando VII, sa fille, Isabel qui n'avait que deux ans est déclarée reine d'Espagne. Devant la pression de groupes sociaux plus conservateurs, regroupés autour de l'infant Carlos, frère du roi décédé, la reine régente étaye sa fille sur le trône en s'alliant avec les libéraux. C'est ainsi que l'État libéral commence à se construire, avec des caractéristiques d'uniformisation et de centralisation; il s'appuyera sur la création d'un système éducatif, lui aussi uniforme et centralisé, et bénéficiant d'un contrôle plus important de la part du gouvernement.

En ce qui concerne la législation, développée à ce moment-là, on s'intéresse spécialement aux lois qui régissaient l'enseignement primaire puisqu'elles constituent une référence sur l'accès à la condition de maître. En cette période étaient en vigueur le "Plan d'Instruction Primaire" de 1838 ([3], p. 3-11) et la "Loi Moyano" de 1857 ([6], p. 244-302), loi qui régissait tous les niveaux du système éducatif et fut en vigueur jusqu'à la fin du siècle. Ces lois classent des écoles primaires en différenciant les élémentaires et les supérieures et en instaurant parallèlement deux titres de maître, élémentaire et supérieur.

Le règlement des examens de maître a été publié en 1839 ([3] p. 47-59). Il régit aussi les titres de maîtresse qui à la différence de ceux de maître sont de type unique. En ce qui concerne les mathématiques, les connaissances requises, auprès des personnes candidates aux titres de maître sont les suivantes:

Maître d'école élémentaire primaire: Principes d'arithmétique, théorie et pratique de la numération; addition, soustraction, multiplication et division de nombres entiers et complexes, fractions ordinaires et décimales.

Maître d'école supérieure d'instruction primaire: 1. Arithmétique jusqu'a la connaissance des proportions, règle de trois et de société, ainsi que des fractions ordinaires et décimales. 2. Notions de géométrie, lignes droites et courbes, perpendiculaires, parallèles, angles, propriétés des triangles, surfaces des polygones et du cercle, volume et solidité des corps.

Le réglement ne fait pas référence à l'existence des Ecoles Normales que la loi de 1838 avait créées; mais des décrets postérieurs attribuent une préférence aux candidats ayant étudié dans les E.N., et les professeurs de ces écoles font partie des Commissions d'examens.

En 1850 on publie un nouveau règlement d'examen ([3] p. 133-145) qui englobe quatre types de titres: les élémentaires et supérieures de maîtres et maîtresses (on voit apparaître ainsi pour la première fois le titre de maîtresse supérieure). L'école normale, ses enseignements et ses professeurs deviennent des composantes importantes de l'examen de maître. On exige un certificat du directeur de l'école normale garantissant l'accomplissement de deux années d'études dans son établissement dans l'optique du titre élémentaire et de trois années dans celle du titre supérieur. Et l'enseignement imparti dans les écoles normales est utilisé comme référence pour fixer les contenus d'examens. Le règlement resta en vigueur après la loi Moyano qui ne fait pas allusion aux examens de maître.

La création des écoles normales

Dans les écoles primaires, pendant l'Ancien Régime, prévalait la méthode individuelle peu efficace surtout si le nombre d'éléves était important. L'extension de l'enseignement primaire débouchait bien sur l'existence d'écoles ayant beaucoup d'éléves, et pour que l'enseignement soit efficace, il fallait mettre sur pied des méthodes d'enseignement mieux adaptées aux nouvelles conditions. Pour que les maîtres connaissent ces méthodes, il fallait changer leur formation, en abandonnant les formes corporatives existantes et en créant des Ecoles-modéles où les candidats purent apprendre de nouvelles méthodes et acquérir un complément de connaissances méthodologiques. La méthode d'enseignement mutuel fut ce qui a été proposé en premier lieu; on a alors envoyé des pensionnaires dans les écoles de Lancaster en Angleterre et en 1834 fut créée à Madrid une école normale d'enseignement mutuel.

Mais ce fut la loi de 1838 qui permit la création d'écoles normales dans toute l'Espagne, et cela dans un esprit très différent de celui de 1834 puisque l'enseignement des connaissances était alors beaucoup plus important que la pratique.

En 1839 on créé l'E.N. Centrale sous la direction de Pablo Montesino et à partir de 1840 on voit petit à petit se mettre en place des E.N. dans toutes les provinces; les professeurs sont des élèves des premières promotions de l'E.N centrale qui en général ont été pensionnés par les "Diputaciones provinciales".

Caractères des études dans les Ecoles Normales

Le caractère des études dans les E.N est indiqué par Pablo Montesino lors d'un discours prononcé à la fin de la première promotion de l'E.N. Centrale. Selon Montesino ([2], p.87) les études doivent être celles des écoles primaires supérieures auxquelles "il faudra ajouter une matière pour l'enseignement des principes généraux d'éducation, méthodes d'enseignement et pédagogie, (...) il faudra aussi que l'étude de la religion et de la morale soit plus étendue et plus sérieuse qu'elle l'est dans les écoles primaires."

Il est surprenant de penser qu'en ce temps-là la préparation exigée pour les maîtres était ainsi, mais comme on le verra cette idée constitue une constante dans la législation et dans l'esprit des personnes responsables de l'organisation des E.N. Ainsi, dans la R.O. de 1840 "ordonnant d'établir dans les capitales de provinces des E.N et que l'on y place les élèves ayant fait leurs études à la cour" ([3] p. 171-173) on spécifie que les E. N. puissent avoir le rôle important d'une école supérieure en fournissant dans son école de pratique plus grande instruction que celle qu'on donne ordinairement dans les autres élémentaires.

Et dans le "Règlement des E.N. d'Instruction Primaire" de 1843 ([3] p. 60-75) on parle de l'extension que doivent avoir les enseignements: "Le gouvernement doit aussi signaler la véritable façon de voir l'enseignement des E.N et tracer le cercle qui la délimite, car c'est ce qui a été mal compris aussi bien par ceux qui en étaient chargé que par ses dépréciateurs. Le caractère de cet enseignement doit être essentiellement populaire; tout ce qui n'est pas strictement nécessaire au peuple est une excroissance nuisible, un défaut qui l'empêche d'en arriver à ses fins (...) former des maîtres d'écoles, et surtout des maîtres de villages".

Les limites du cercle dans lequel se trouve l'enseignement des E.N. sont désignées par les deux premiers articles du règlement

Art. 1°. Les Écoles Normales ont pur but: **1**. Former des maîtres propres aux écoles élémentaires et supérieures de l'instruction primaire. **2**. Servir d'école supérieure primaire dans le village où elles sont établies. **3**. Offrir dans leur école de practique pour enfants un modèle pour les écoles élémentaires publiques ou privées.

Art. 2°. Par conséquent chaque École Normale admettra 3 classes d'élèves: **1**. Les candidats pour être maîtres de premières lettres. **2**. Ceux qui sans se dédier à l'enseignement veulent acquérir, totalement ou en partie, les connaissances que l'on donne dans cette école. **3**. Les enfants dont le seul but est l'instruction primaire élémentaire.

Les élèves qui correspondent à l'art 2 - 2° sont les enfants "d'artisans, d'agriculteurs et d'autres du même ordre" et leur présence à l'école normale a pour but de compléter [à l'école] l'instruction qui leur convient" en couvrant de cette forme son rôle d'école supérieure.

Ces mêmes enseignements correspondant à l'instruction primaire supérieure sont ceux que doivent étudier les candidats avec le supplément "Principes généraux d'éducation et des méthodes d'enseignement avec sa pratique en écoles d'enfants". La durée des études est de deux ans et à la fin les élèves obtiennent un certificat qui leur permet de se présenter à l'examen pour obtenir le titre de maître d'école supérieure précisant que les études ont été effectuées en E.N

Ces maîtres supérieurs, ayant un titre spécial qui leur permit d'être nommés dans une école, prioritaires par rapport à ceux qui n'ont pas étudié en E.N., ont acquis leur forma-tion *dans une école du même type que celles qui correspondent à leur diplôme*, les connaissances des matières qu'ils doivent enseigner sont les mêmes que celles que doivent acquérir leurs élèves; ils connaissent les méthodes de l'enseignement et ont fait des stages en école élémentaire, mais l'étroite limite de leurs connaissances les empêcheront de juger les modifications possibles de l'enseignement, c'est pourquoi, en général, les maîtres formés de cette manière se limiteront à reproduire, sans pouvoir critiquer, les connaissances qu'on leur a administrées à eux mêmes.

Seulement quatre ans après le règlement que l'on vient de voir, dans le R.D. de 1847, "donnant un nouvel élan à l'instruction" ([3] p.76-87), le gouvernement considère les E.N. comme des "établissements très utiles mais trop nombreux, alors, pour les nécessités de l'enseignement". Et deux ans après, dans un R.D. de 1849 "mettant sur pied une nouvelle organisation des E.N. d'instruction primaire" ([3] p.88-97), il réduit son nombre à dix.

L'inconvénient de cette mesure c'est qu'elle éloigne la profession de maître du collectif duquel elle se nourrissait: celui des personnes pauvres qui se dédient à l'enseignement pour les gens de petites ressources: "Il faut conserver en quelques endroits convenablement choisis quelque établissement qui en proportions réduites serve à former des professeurs destinés à enseigner dans les villages."

Se dessinent ainsi deux sortes d'écoles normales, les élémentaires et les supérieures avec des objectifs différents, destinées à des élèves différents et qui préparent à des classes de titres différents:

Les études dans l'E.N. élémentaire durent deux ans et se réduisent à "ce qui constitue purement l'instruction primaire élémentaire complète". C'est pourquoi bien qu'on maintienne dans ces écoles la durée des études, on en réduit les contenus. L'augmentation en un an des études dans l'E.N. supérieure et la manière indéterminée de se référer aux contenus peut indiquer une augmentation du niveau des connaissances attribuées aux élèves; mais les documents et témoignages dont nous allons parler plus tard, nous indiquent que les matières des études sont toujours celles de l'instruction primaire supérieure. La publication du R.D. signale un échec du règlement de 1843, l'impossibilité d'attribuer à l'ensemble des élèves des E.N, en deux ans, les connaissances correspondantes à l'instruction primaire supérieure, à partir des conditions d'accès exigées à ces mêmes élèves

La loi d'instruction publique de 1857 ([6] p. 244-302), situe les études de "maîtres de premier enseignement" dans les enseignements professionnels bien qu'avec un traitement singulier qui est le suivant:

- l'on dédie aux E.N et à son professorat, des chapitres différents de ceux des écoles professionnelles.
- les Normales (sauf la Centrale) dépendent économiquement des Provinces, alors que le reste de l'enseignement supérieur et professionnel est épaulé par l'État.
- la singularité des conditions d'accès aux Normales par rapport au reste des enseignements professionnels.

Cela n'a rien d'étonnant que, en pratique, on considère les études de "Maîtres de premièr enseignement" d'un statut inférieur et qu'il existe des doutes sur l'application des normes dictées par les enseignements professionnels.

La loi régit les études nécessaires pour obtenir trois types de titres de maître (élémentaire, supérieur, et normal) en spécifiant les matières à étudier; mais telles qu'elles sont exprimées il est difficile de déterminer le niveau des connaissances exigées dans les E. N. En principe la formulation des matières et la durée des études, similaire à celle des décrets antérieurs suggère que le niveau d'approfondissement ne change pas. Cependant il existe une différence que l'on doit distinguer: l'art 110 établit que l'école de pratique ajoutée à la normale "sera la supérieure correspondant à la localité" et c'est pourquoi, les élèves qui voudront suivre l'instruction primaire supérieure ne le feront plus avec les candidats maîtres, mais à l'école de pratique ajoutée. On peut penser que, au moins dans les normales supérieures, le niveau des connaissances atteint dépassait celui que la loi établit pour l'instruction primaire supérieure.

Mais il existe d'autres renseignements qui disent que réellement, la considération des études de maîtres n'avait pas changé. Par exemple, on n'a pas élaboré un nouveau règlement des E.N. et les connaissances exigées pour l'accès à l'E.N sont toujours petites: les matières de l'instruction primaire élémentaire. La continuité de cette situation est confirmée par d'autres témoignages de l'époque; ainsi le rédacteur des "Anales de Primera Enseñanza", commente en 1858 ([1] 1858-59, p.161) que peu nombreux sont les changements introduits par les lois et bien sûr, pas une référence au moindre approfondissement des connaissances que l'on acquiert.

C'est pourquoi on peut considérer que le caractère des études qui s'effectuaient dans les E.N s'est maintenu essentiellement constant depuis sa création.

Les connaissances préalables en arithmétique

Un des facteurs de plus grande influence dans l'établissement des connaissances préalables qu'avaient les élèves des E.N. correspond aux conditions d'admission dans ces écoles fixées par les lois et les règlements. Les dispositions législatives auxquelles nous allons faire référence sont: le "Règlement de l'E.N.Centrale" de 1842 (Doc. A, [7]), le "Règlement pour les E.N." de 1843 (Doc. B, [3] p.60-76), le de 1849 (Doc. C, [3] p. 98-117) et le "Programme général des études des E.N" de 1859 (Doc. D, [4] p.851-853). Le tableau suivant reflète l'âge fixé pour l'admission à l'E.N. et le contenu mathématique de l'examen d'entrée.

Entrée à l'Ecole Normal

Document	Age	Ce qui est exigé
A	18-20	Connaissances que l'on doit acquérir dans les écoles élémentaires
B	16	Les quatre règles d'arithmétique
C	17-25	Matières qu'englobe l'instruction primaire élémentaire complète.
D	17-25	Matières qu'englobe la premier enseignement élémentaire

Les documents A,C et D montrent les mêmes conditions d'admission: les élèves doivent avoir les connaissances correspondant à l'enseignement primaire élémentaire, pas à l'enseignement de l'école supérieure. Le document B semble différent mais il explique tout simplement quelles sont ces connaissances.

Pour évaluer ces exigences nous allons les comparer avec les conditions d'accès à d'autres études à l'époque. Nous allons utiliser la loi Moyano, qui étant une loi générale d'instruction publique permet de situer et de mettre en relation différentes classes d'enseignement.

En principe, les études de Maître de premier enseignement étant considérés professionnelles, on peut leur appliquer les articles 28 et 29 qui établissent que pour pouvoir commencer des études professionnelles, l'élève doit avoir étudié au moins une partie du second enseignement (général ou d'application). Ces conditions sont très supérieures à l'examen sur l'enseignement primaire élémentaire que l'on exige à ceux qui prétendent commencer les études de maître. Ainsi, les enseignements professionnels dont ils font partie ne nous servent pas de référence et la disparité des conditions d'accès est une raison supplémentaire pour douter que réellement les études de maîtres puissent être considérées comme un enseignement professionnel.

Nous devons alors redescendre un échelon dans le système éducatif et considérer l'entrée au second enseignement "Pour commencer les études générales de second enseignement il faut avoir 9 ans et être reçu à un examen général des matières du premiér enseignement élémentaire complet". Les conditions exigées sont les mêmes pour l'accès aux normales, sauf l'âge. Pour "les études d'application qui correspondent au second enseignement on demande d'avoir 10 ans et d'être reçu à un examen général des matières que comprend le premier enseignement supérieur. Les candidats pour être maître font donc un examen à 16 ou 18 ans que d'autres enfants ont fait à 9 et selon ce que nous avons signalé dans la partie précédente ils font des études au niveau de Instruction primaire supérieure qui est le niveau exigé à 10 ans, à ceux qui veulent réaliser les études d'application du second enseignement; celui-ci, pour cette raison, a aussi dû être réussi par les candidats pour le reste des enseignements professionnels. En plus en faisant l'examen d'entrée à 17 ans il existe une période qui même en estimant la sortie de l'école à 12 ans, est de 4 à 6 ans, pendant laquelle les personnes, non seulement ne prennent pas d'avance en connaissances mais en plus, les oublient; donc comme dit le rédacteur du BOIP ([2] 1842, p.13), les candidats maître "manquent de conditions nécessaires pour entreprendre et continuer des études; car s'ils ne manquaient pas de ces conditions ils se dirigeraient vers une autre filière moins laborieuse et mieux rétribuée que la profession de maître d'école primaire".

La profession de maîtresse

L'accès de la femme à la profession de maîtresse a bénéficié d'une attention beaucoup plus petite que celle qui a été attribuée aux maîtres. Jusqu'en 1838 peu nombreuses furent les dispositions prisent en ce qui concerne cette question; en pratique l'examen qui donnait accès au titre de maîtresse, se limitait à la doctrine chrétienne et les travaux de dame, et il y avait pas mal de femmes qui exerçaient sans titre.

Les connaissances exigées à la maîtresse devinrent plus importantes dans le règlement des examens de 1839 ([3] p. 47-59) qui exigeait de savoir aussi lire, écrire et en arithmétique: "Comptes avec des nombres entiers jusqu'à la division de petites quantités par des diviseurs simples".

Le règlement des examens de 1850 ([3] p. 133-145) considère deux titres de maîtresse, élémentaire et supérieur. Comme la loi de 1838, en vigueur à ce moment-là n'envisage pas l'existence d'E.N. féminines, on n'exigeait pas aux candidates une formation préalable, à la différence des hommes. L'examen élémentaire est similaire à celui mis en place en 1839. L'examen pour maîtresse supérieure "se fera exactement de la même façon et dans les mêmes termes que ceux prévus pour les maîtres élémentaires". Il existe donc une certaine identification entre les deux titres même si les matières d'examen sont un peu différentes. En ce qui concerne les mathématiques ce sont des "notions d'arithmétique précisément les quatre premières règles, pour nombres entiers et fractions, avec la connaissance précise du système légal de poids et mesures; idem en géométrie".

Les différentes fonctions que la société assigne aux femmes et aux hommes se manifestent aussi dans les examens de maîtresse qui comprennent comme matière "les travaux propres à leur sexe" et qui n'étaient pas publics pour la différente considération sociale que possèdent de certaines conduites selon le sexe de la personne. Alors que pour les hommes, la manifestation de leurs connaissances, possibilités et aptitudes aux examens bénéfice d'une évaluation sociale positive, pour les femmes l'adjudication de places doit se faire "sans fraces d'oppositions et de concurrences".

La loi Moyano ([6] p. 244-302) mentionne pour la première fois les E.N. de maîtresses que "le gouvernement essaiera d'établir [...] pour améliorer l'instruction des filles". Les études que l'on suivait dans ces normales étaient fixées par la loi avec moins de précision que pour les écoles masculines. On demande "d'avoir étudié aussi longment qu'il faut en E.N les matières qu'englobe le premier enseignement de filles, élémentaire ou supérieur selon le titre auquel on aspire, et d'être instruite pour ce qui est des principes d'éducation et méthodes d'enseignement". La philosophie est similaire à celle des normales masculines car les connaissances sont celles qui correspondent aux écoles primaires, ajoutant quelques compléments pédagogiques. Et vu que l'importance des matières d'enseignement est plus petite dans les écoles de filles que dans celles des garçons, il en sera de même pour les normales.

Dans l'Espagne du moment les conceptions prédominantes sur la femme et son rôle dans la société, et donc sur son éducation, sont l'ultime raison des différences que nous avons notées entre les deux types de normales. Ces conceptions contribuent à déterminer le cercle qui doit délimiter les enseignements, qui n'est pas tracé, dans ce cas, par des dispositions légales mais par des livres et des articles professionnels qui montrent une méfiance devant un possible rapprochement entre les contenus d'instruction pour hommes et femmes. Les "Anales de Primera Enseñanza", journal représentant les opinions plus proches de l'administration, défendent pour les E.N de maîtresse un plan réduit et modeste, différent des masculines dans l'importance et l'orientation des contenus des matières ([1] 1864, p.613-616): "Au lieu de beaucoup de règlements et de programmes vastes et luxieusement écrits et exposés nous aurons comme désir le plus grand que la doctrine chrétienne et l'histoire sainte, la lecture et la pédagogie, après le premier enseignement, forment l'essentiel, le plus important de l'enseignement, faisant le reste de manière incidente".

Parmi ces matières de seconde (on plutôt troisième) ligne on rencontrait l'arithmétique dont les contenus, assez réduits voulaient se mettre au service de ce que l'on considèrait comme ultime but de l'enseignement dans les normales féminines: la formation religieuse et morale.

"Nous voulons que les notions d'arithmétiques se réduisent à ce qu'il y a de purement indispensable à savoir; que soient éliminés des programmes ces théorèmes abstraits qui seront utiles ailleurs, mais qui ne sont pas indispensables dans les écoles normales de maîtresses, et que la place qu'ils occupent soit réservée à l'essentiel, pour ce qui est utile, ce que l'on pratique dans les usages de la vie courante; que l'on apprenne bien les règles fondamentales, que l'on généralise le système métrique, et que toute cette matière ce mette au service de la doctrine chrétienne et de l'enseignement moral et de celle qui a été baptisée du nom d'économie domestique étant tous les problèmes que l'on résoud et toutes les opérations qu'on effectue, autant d'enseignements et d'applications des devoirs que doit accomplir à l'avenir la future mére de famille, que tous les théorèmes renferment, des principes très simples que l'on enseigne à toutes, la valeur du temps bien employé, la richesse inépuisable d'une économie dont on s'occupe bien; mais ces enseignemens n'ont pas, ni ne pourront jamais avoir une application usuelle en absence de la vertue chrétienne, grâce à quoi on découvre tous les inconnus, et autour de quoi doit toujours tourner la compagne de l'homme pour diriger avec réussite et résultats satisfaisants la société domestique".

BIBLIOGRAPHIE

[1] - "Anales de Primera Enseñanza". 1858 à 1864.
[2] - "Boletín Oficial de Instrucción Primaria (B.O.I.P.). 1841.
[3] - "Colección Legislativa de Instrucción Primaria", Madrid, 1856.
[4] - "Compilación Legislativa de Instrucción Pública" T.II, Im. T. Fortanet, Madrid, 1878.
[5] - M.E.C. "Historia de la Educación en España" T.I.
[6] - M.E.C. "Historia de la Educación en España" T.II.
[7] - "Reglamento de la Escuela Normal Seminario Central de maestros de Instrucción primaria". Imprenta Nacional, Madrid, 1842.

MATHEMATICAL PEDAGOGY: AN HISTORICAL PERSPECTIVE

Frank Swetz, The Pennsylvania State University

Introduction

Old mathematical texts can tell us many things. Certainly they provide information on the development of mathematical knowledge and procedures; the uses of mathematics and the types of problems that were important to our forebearers. They provide insights into the culture and times within which they were written and give us hints as to the forces that shaped and controlled mathematical concerns. But if we look beyond the mathematics, itself, and attempt to discern the author's intentions; "What is he attempting to teach?", "How is he doing it?", a perspective of early mathematical pedagogy emerges.

An examination and analysis of didactical trends in historical material can take place along several lines:

1. The organization of material, the sequential ordering of topics and specific problems.
2. The use of an instructional discourse and techniques of motivation contained with the discourse.
3. A use of visual aids; diagrams, illustrations and colors, to assist in the grasping of concepts on the part of the learner.
4. The employ of tactile aids, either directly or by reference, to clarify a mathematical concept.

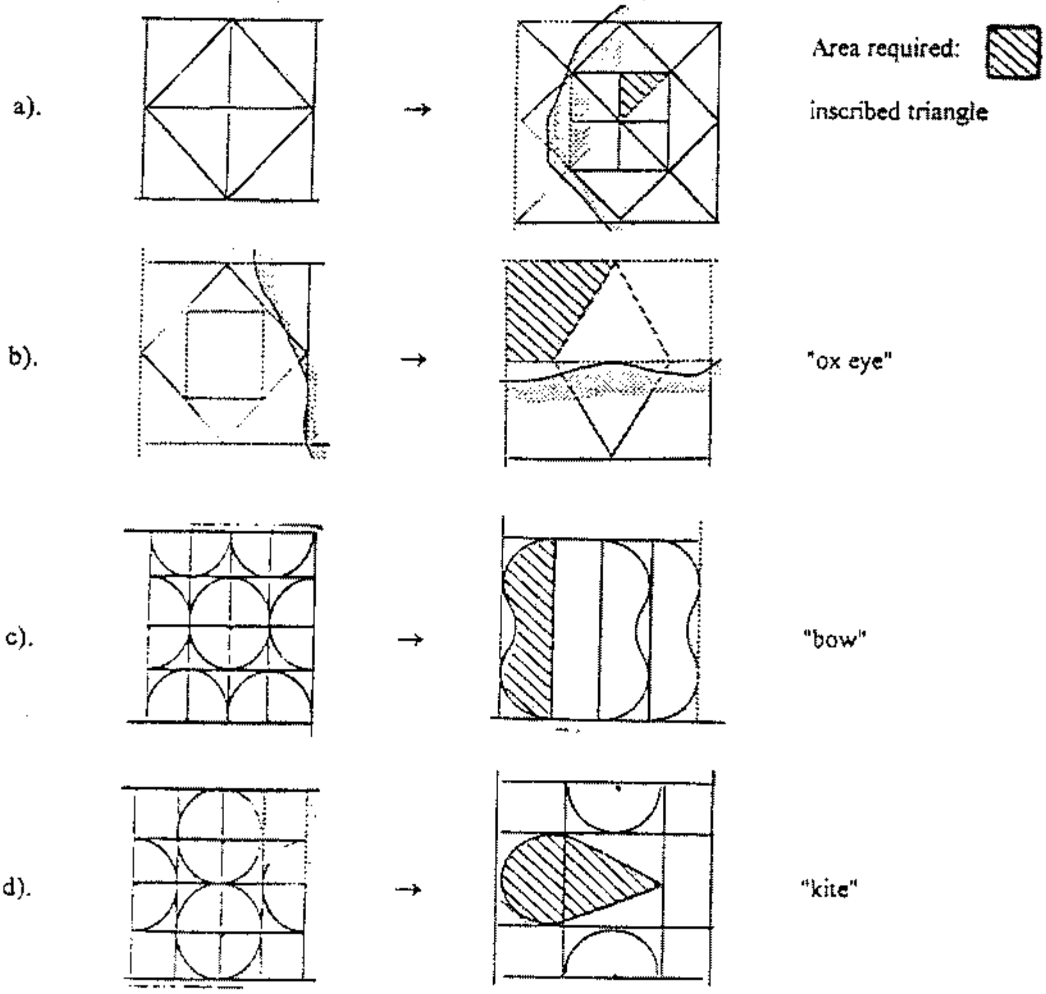
It is impossible, in a limited discussion of this nature, to consider all of these aspects in some historical depth but I would like to survey a few examples of pedagogic practices evident in old texts. Hopefully, other researchers will pursue more detailed investigations.

The Organization and Format of Mathematical Presentations

The teaching of mathematics has a structure that proceeds from the simple to the complex, from the concrete to the abstract. It appears that authors of mathematical texts have always followed such a scheme. British Museum cuneiform tablet 15285 from the Old Babylonian period (1800-1600BC) contains a series of geometrical diagrams. Each diagram presents a problem to its viewer. It is believed that this tablet originally contained over 40 systematically arranged exercise problems; however, only 30 are wholly or partially preserved (Saggs, 1960). These problems are reminiscent of present-day geo- or peg-board exercises. Early assyriologists who studied the tablet and its contents were confused as to its purpose. Initially it was described as a surveyors manual (Gadd, 1922); however, later interpretations designate it as a series of exercises for mathematical scribes (Caratini, 1957). Each problem involves a square whose side measures 1 US (1 US=60 gar, 1 gar=12 cubits), each square is partitioned into smaller regions by the use of straight lines and circular arcs. The partitioning is accomplished by the use of integral and symmetric divisions of the area. The tablet's student user is required to find the area of a specific region within each square. Geometric intuition and problem solving skills are challenged. The problems are sequenced from the simple to the complex and a student-learner must work his way through prerequisite problems before the later, more complex, problems can be solved.

Old Babylonian Geometry Problems

Learning/Solution Sequence
Earlier problem → latter problem



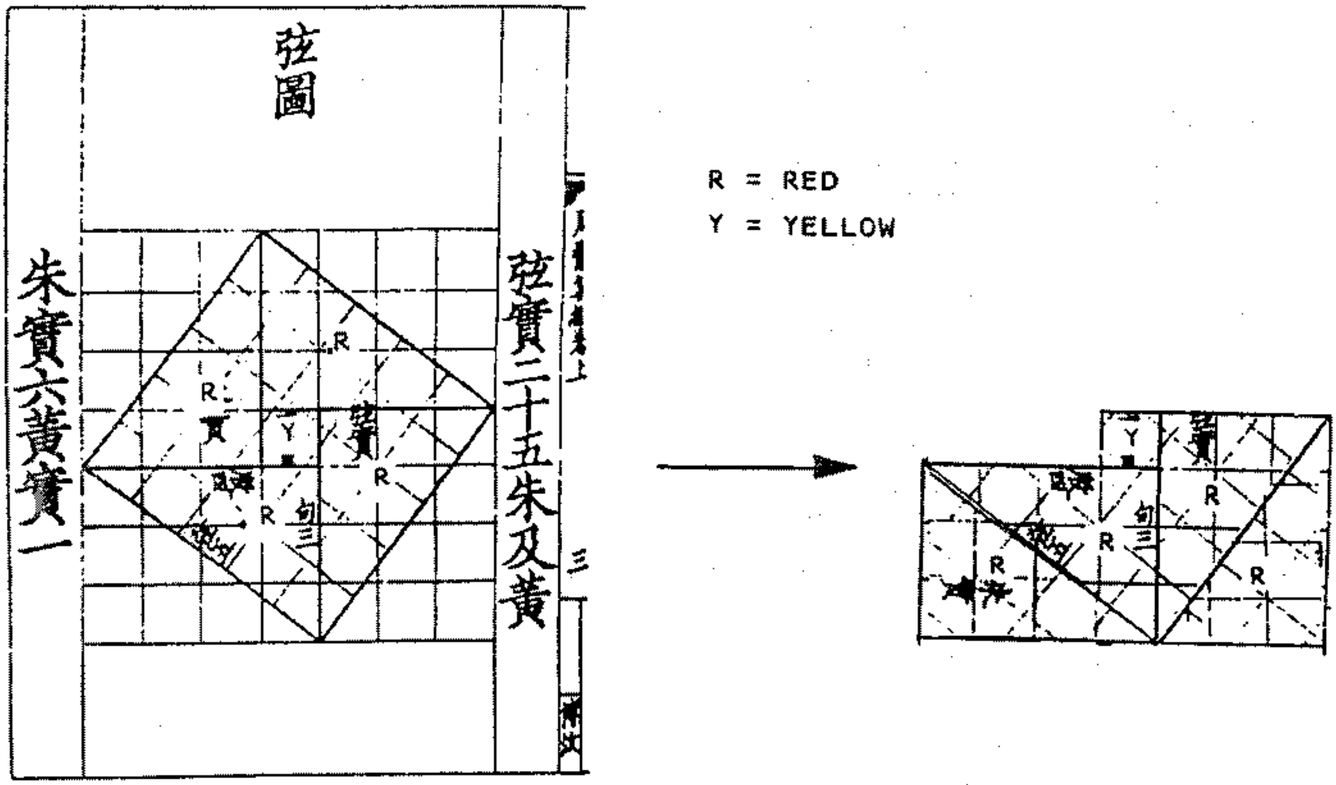
It appears evident that the author of the tablet sequenced these problems in a pedagogically purposeful manner.

Similarly with the Egyptian Rhind Papyrus of 1650 BC, the series of problems have been arranged in a controlled order to facilitate learning. Problems 41-60 of the Chace translation (1927-1929) concern geometry. Computations of volume are required (problems 41-46), area calculations follow (problems 48-55) and finally problems 56-60 require the application of triangle knowledge in work with pyramids. Just as children interact with three dimensional solids before they appreciate the geometrical properties of plane shapes, the author of the Rhind problems has his scribes consider simple problems of volume before they attempt more intricate calculations involving triangles and applications of triangles.

Perhaps the most comprehensive collection of problems from the ancient world in both scope and mathematical content is the Jiuzhang suanshu [Nine Chapters of the Mathematical Art] (ca 100AD) from Han China. The Jiuzhang is comprised of 246 problems divided into nine chapters according to their methods and applications. In each chapter, the sequencing of problems carefully progresses from the basic, demonstrating the principles to be learned or techniques to be mastered, to the theoretical, complex, where problem solving strategies are sharpened. A pedagogical analysis has already been undertaken on the contents of the ninth chapter concerning right triangles (Swetz, 1993). Let us briefly examine the organization of the eighth chapter entitled *fang cheng* [square tabulation] which teaches methods of solution for systems of simultaneous equations. The "square tabulation" method involves the use of computing rod algorithms and parallels what today is known as the method of "Gaussian Elimination". Of the eighteen problems of this chapter, eight (problems 2, 4-6, 7, 9-11) involved two equations in two unknowns, six (problems 1, 3 , 8, 12, 15, 16) concern three equations in three unknowns and two (14, 17) four equations in four unknowns. Problem 13 involves five equations in six unknowns - an indeterminate situation, and the last problem (18) has five equations in five unknowns. Note how the complexity of the situation is gradually increased throughout the sequence until finally the student is introduced to an indeterminate situation.

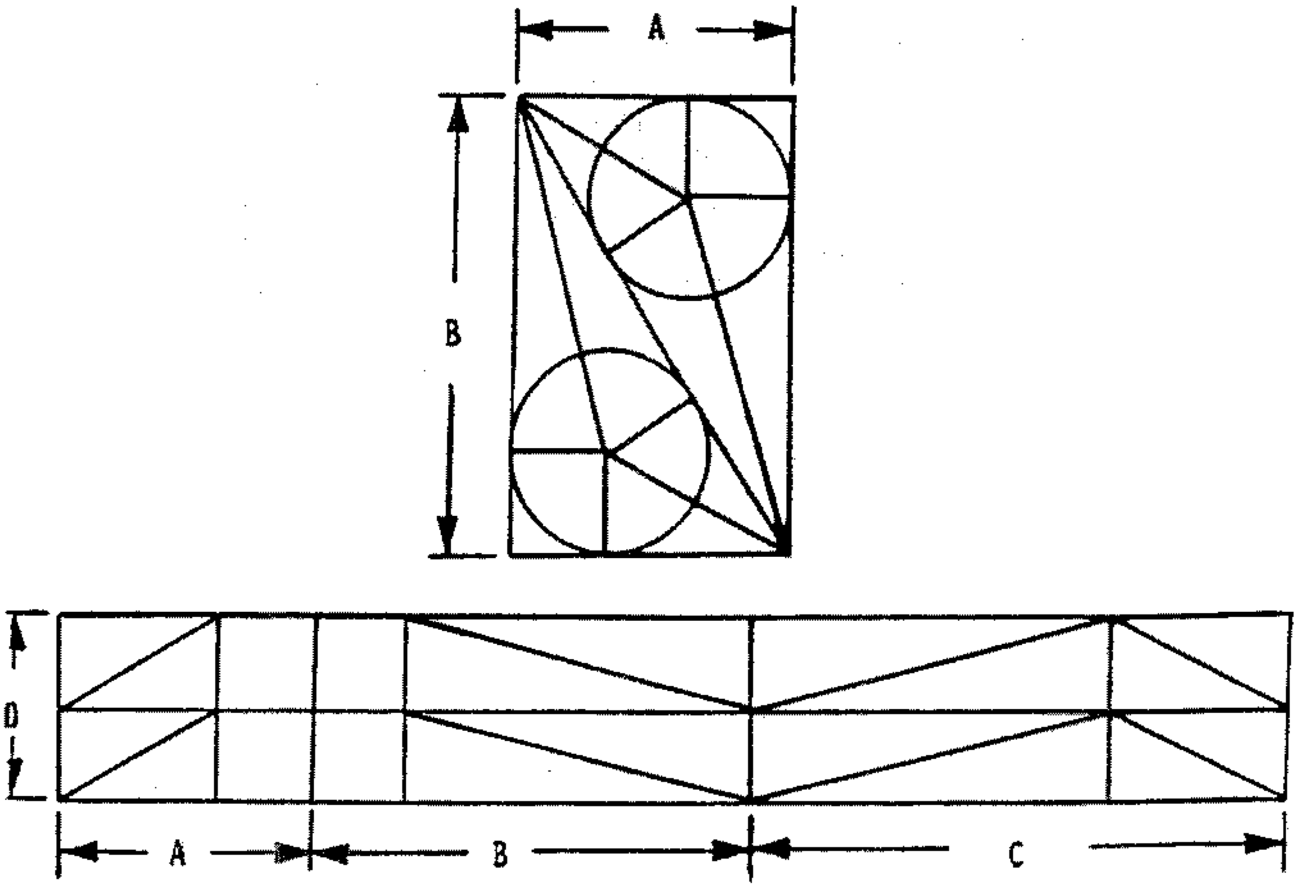
Use of Visual Aids

The mathematical classics of ancient China contain many pedagogical features that are recently being recognized. Commentaries on the *Zhoubi suanjing* [Mathematical classic of the Zhou gnomon] (ca 100BC) contains one of the first documented proofs of the "Pythagorean theorem". It's *xian thu* diagram employs: the use of 3-4-5 right triangles; a superimposed grid network and colors (red and yellow) to assist in its dissection proof strategy.



Liu Hui (ca 263), one of the great mathematical commentators and mathematicians of old China, urged his readers to make diagrams on paper, to cut and rearrange the pieces in order to justify mathematical statements. For the Chinese, paper cutting and folding was readily accepted method of mathematical demonstration (Sui, 1993). A further illustration of this technique as provided by Liu's algebraic-geometric justification of a solution formula for the sixteenth problem of the

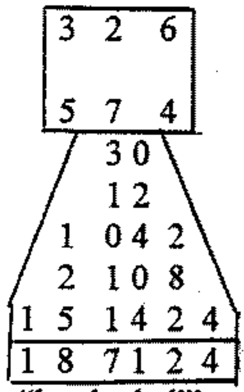
Jiuzhang's ninth chapter where the reader is asked to find the diameter of the largest circle that could be inscribed in a right triangle of given dimensions. Using modern notation, let the length of the legs of the triangle be given by A and B and the unknown diameter of the circle by D. Liu conceived of the right triangle as being one half of a rectangle of area AB. He then used two such rectangles partitioned into sets of congruent right triangles and squares, cut and rearranged the pieces to obtain a visual statement of the relationships of the unknowns. Liu's diagrams demonstrated D = 2AB/A+B+C, the correct result.



Several hundred years later when the first printed English language edition of Euclid's Elements appeared in London (1570) its editor Henry Billingsley supplement the discussion of solid geometry with "pop-up" figures. These folded paper solids allowed the reader to interact with the three-dimensional figures discussed in the text (Archibald, 1950). One wonders if such paper folding was a standard pedagogical technique of the time.

Colors also were used effectively in later British geometry texts. Oliver Byrne's, The First Six Books of The Elements of Euclid in which Coloured Diagrams and Symbols are Used Instead of Letters for the Greater Ease of Learners (1847). Byrne's book has been described as "one of the oddest and most beautiful of the whole [19th] century" (McLean, 1963). It's use of color in teaching mathematics was revolutionary.

Mathematical authors of the early European Renaissance were truly imaginative in their use of picturesque schemes to import to their readers the techniques of algorithmic computation employing "Hindu-Arabic" numerals. Pacioli (1494) offered his audience eight different schematic techniques to obtain the product of two multi-digit numbers. Multiplication of two two-digit numbers could easily be accomplished *per crocetta* or "by the cross"; however, an increase in the number of digits resulted in place-value confusion. To remedy this situation numerical configurations were associated with common objects. A problem-solver could obtain a product *per castellucio*, "by the little castle", *per coppa*, "by the chalice" or *per campana*, "by the bell".



"by the bell"

Such mnemonic devices had pedagogical designs.

Conclusion

A concept of mathematical pedagogy, a conscious approach to communicating mathematical concepts and processes, has a long and full history. As heirs and perpetuators of this history, we should be both mindful and proud of the efforts of our predecessors devoted to making mathematics learning easier.

References

Archibald, R.C.: 1950, 'The first translation of Euclid's Elements into English and its source', The American Mathematical Monthly 57: 443-452.

Caratini, R.: 1957, 'Quadrature du cercle et quadratures des lunules en Mesopotamie', Revue d'assyriologie et d'archeologie orientale 51: 11-20.

Chace, A.B.: 1967, The Rind Mathematical Papyrus, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Va. (reprint of 1927-1929 edition).

Gadd, C.J.: 1922, 'Forms and Colours', Revue d'assyriologie et d'archeologie orientale 19: 149-159.

Lam, L. Y. and Ang, T. S.: 1992, Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China, World Scientific, Singapore.

McLean, Ruari: 1963, Victorian Book Design and Colour Printing, New York, p. 51.

Saggs, H.W.: 1960, 'A Babylonian geometrical text', Revue d'assyriologie et d'archeologie orientale 54: 131-145.

Siu, M. K.: 1993, 'Proof and Pedagogy in Ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu Zhang Suan Shu, Educational Studies in Mathematics 24: 345-357.

Swetz, F. J.: 1993, 'Right triangle concepts in ancient China', History of Science, 31: 421-439.

IS THERE A PLACE FOR THE HISTORY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS IN ADULT EDUCATION UNDER ECONOMIC RATIONALISM?

Gail E. FitzSimons, Swinburne University of Technology, Australia

Abstract

In Australian further education classes it has been possible in the past for adults returning to study to learn something of the history of mathematics and to recreate parts for themselves; adult students, particularly women, value the opportunity to view the study of mathematics as a Humanity subject. On the other hand, the impact of economic rationalism in English-speaking countries such as Australia, the UK and the US, has resulted in the introduction of a Competency Based Training (CBT) approach to curriculum and assessment, without any foundation in educational research. In Australia CBT is mandatory for courses in both the Vocational Education and Training (VET) and the Adult, Community, and Further Education (ACFE) sectors, apparently adopting industrial values to the exclusion of others concerned with the needs of the individual and/or other social groups. This emphasis on serving the immediate needs of industry has profound pedagogical implications, while at the same time holding educators accountable. Factors such as these remove the possibility of mathematics educators including historical and ethnomathematical aspects of the curriculum, if they were ever included. In Australia, professional development is virtually non-existent for mathematics teachers in the VET sector, and while its provision is more visible in the ACFE sector, there is little evidence of encouragement for practitioners to study or teach in accord with the scientific program of this conference. This paper will address the recent history of mathematics education for adults in Australia.

History and pedagogy

The Second Announcement noted that a major theme of this conference is *Mathematical cultures all over the world*, and included the following: "It is the birthright of every young world-citizen to learn about mathematical ideas developed in each part of the world, and, depending on local conditions, this can be a significant dimension of mathematics education." Adult learners returning to study, who have not previously had such an opportunity, should also be included in this principle, as should continuing students enrolled in vocational courses. It is difficult to justify separating mature adults' personal education needs from those of younger students, (or those of vocational students from school students of similar ages). My experience of teaching mature-aged students suggests that, in fact, adult students can gain much more from education than younger people for several reasons: They have (usually) chosen to be in an educational setting, they are more tolerant of "diversions" from the intended curriculum, and they can draw on their own wealth of life experience to relate to the curricular content at a greater conceptual depth. (See, for example, FitzSimons, 1993a, 1993b, 1993 March, 1994, 1995.)

Until recently non-vocational further education in Australia, although severely underfunded, was subject to very few controls in terms of curriculum and assessment. Classes were small, compared to schools, and generally informal. The curriculum was able to be negotiated, with little, if any, formal assessment. My own classes had evolved to the degree where I regarded them as mathematical discussions. History was a central underlying theme: history *of* my students, to help them come to terms with an educational past that was frequently destructive (both in and out of mathematics classes), and to help me to appreciate their other talents and skills; and history *for* my students. The latter included: the reading and discussion of historical accounts, such as found in Smith (1958); anecdotal stories of famous female and male mathematicians; the students' private research into the lives of mathematicians or mathematical items in the news (which defied the traditional curriculum barriers in terms of level of content); watching a play on the lives of famous female mathematicians and scientists; the recreation of mathematical discoveries such as using tennis balls packed in a can of three to explore the relationship between spheres and a cylinder of the same diameter attributed to Archimedes; studying the etymology of mathematical terms; and the celebration of the various counting words known to members of the (multilingual) class.

A second theme of this conference is *Mathematics, arts and technics*. It is suggested that the connections between mathematics, and other arts, sciences and technologies be explored historically, including the use of mathematical modelling in applied mathematics. This theme offers great potential for the education of adults, whether enrolled in vocational or in further education courses, and will be discussed below.

The 1992 Toronto HPM meeting offered a rich diversity of workshops and lectures, and provided me with new ideas for the classroom as well as a deeper appreciation of the importance of incorporating historical and cultural aspects of mathematics into my teaching. However, as with most mathematics education conferences I attend, there were very few participants who were teachers of adults, excluding teacher educators. The issue of professional development for this group needs to be addressed by education policy makers, and will be discussed further. In Australia, as in other English-speaking countries, government policy is becoming increasingly influential in post-compulsory education. The next section deals with the context of the national training reform agenda, enacted under the previous Labor Government. (It is too soon to foretell changes which may result from the recent election of a conservative government.)

The national training reform agenda

Within Australia, there is evidence of a corporatist alliance between industry, unions, and governments. These communities of interest have been influential in shaping current Australian educational policy, which, in part, advocates closer links between education and industry to improve Australia's economic productivity and industrial competitiveness (Kell, 1993; Sachs, 1991). The private sector, particularly corporate interests, came to dominate educational thinking in the 1980s, suggesting that education should serve the needs of industry and business.

Competency-based training (CBT) in the Vocational Education and Training (VET) sector has been the policy of the Australian Government since the late 1980s, and arose in part from the union push to link pay increases with a commitment to restructure their industrial awards. It was decided to use education and training as the basis of mobility through higher skill levels. However competency standards corresponding to the proposed skill levels in federal awards did not exist, and needed to be defined and registered nationally (Sweet, 1993). The existing system of vocational credentials was replaced by the Australian Qualifications Framework, and courses were required to be (re-)accredited under a national register which mandated a CBT format.

According to Sachs (1991), in order to satisfy the demands of current economic circumstances an attempt is being made to link instrumental purposes and outcomes with a broader liberal generalist perspective, thereby reducing the value of education to economic utility. "Skills that are not seen to be of significance are devalued. Other goals such as critical understanding, political literacy, personal development, mastery and skill, self-esteem, and shared respect are beside the point or 'too expensive'" (Sachs, 1991, pp. 127-128). For the union movement also, the assumption is that, through quantity and quality of skills provided to youth, economic progress can be achieved. However Sachs (1991, p. 129) states: "current economic realities do not justify the claim that a more competitive school regime will raise productivity and widely enhance job opportunities." This also applies to the VET sector.

Discussing the Adult Basic Education sector (currently known as Adult, Community and Further Education (ACFE)), Seddon (1994) noted that it

> has been able to maintain the practice of a holistic, just and enlightening education because it has always been the 'other' to mainstream education. It has developed in the spaces left behind as educational practice has been colonised and institutionalised for non-educational purposes. (p. 9)

Seddon continued that its position on the margins of mainstream education has probably contributed to the lack of accountability for funds spent, permitting teachers in this sector considerable freedom concerning what and how to teach (as described above). However in the late 1980s the sector was catapulted firmly into educational mainstream when its economic utility was affirmed. The new vocationalism has been accompanied by "the generalisation of scientific management approaches to regulate the process of educational production. As a result, bureaucratic categorisation of levels of skill, performance, and credentials . . . and the application of coercive management and accountability practices are further entrenched." (Seddon, 1994, p. 12)

The values associated with the notion of CBT have been called into question by Stevenson (1995), who noted its essential features as follows:

- a pre-emptive good is assigned to education, viz the achievement of more efficient industrial practice
- valued knowledge is constructed by spokespersons for industrial bodies, as timeless, independent representations of a given universal reality
- to achieve the pre-emptive good, education is valued for its development of the ability to apply pre-defined knowledge, where that knowledge should emphasise, solely, targeted cognitive processes and demonstrable skills
- power is vested in new institutions, supported by new organising principles
- the construction forced the development of curricula which give almost exclusive emphasis to causal outcomes or performance pre-specified as the appropriate result of instruction. (p. 14)

Stevenson noted that this construction is explicitly normative, but that the nature of the norms is problematic. Ethical questions have been pre-empted and arrived at without consensus, individuals and groups have not been heard. Such concerns can be related to Ernest's (1991) portrayal of technological pragmatists, particularly with reference to mathematics education.

The National Vocational Mathematics Curriculum

In order to facilitate the transition to CBT in the VET sector, a mathematics curriculum framework was designed, including a mapping of an extensive network of topics. A package was prepared for each topic containing a series of learning outcomes, accompanied by a set of relevant assessment criteria for each, sample summative assessment tasks, suggested projects or assignments, exemplars of vocational applications, and a nominal duration upon which rests government funding.

The framework document opens with several pages of rhetoric which are consistent with similar documents for school children in Australia and elsewhere. Not surprisingly, the vocational context is stressed, highlighting the importance of mathematical applications and the use of technology, as well as the relationship with the Australian Standards Framework.

The curriculum framework is rational and logical, but based on positivist notions of education. The topic network is atomistic, and indicates a linear perception of how learning takes place. Even if this were true for children, it is clearly inappropriate for adult learners. Life does not begin with fractions and decimals! There are many adults leading fulfilling lives, both at work and at home, who could not pass a test on the multiplication and division of rational numbers. But, should they be enrolled under this new framework, these adults would not be allowed to progress until such skills had been successfully mastered. Under CBT, the mother of Munir Fasheh (1990), so clearly competent at the mathematics involved in making clothes, would be regarded as incompetent (or Not Yet Competent)!

The question may be posed about the specific need for the curriculum to be solely vocational in orientation. As Stevenson (1995) and others have noted, decisions about education have been made by corporate interests largely in the absence of professional educators. In Australia vocational curricula are decided by Industry Training Boards, themselves problematic in who their membership actually represents, which do not include educators. Certainly mathematics teachers are not represented, nor are their opinions even considered to be of importance. Unfortunately mathematics is not recognised as an industry in the Australian vocational system, so the voices of its teachers cannot be heard. The current VET system has evolved from the Technical and Further Education (TAFE) system, dating from the 1973 Kangan Report, although its original vision was more balanced concerning the needs of the student. As Kangan (1979) noted:

> Put very simply, it is my view that education relates to the development of the whole person as an individual, his personality, social skills and manual skills. Training is concerned with a part of education, the skill-part, whether manipulative or cognitive. This distinction means that although training has a place in a TAFE institution, it is a narrow place and omits the advantages of an educational approach." (p. 16)

The adoption of the values associated with economic rationalism has resulted in the narrowing of VET curricula. Let us turn to an example in the science industry.

Some mathematics topics from the national framework have been selected, presumably on the advice of Industry, to form modules in a course for the preparation of laboratory technicians. The rhetoric of these modules continually stresses the need for vocational applications, yet content is comprised of broad areas of algebraic functions and graphs, geometry, and trigonometry, most of which would rarely, if ever, be used by a technician on the job, as well as arithmetic. Some of these content areas may conceivably be relevant in other subjects such as chemistry and physics, but could reasonably be taught in those contexts. It is difficult to imagine, for example, why a technician would need to solve a quadratic equation in three different ways, even if the workplace which required it did not have access to a graphical calculator or suitable computer package. In any case, the writers of the exemplary materials apparently found it difficult to construct realistic examples of vocational applications, because those given are clearly contrived, and this is evident to the students. Even workplace educators face similar problems, albeit at a more basic level. Further, the summative assessment tasks also contain examples of decontextualised arithmetic and algebra questions, whose justification is spurious in terms of the rhetoric of this project. Of course, the conference sub-theme of *Mathematics, arts and technics* could be seized upon by the enthusiastic teacher, but constraints such as lack of actual preparation time and little, if any, professional development in mathematics education for vocational teachers (even to introduce new curriculum) mean that this is unlikely to happen.

The ACFE sector has its own national competency-based framework which, although not so blatantly vocational in orientation, is still guided by similar principles of teaching, learning and assessment. The curriculum is hierarchical, with five content strands (number, measurement, space, algebra, and statistics), arranged at three levels of attainment. There exists a greater possibility for curricular coherence in this sector through the integration of numeracy with other subject areas, and there is a fairly strong commitment to professional development, although numeracy teachers do not necessarily have a strong background in mathematics-frequently they are literacy teachers. However, it is unlikely that any individual teacher would adopt a historical or ethnomathematical perspective: They do not have the academic background, and neither is the focus of professional development usually supportive of such a direction.

The focus on outcomes-based education has resulted in mathematics curricula which are supposed by their proponents (and the majority of teachers) to be value-free, and acultural. In addition, the use of flexible delivery, which implies the adoption of self-paced instructional materials, and often computer-managed (if not delivered) learning, is likely to reinforce teacher and student expectations of a transmission paradigm. This is particularly the case where writers of curriculum materials have been involved in little or no further study or professional development in mathematics education since graduation-unfortunately a typical scenario in the VET sector.

The place of ethnomathematics

Current VET curricula fail to include ethnomathematics, historical research projects, aesthetics, and so on. That is, non-vocational uses of mathematics are ignored, and the teaching of critical mathematics is implicitly discouraged: Perhaps it could be perceived to be counter to the hegemonic interests of business and industry. And yet, as Ernest (1991, p. 165) argues, "the concern with needs of industry alone may be narrow and counterproductive." But, given the recognition that general knowledge and transferable skills are more suited to industry than narrow vocational skills, this does not seem to have been realised in the current VET mathematics curriculum. Ernest (1991, p. 165) continued that "the emphasis on certification as the outcome of education means that the utilitarian knowledge and skills of a previous epoch survive unquestioned in the curriculum." He also considered that the overvaluing of technology (as observed in the Australian trend towards flexible delivery) means that attention and resources may be diverted from the human interactions of education. Ernest asserted that education rather than training would better serve society, by contributing fully to the development of each of its individual members, enabling them to better adapt to new demands and responsibilities.

So far, I have discussed the utilitarian values and implicitly held philosophy of mathematics education prevalent in countries which have adopted a CBT approach to curriculum and assessment. Not only does this virtually preclude the possibility of offering students a mathematics education which values broader social and cultural aspects, but it also provides a mechanism for holding teachers (and other industrial trainers) accountable, although I have not discussed the latter in any detail. I now turn to the concept of ethnomathematics, but from a different perspective.

D'Ambrosio (1991, p. 18) defined the term *ethnomathematics* as that mathematics which is practised among identifiable cultural groups, with the concept of *ethno* taken to include their "jargons, codes, symbols, myths and even specific ways of reasoning and inferring." According to D'Ambrosio, every cultural group explains and copes with diverse realities in diverse ways, derived from previous experiences of coping with or attempting to understand such realities. O'Connor (1994) has suggested that an ethnographic approach be adopted in understanding the literacy (and numeracy) of production workers (often labelled in ignorance as *unskilled*); the workplace can be considered as a cultural site in the sense used by D'Ambrosio, with workers operating within a specific discourse. O'Connor (1991, p. 262) asserted that "there is an urgency which demands that educationists learn to read the world that workers inhabit, and to contribute to the development of learning responses based on that reading." Although not intended for such use, the ideas expressed in Bishop's (1994) paper could be applied to the workplace, if the term *indigenous peoples* were replaced by *process workers*. Here also, conflicts may arise at the pedagogical, institutional, and societal levels if the mathematics of the dominant group, namely that which is currently offered in schools, universities and VET institutes, is imposed on a cultural minority, instead of recognising, valuing, and integrating workers' existing knowledge, needs and desires. (See Sefton, Waterhouse & Deakin, 1994, for an example of what might be achieved by educators collaborating with workers.) Research into industry-based mathematics teaching needs to build on the foundations of situated cognition as well as to incorporate findings from sociological research; educators also need to beware of imposing their own enculturated views of learning onto the workplace.

Conclusion

This paper has contrasted the kind of pedagogical practices possible before and after the imposition of CBT curriculum and assessment practices on adult education. It has highlighted the hegemony of utilitarian values in post-compulsory education, to the detriment of a broad education for adults, old and young. Policy shifts on a global level are required in order to modify intended and implemented curricula, with a concomitant need for the further education of curriculum developers and professional development of practitioners. Conferences such as these offer the possibility of initiating such changes, by extending their focus to include adult learners, encouraging and enhancing professional development of practitioners in this field, and by making appropriate recommendations which may eventually impact on government policies.

References

Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in the mathematics education of indigenous peoples. In A. Arifin (Ed.), *Proceedings of the sixth South East Asian Conference on Mathematics Education,* (pp. 402-408). Surabaya, Indonesia: Institute of Technology Sepuluh.

D'Ambrosio, U. (1991). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. In M. Harris (Ed.), *Schools, mathematics and work*. Hampshire, UK: Falmer.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hampshire, UK: Falmer.

Fasheh, M. (1990). Community education: To reclaim and transform what has been made invisible. *Harvard Educational Review, 60*(1), 19-35.

FitzSimons, G. (1993, March). *Constructivism and the adult learner: Jane's story*. Paper presented at the Constructivism: The Intersection of Disciplines Symposium, Deakin University.

FitzSimons, G. (1993a). Constructivism and the adult learner: Marieanne's story. In B. Atweh, C. Kanes, M. Carss, & G. Booker (Eds.), *Contexts in mathematics education* (pp. 247-252). Brisbane: Mathematics Education Research Group of Australasia.

FitzSimons, G. (1993b). Students creating mathematical models of their own. *Vinculum 30*(1), 6-8.

FitzSimons, G. E. (1994). *Teaching mathematics to adults returning to study*. Geelong: Deakin University Press.

FitzSimons, G. E. (1995, in press). *The inter-relationship of the history and pedagogy of mathematics for adults returning to study*. Paper presented at the International Study Group for the Relations of History and Pedagogy of Mathematics, Cairns, Australia, 30th June-4th July, 1995.

Kangan, M. (1979). A comment on 'TAFE in Australia.' In D. McKenzie & C. Wilkins (Eds.), *The TAFE papers* (pp. 6-20). Melbourne: Macmillan.

Kell, P. (1993). Reform in TAFE: Can a leopard change its spots? *In After competence: The future of post-compulsory education and training, Vol. 1*, pp. 180-192. Brisbane: Centre for Skill Formation Research and Development, Griffith University.

O'Connor, P. (1994). Workplaces as sites of learning. In P. O'Connor (Ed.), *Thinking Work: Vol. 1. Theoretical perspectives on workers' literacies* (257-295) Sydney: Adult Literacy and Basic Skills Action Coalition.

Sachs, J. (1991). In the national interest? Strategic coalitions between education and industry. *Australian Journal of Education, 35*(2), 125-130.

Seddon, T. (1994). Changing contexts-New debates: ALBE in the 1990s. *Open Letter, 5*(1), 3-16.

Sefton, R., Waterhouse, P., & Deakin, R. (Eds.). (1994). *Breathing life into training: A model of integrated training*. Doncaster, Vic.: National Automotive Industry Training Board.

Smith, D. E. (1958). *History of mathematics*. New York: Dover.

Stevenson, J. C. (1995, October). *The metamorphosis of the construction of competence*. Inaugural professorial lecture. Brisbane: Griffith University.

Sweet, R. (1993). *A client-focussed vocational education and training system?* Sydney: Dusseldorp Skills Forum.

THE HISTORY OF MATHEMATICS IN INITIAL TEACHER TRAINING

Geoff Sheath, Wendy Troy and Dr Muriel Seltman, The University of Greenwich, London, UK

This paper describes the development over eight years of a unit on the History and Nature of Mathematics. The unit is taken as a compulsory part of their course by trainee teachers with a mathematics specialism. Primary trainee teachers (intending to teach children from 4 to 11) take the unit in year 3 of a four-year course. Secondary trainee teachers (intending to teach children from 11 to 18) join the course after at least two years advanced study and take the unit in year 1 of a two-year course.

Context and rationale for the unit

In 1988 the staff at the University of Greenwich had to write a completely new course for students intending to be Primary teachers because changes in government regulations now required 50% of the course to be devoted to the study of the students' specialist subject at the students' own level. The emphasis in the immediately previous mathematics specialism had been on the content and pedagogy of Primary mathematics. The new maths subject specialist units were chosen to provide support for all parts of the school mathematics curriculum. They were also chosen, where possible, to give a spread of challenging mathematics and opportunities for open-ended problem solving. Geometry and topology (with an emphasis on Logo), Algebra, Mathematical modelling, Statistics & probability, and Calculus & analysis together with a Project were the units eventually selected.

However the team also felt that students would benefit from a unit towards the end of the course that would synthesise and contextualise the other units. This unit was originally entitled 'Key Issues in Metamathematics', the prefix meta- being used as in philosophy to denote 'the study of the nature of' but later the title was changed to 'The history and nature of mathematics' to remove confusion with Hilbert's use of the term and to reflect changes in emphasis in the unit.

The objectives for the original unit were that by the end of the unit a student should be able to:

- provide evidence of links between conjecture, justification, proof, elegance and rigour
- critically discuss the view of mathematics as objective and absolute, and
- demonstrate familiarity with the implications that perspectives of mathematics have on its pursuance.

Although, ostensibly there appears rather little history of mathematics in the original specification for the unit, Boyer's 'History of Mathematics' was one of seven books on the indicative reading list and at least three out of ten sessions were given over to historical topics. One lecture was on 'The mathematics of Blaise Pascal', drew on the lecturer's own research and explored, in part, the issue of authority around Pascal's paper on the existence of air pressure. Another, alongside the Calculus and analysis unit, took up the issue of the infinitesimal and how attempts were made to resolve the difficulties outlined by Bishop Berkeley through ε-δ to non-standard analysis. Yet another looked at Euclidean geometry and the change in the view of the nature of mathematics demanded by the discovery of non-Euclidean geometries in the early 19th century.

Development of the unit

Developments in the unit have taken place for a number of reasons. Firstly, experience of delivering the unit, and student feedback, have led the unit to evolve. Secondly, a greater allocation of taught time has enabled the teaching to develop beyond just lectures and seminars prepared by staff. In particular all students are now asked to prepare two mini-presentations of about ten minutes each and these give them a flavour of historical research. We also now make use of our proximity to the Royal Observatory at Greenwich and the British Museum to make two visits. Thirdly, new books which are accessible to students, in particular George Joseph's 'The Crest of the Peacock' and Paul Ernest's 'The Philosophy of Mathematics Education', have supported staff in broadening the range of the unit. Fourthly, the teaching team has been enlarged and our different expertises have assisted the broadening of the unit. Lastly the unit has been formally reviewed as it has been incorporated into new courses for intending secondary teachers and as the Primary course has been revised.

Content of the current unit

The general aim of this unit is that it shall be an eye-opener to as many students as possible, most particularly to those who have not yet given any thought to the nature of mathematics: its objects, operations, methodology and so forth. By an eye-opener is meant breaking down unconscious preconceptions, whatever they may be, and stimulating awareness of alternative views on the issues surrounding this discipline.

Probably all of us know how surprised many people are to hear the phrase 'History of Mathematics'. It is all too often an unspoken assumption that mathematics is given and (so to speak) dropped from the skies ready-made.

Although there is much indirect relevance to the classroom, the unit is principally aimed at student perceptions which, it is hoped, will be distilled into transformed attitudes within the classroom and therefore have an indirect impact.

The unit has some general conceptual objectives.

First, we intend that students need to know the outlines of the debate about the fundamental nature of mathematics. They should know how the idea of the absoluteness of mathematical truths is contrasted with the notions of logical and cultural relativism (where logical relativism refers to the dependence of any body of mathematics on logical presuppositions and cultural relativism refers to the influence of society on the mathematical content appearing at any time or place and also the mode of expression of this content).

Closely connected with this is the debate about the pure objectivity of mathematics. It is common for students to see mathematics as 'out there' in the external world ready to be discovered. They need also to consider the proposition that the external world, alone and of itself, would never give birth to the corpus of knowledge known as mathematics, which is instead brought into being by a holistic interaction between subject and object - in other words that mathematics is constructed by people.

Put briefly, we would like students to grasp the humanness of the mathematical process, despite the fact that correct mathematics has a 'cosmic objectivity' (to use a rather dramatic phraseology).

Secondly, maths teachers are all familiar in the classroom with the cry, "What *use* is this?", in other words how will this help me to earn a living (in perhaps hairdressing) or what direct (probably money making) application does it have? Many forces encourage a utilitarian, not to say mercenary view of the purpose of mathematics. So our unit considers the debate about the application of mathematics, and has aesthetic, intellectual and even spiritual objectives (even if these refer only to the human spirit).

Thirdly the often assumed political neutrality of mathematics calls for challenge and debate. One facet of this is around the issue of the exploitation of mathematics by vested interest not only today, but going back a long way in recorded history. It can be argued that tiny minorities in possession of mathematical knowledge have surrounded it with secrecy and an atmosphere of mystique whose intimidation has provided a powerful weapon in reinforcing social control. In our world it is all too obvious that prestige and credibility is claimed in a variety of fields - advertising, politics, pressure groups - on the basis of alleged mathematical credentials, often statistical. It is often a revelation to students that there is a (small 'p') political dimension to views about the nature of mathematics and mathematics education.

Finally, we intend that students be aware of the issues inherent in interpreting the mathematics of other times and cultures from the viewpoint of our own. It may be argued that deep in the consciousness of the West is the assumption of cultural superiority, the assumption that almost all gains in human civilisation, and certainly mathematics, have originated in WASP (White Anglo-Saxon Protestant) culture. Such ethnocentricity urgently needs to be tempered by knowledge of the contribution of all humanity to present-day mathematics, which is itself global in character. The hierarchical view whereby some contributions are considered superior to others, as if there were some quantitative measure, has to be tested.

Such conceptual objectives permeate the specific topics within the unit.

The most recent version of the unit is taught as follows. We begin by asking such questions as "What is mathematics?", "What is a number?", "What is meant by 3 + 4 = 7 ?" to elicit and clarify the students' starting points. Following this we look at the numeral signs, but not merely descriptively. The characteristics of the sign-systems are examined, degrees of cipherisation, use of repetition, structure (for example place value), use of zero, all leading to the Hindu-Arabic system which embodies all advantageous aspects and provides a basis for algebraic abstraction in Europe in the Renaissance.

The next topic is the emergence of algebra, particularly its notation, looked at as a process culminating in a detached and purely quantitative symbolism whose great strengths are, perhaps, indifference to content and facilitation of scientific predictions. Descartes completes this detachment from physical / geometrical constraints and paves the way for calculus.

Calculus is a further topic whose genesis and development is looked at mainly in the light of the logical problems associated with the indivisible and infinitesimal (a very salutary lesson in mathematical fallibility)

In the seventeenth century context a natural follow on to calculus is the applicability of mathematics, the possibility of which itself is a problem of what one might call ontological interest. There are various questions to be answered including that of whether mathematics exists or could exist purely for its own sake or whether its development has been called forth by the necessity for applications. Any consideration of such questions can be achieved only in the context of enumeration of some of mathematics' countless applications since the early seventeenth century.

Chinese, Indian, Mayan, Arab and other civilisations' mathematics are treated and are often followed up in student presentations. We find it important to treat all these distinctly and not as early adjuncts of European mathematics. A lot of geometry is met in this but proof and the proof-structure, originating in the Hellenic and Hellenistic world, are further essential themes. Furthermore the cultural relativity of the notion of proof itself can be appreciated through the different views of adequate checks as seen through the eyes of different cultures, and, of course, logical relativity has an obvious exemplar in non-Euclidean geometry.

Finally, we need to challenge 'the illusion of certainty' and illustrations of uncertainty from Zeno to Cantor provide very accessible ideas which students feel free to argue about since even the experts disagree.

Permeating everything is the issue of admissible and necessary evidence. This, of course, may take a variety of forms: Ishango bones, tablets, papyri, knots, oral tradition, books, software. And if there is time in some instances of the delivery of the unit the very validity of the concept 'History of Mathematics' may be debated.

Practical work

Both primary and secondary teachers need to develop their own skills in using and applying mathematics as well as thinking forward to possible teaching situations with children. We have used a variety of practical work to illustrate this, varying with the time and the staff available. Paulos Gerdes' work on the mathematics of basket weaving in Mozambique is highlighted by actually weaving paper strips and 'unfreezing' the 'frozen' mathematics. The treasures of the Vedas are revealed in Tirthaji's twentieth century reconstruction, applying two sutras to long multiplication. Chinese mathematics is investigated by playing games and solving problems or puzzles which have come down to us. We are always on the look out for other activities which fill the dual role of widening our students' experience of mathematics and gradually increasing their own repertoire for teaching in school.

Use of original material

Nothing can compare with direct contact with original historical material and this is provided, notably in reference to the emergence of algebra in the Renaissance, albeit only with photocopies. Photocopies of original books or manuscripts are the next best thing to the originals and enable students to take on the role of active researchers.

There is all the difference in the world between this and the use of secondary sources (however admirable) which present such materials often in anachronistic translation. In the latter many dimensions of modernity are interposed between the student and the 'real' object of study, for example modern paper, print and interpretation. Judiciously selected for its mathematical level, and sometimes with linguistic assistance, historical mathematics becomes maximally accessible.

Visits

Outside visits are an essential part of the unit as they send an unequivocal message that mathematics is not, and should not be, confined to the classroom. Travelling distance and cost are important considerations. We visit the Royal Observatory in Greenwich Park for several reasons: we are the University of Greenwich and the Observatory is a local landmark, the problems of navigation and consequent maritime mathematics are rich sources for research, and finally the visit challenges students to find the mathematics in situations which they may not see as obviously mathematical. Groups of two or three students are jointly expected to extract some maths and research one aspect from the observatory and present their findings. How an astrolabe, sextant or quadrant work, calculating latitude and longitude, Harrison's clocks and the mathematics of telescopes are some of the examples which have been chosen.

The other visit we make is to the British Museum where the students are given a list of the main mathematical artefacts which are the evidence used in writing histories of mathematics. We are also very privileged that one of the museum's experts in ancient cuneiform writing has been willing to give our group a guided tour of some of the mathematical artefacts, giving them a fascinating and unique insight into the mathematics, context and current research into Ancient Mesopotamia.

Assessment of students

Formal assessment of the unit is through examination. In the case of Primary students a typical paper has four questions of which the student has to choose to answer two in an hour and a half. A typical four questions might be:

- Put the arguments for and against mathematics being a subject that has to be useful. Draw your own conclusions and relate them briefly to the teaching of primary school mathematics
- Choose a mathematician and describe the contribution that she or he has made to mathematics.
- Describe the characteristics of the Hindu-Arabic number system that makes it distinct and gives it its power. Compare and contrast it with two other ancient number systems. Comment on the educational potential of the study of alternative number systems.

- Describe the 'mathematical' achievements of one non-European civilisation. Discuss whether these are truly mathematical achievements (as opposed to, say scientific or arithmetical).

All students are asked to give mini-presentations during the course and the research done for one of these will often form the basis for one of their answers (in this case the question about the mathematician). Wherever appropriate students are asked to relate their answers to the classroom.

Secondary students are also assessed by examination, but in their case they have a single, previously-seen, compulsory question based around a given article.

Student evaluation of the unit

Our evaluation of the unit has been mainly through a rather wide-ranging questionnaire exploring several aspects of the unit and conceived both as a measure of the unit's effectiveness and as a vehicle for improving what we offer. Some groups have completed the questionnaire on completion of the unit input and before any assessment but most primary groups have completed theirs several months afterwards, when they have returned from their final school experience. The following analysis is based on 65 replies.

Since our main aim is to change and broaden the students' viewpoint, we asked directly, "Has this unit changed your view of mathematics? If so in what way?" This elicited a very positive response (90%) with a variety of reasons being given, each personal to the particular interests of that student.

We also asked "Has the unit helped you understand alternative views on mathematics and in what way?" About 80% answered Yes.

The third question in this section asked "As a prospective teacher, has the unit increased your understanding of children's problems in learning mathematics? If so in what ways?" Again about 80% answered Yes but the reasons given clearly indicated quite different interpretations of the question. Several primary students felt that their own struggles with the concepts of the unit, the difficulties with research and the demands of making presentations had given them more insight into how children felt when learning mathematics and the importance of motivation. Most of the others interpreted the question as referring to the problems of learning mathematics through the ages in different societies and cultures so they referred positively to the range of methods introduced and different contexts for mathematics which they could pass on to their pupils.

For 20% of those questioned, any relationship between history and philosophy of mathematics with teaching in school was too remote to be recognised. For some it appears that a short unit is not long enough to challenge the assumption that the existing syllabus and teaching methods are the best.

The questionnaire has already given valuable feedback as to which sessions were most enjoyable, interesting and challenging. This information has been instrumental in planning the programme for year 1995-96. Primary students particularly enjoyed and found interesting the work on early number systems in Egypt, Babylon, and beyond, they also liked the two visits and the presentations on a mathematician and on an aspect of maritime mathematics. The secondary students also found the visits stimulating, enjoyed sessions on the emergence of algebra and on infinity, were challenged most discussing 'the very small and very large' and almost all found the history of different number systems useful.

All students have to do a mathematical project towards the end of their course which can be developed from any unit they take (or none). Roughly a third of each recent cohort, primary and secondary alike, have chosen a topic linked to this unit, which is in itself a measure of success. Further investigations should reveal whether this proportion changes significantly over time.

Conclusions

The consensus from students and staff on some issues are quite clear:

- The actual taught sessions totalling 30 hours are best co-ordinated and taught by one or at most two people but with timetabled input from colleagues to share their expertise in their own specialism.
- Variety of input is stimulating to the students and this is achieved by the two outside visits, two topics for research and associated presentations, three members of staff with different styles, some practical work, a little from video or TV programmes, discussion of philosophical or political issues and some direct experience of looking at historical material.
- Many students begin what may be a lifetime interest in the history or philosophy of mathematics by doing this unit. One or two we realise will never accept this as 'real' mathematics but 90% have moved on to a new view of mathematics.

A VISÃO DE ANASTÁCIO DA CUNHA SOBRE O MODO DE ENSINO DA MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE: DA SUA ACTUALIDADE

Guilherme de Sousa Belchior Vieira, Universidade Moderna, Portugal

"As luzes *que iluminaram a sua inteligência e a sua sensibilidade não eram só epocais: dimanavam, antes, da grandeza individual do homem enleado na sarça ardente do seu tempo."*
- Joel Serrão *(1)*.

"*A verdadeira Sciencia consiste em saber usar a Sciencia.*"
- Anastácio da Cunha *(2)*.

Introdução

O tema da comunicação que vos passo a expor situa-se historicamente na segunda metade do século XVIII, uma época caracterizada em Portugal, como em boa parte da Europa, por um "despotismo esclarecido" e um "regalismo exarcebado" de que o Marquês de Pombal foi, entre nós, o expoente máximo *(3)*.

Ultrapassada a fase da governação pombalina em que a preocupação central incidiu sobre problemas militares (1760-1764), perante a ameaça concretizada de invasão do território nacional por tropas francesas e espanholas coligadas, e enfrentada a crise comercial e fiscal (1764-1770), houve que, com determinação e empenho pessoal do Primeiro-Ministro, remediar as lacunas de um sistema de ensino caduco, mas em funcionamento, e, ao mesmo tempo, desenvolver todo o processo da sua substituição. A reforma da Universidade de Coimbra de 1772, considerada uma das mais avançadas da sua época, veio culminar aquele processo e foi, segundo Borges de Macedo, "a expressão máxima do governo pombalino" *(4)*. O que esta verdadeira "refundação e reformação" teve de mais significativo foi, sem dúvida, o seu espírito experimental, um "espírito novo" capaz de permitir, como o pretendia D.Francisco de Lemos, Reformador-Reitor da Universidade, que os professores fôssem ao mesmo tempo *Mestres e Inventores* *(5)*, isto é, "transmissores e criadores de saber" *(6)*.

Focalizada na figura do Primeiro-Tenente de Artilharia José Anastácio da Cunha, que foi em 1773 o primeiro Lente de Geometria da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra, por imposição do Marquês baseado numa informação do então Marechal-General do Exército Conde de Lippe, a minha comunicação compreende três proposições, nesta sequência:

- *Primeira proposição* : Os Estatutos Pombalinos que D.José outorgou, em 1772, à Universidade de Coimbra, procurando contrariar o atraso do nosso país em relação aos progressos que a ciência atingira na Europa, revelam que os seus legisladores se encontravam decididamente voltados para uma pedagogia de orientação racionalista conducente à adopção de um sistema de ensino intimamente ligado ao real e ao concreto, em substituição definitiva das "sombrias especulações peripatéticas" ;

-*Segunda proposição* : O *modo de ensinar* de Anastácio da Cunha, sendo conforme ao que os Estatutos estabeleciam, constituíu uma excepção no quadro pedagógico "resistente à mudança" da Universidade de Coimbra setecentista ;

-*Terceira proposição* : A atitude pedagógica assumida por Anastácio da Cunha tinha o seu fundamento na *experiência* por ele colhida, durante os nove anos (1764-1773) em que prestou serviço no Regimento de Artilharia Porto, então aquartelado na Praça de Valença, donde marchou directamente para a Universidade de Coimbra: *experiência* como discípulo da Aula de Artilharia regimental, criada de acordo com o plano de instrução minuciosamente elaborado pelo Conde de Lippe em 1763; *experiência* pelo convívio empenhado que cultivou com o núcleo de oficiais estrangeiros "refugiados" em Valença, em torno de muitas das obras mais avançadas dos países "iluminados" da Europa, que com eles entraram em Portugal (Valença era então "um outro mundo", na expressão de Aquilino Ribeiro *(7)*).

Primeira proposição

Na carta régia que, em Dezembro de 1770, criou a Junta de Providência Literária, era ordenado explicitamente que, uma vez ponderados os remédios considerados mais próprios para cessarem a decadência e ruína da Universidade, fôssem apontados, a par dos cursos científicos, os *métodos* a estabelecer para "a fundação dos bons e depurados estudos das Artes e Ciências". A metodologia de ensino era "a mais depravada e absurda" *(8)* e os estudantes, que nada estudavam, "ocupavam-se, durante a hora do curso, na jogatina, leitura de novelas, a fazer incisões nas bancadas (...) e atirando bolas de papel uns aos outros" *(9)* , enfim, práticas de passar o tempo que perdurariam... Depois de alguns meses de trabalho intenso, sob a inspecção directiva do Marquês de Pombal, a Junta emitiu, em Agosto de 1771, o seu parecer através de um relatório minucioso a que deu o título de "Compêndio do Estado da Universidade de Coimbra no tempo da invasão dos denominados jesuítas e dos estragos feitos nas ciências e nos professores e directores que regiam pelas maquinações dos novos Estatutos por eles publicados". Na realidade, para o profundo estado de decadência da Universidade não eram isentos de culpa, entre outras ocorrências, os campos de África, o cativeiro espanhol e a Guerra da Aclamação *(10)*. Passado um escasso mês, o Marquês comunicava à Universidade que a partir de Outubro do ano seguinte, os estudos passariam a ser regulados por novos Estatutos e Cursos Científicos. Como se trabalhava e decidia celere naqueles tempos... E, na apreciação prestigiada de Luís de Albuquerque, os programas então elaborados revelavam que a Junta "conhecia bem o nível científico da época" *(11)*.

No volume III dos Estatutos, às Matemáticas é atribuída a perfeição "indisputável entre todos os conhecimentos naturais, assim na exactidão luminosa do seu Método, como na sublime e admirável especulação das suas Doutrinas" para se concluir que se a "Universidade ficasse destituída das luzes das Matemáticas (...)

não seria mais do que um caos, semelhante ao Universo se fôsse privado dos resplendores do Sol." Nas primeiras lições das quatro cadeiras do Curso Matemático (Geometria, Cálculo, Foronomia ou Ciências Físico-Matemáticas e Astronomia) seria abordada, ainda que resumidamente, a evolução histórica das ciências a estudar. Para atrair os estudantes para a Matemática eram-lhe atribuídas regalias excepcionais: aos fidalgos da Casa Real contavam-se os quatro anos do Curso como "tempo de serviço em campanha" e a todos se dava o direito ao hábito de uma das ordens militares. Contudo, mesmo com estes "incentivos", constatou-se que foi reduzido o número de estudantes *ordinários* da Faculdade de Matemática, isto é, os estudantes que pretendiam obter a graduação ou formação em Matemática, porque, segundo um relatório de 1777, "não serem destinados por Ordens Régias os Matemáticos Graduados para os Empregos e Lugares que há desta Profissão". E concluía o mesmo relatório: "Pode-se afirmar que este foi sempre o grande mal que perseguiu nestes Reinos os estudos Matemáticos" *(12)*.

No respeitante ao *modo de ensinar*, os Estatutos aconselhavam aos professores a evidenciar as relações com concreto quando tal fôsse útil ou necessário, como sucedia, por exemplo, nas lições de Geometria sobre sólidos que deveriam ser ministradas "à vista dos corpos geométricos"; definiam a teoria e a prática como complementares, só se considerando eficiente o ensino em que fôssem abordados estas duas vertentes, como sucedia, por exemplo, nas lições de Trignometria que deveriam "exercitar os discípulos nalguns problemas em que se visse sensivelmente a utilidade do cálculo trignométrico" e nas lições sobre cónicas em que os professores deveriam indicar "os diferentes usos para que elas serviam". A esta ideia da ligação entre a teoria e a prática se ficou a dever a criação do Observatório Astronómico, directamente ligado à cadeira de Astronomia do 4º Ano do Curso Matemático, em funcionamento no final de 1775.

Considerando que nas Matemáticas "se aperfeiçoavam cada dia mais coisas e se inventam outras", os Estatutos obrigavam a congregação da Faculdade a indicar todos os anos quais os livros, incluindo compêndios estrangeiros (a traduzir), que conviria adoptar para o ensino das diversas cadeiras. No entanto, aos professores competiria, para além da explicação das proposições dos textos aprovados, "acrescentarem as que lhe parecessem necessárias e neles faltassem, dando sempre por escrito aos discípulos a demonstração de todas elas".

Por último, refira-se ainda que os Estatutos reconheciam o encargo de promoção e organização da investigação científica que à Universidade competia ao idealizarem a criação dos Grémios das Faculdades para que neles "se concebessem" os discípulo mais dotados, uma vez terminados os respectivos cursos, "compreendidos em trabalhar; fazendo (...) os estudos mais avançados e profundos". Pena foi, concluía Luís de Albuquerque, que algumas destas medidas não tivessem passado da letra dos Estatutos para a prática e que outras, embora cumpridas, não se tivessem sido impor até ao momento da queda do governo Marquês de Pombal *(13)*.

Segunda proposição

O Primeiro-Tenente de Artilharia José Anastácio da Cunha assumiu a regêngência da cadeira de Geometria na Faculadade de Matemática da Universidade de Coimbra no ano lectivo de 1773/74, sucedendo ao Dr. Michele Franzini, que passou a reger a cadeira de Álgebra, ficando a reger a cadeira de Astronomia o Dr. Michele António Ciera e conservando o Dr. José Monteiro da Rocha a cadeira de Ciências Físico-Matemáticas. A falta do grau de Doutor que, por determinação do Marquês, não fôra impedimento para a sua nomeação como Lente, também não impediu Anastácio da Cunha de ser naquele reduzido corpo docente o professor mais "compatível" com o "espírito novo" da reforma pombalina.

Dos três Doutores, apenas Franzini tinha uma escassa e frustrante experiência de ensino de Álgebra no Colégio dos Nobres: Ciera era engenheiro e tinha exercido as funções de "prefeito de estudos" do mesmo Colégio, funções predominante ligadas a actividades literárias, e Monteiro da Rocha, um ex-jesuíta, era um investigador prestigiado no âmbito científico da matemática.

Sobre os santos Evangelhos, os quatro Lentes (um deles envergando o seu uniforme mlitar) juraram observância fiel dos Estatutos e "pôr todo o seu cuidado e vigilância em que as lições fôssem as mesmas que estavam determinadas e os *métodos* os mesmos que se achavam neles estabelecidos".

"O meu *modo de ensinar* - escreveria Anastácio da Cunha já depois de ter passado pelos cárceres da Inquisição- era o que a minha consciencia e inteligencia, perfeitamente conformes n'esse ponto com que os Estatutos mandam, dictam. Expunha o objecto das proposições, a sua conexão e dependencia; o artifício com que Euclides (os "Elementos de Euclides" era o livro da cadeira de Geometria) consegue quasi sempre unir a facilidade ao rigor geometrico; e d'este procurava dar aos estudantes o conhecimento necessario. Não me demorava em ler ou repetir literalmente (como os meus companheiros costumavam) as proposições que por faceis nem carecem de explicação, nem a admitem, só para poder empregar tempo suficiente em indicar aos estudantes as verdadeiras dificuldades da lição, e facilitar-lh'as quanto as minhas tenues forças o permitiam. Se restava algum tempo, ensinava o uso de algumas proposições pelo estylo Dechales e Ozanam *(14)*. Por'em queria que tambem os estudantes trabalhasem, e os obrigava a resolver problemas. Tudo perfeitamente conforme os Estatutos, e egualmente contrario ao que se tinha practicado, e practicava na Universidade" *(15)*.

Esta tão determinada "compatibilidade" de Anastácio Cunha com os Estatutos, numa fase resistentemente conservadora de práticas institucionais de séculos, não podia deixar de incomodar. Chamado ao Reitor, depois de ter, "forcejado mez e meio por ensinar deveras", e confrontado com a arbitragem de Monteiro da Rocha: contra o seu sistema de ensino "não se podia dizer cousa alguma, senão que já estava outro", foi Anastácio da Cunha compelido a conformar-se com o método estabelecido: "O mestre repetia pelo livro ou de cór literalmente as proposições da lição; e no dia seguinte cada estudante satisfazia repetindo de cór a proposição que lhe perguntavam. Nem se mostrava o uso das proposições, nem se resolviam problemas (...) Debalde solicitei os instrumentos para isso (ensino das praxes no campo) necessarios (...) Mas similhantes lições dão trabalho aos mestres e luzes aos estudantes; e isso é justamente o que não convém" *(16)*.

A queda do Marquês de Pombal não podia deixar de arrastar tão "visionário" Lente...

Terceira proposição

Anastácio da Cunha teria sido estimulado, através dos seus estudos na Casa de Nossa Senhora das Necessidades da Congregação do Oratório, no sentido de de se lançar na *exploração de outras paragens* para além dos domínios tradicionais dos planos de estudos dos colégios religiosos da época. É que os Oratorianos ensaiavam então um *ensino experimental*, um ensino "modernizante e com maior cultivo das ciências naturais" *(17)*. O interesse confessado do jóvem Anastácio da Cunha pela Física e pela Matemática exigia um desenvolvimento que "a curiosidade sem mestre", que até aí lhe bastara, não podia proporcionar-lhe, num país carecido de obras de estudo e consulta como era Portugal no século XVIII.
É minha convicção que ao alistar-se no Regimento de Artilharia do Porto, aquartelado em Valença do Minho, ele sabia o que procurava: um "refúgio" e a oportunidade de desenvolvimento científico por que tanto ansiava. Que encontrou

na Praça de Valença que procurava, atestam-no os nove anos que ali permaneceu.

No século XVIII e até1772, perante a tentativa falhada do Colégio Real dos Nobres de Lisboa, as Aulas de Artilharia, surgidas nos nossos redutos defensivos a partir de meados do século XVII, foram, pese a irregularidade do seu funcionamento e do nível do ensino ministrado, responsáveis pela introdução em Portugal de um ensino moderno, científico e prático. Das disciplinas ensinadas, a Matemática assumia um interesse particular que transcendia o âmbito castrense, face à decadência confrangedora dos colégios religiosos. Como refere Gomes Teixeira, os dois principais incentivos para o seu estudo entre nós, a Náutica e a Astrologia, tinham-se perdido. A aplicação da Matemática à Artilharia e Engenharia havia, entretanto surgido como um novo estímulo *(17)*. O Conde de Lippe, conferiu, em 1763, às Aulas de Artilharia um notável alento, estabelecendo como livros rigorosamente obrigatórios obras científicas e técnicas de origem francesa e determinando que estas aulas "não deveriam reduzir-se ao simples conhecimento dos factos, mas ensinar a arte de tirar de um pequeno número de factos conhecidos consequências gerais para os factos incógnitos: isto era o que ensinava a teoria".

Da Aula de Artilharia da Praça de Valença do Minho, de 1764 a 1773, foram Lentes dois oficiais de grande prestígio técnico na Artilharia e Engenharia e também eruditos em Matemática, como o era igualmente o Marechal-General: o Tenente-Coronel francês Luís d'Alincourt e o Coronel escossês Diogo (James) Ferrier. Para além de discípulo excepcionalmente empenhado na discussão crítica dos temas científicos abordados na Aula de Artilharia, Anastácio da Cunha soube retirar da arte que deve ser a instrução militar a sua *regra* e os seus *princípios*. Como *regra*, o perfeito conhecimento do que se pretende transmitir; como *princípios*, a definição da finalidade a alcançar, a preparação e planeamentos prévios, a criação e manutenção do interesse dos instruendos, a utilização dos sentidos a máxima actividade, a simplicidade, o factor humano e a confirmação sequencial. Estes princípios revelar-se-iam, porém, inaplicáveis no ambiente retrógrado da nossa Universidade setecentista.

Oeiras, Abril de 1996

Guilherme de Sousa Belchior Vieira

Notas

(1) *"Evocação de José Anastácio da Cunha", in Actas do Colóquio Internacional Anastácio de Cunha- o matemático e o poeta, Lisboa, Imprensa Nacional, 1982.*

(2) *"Carta Físico-Matemática" (1769).*

(3) *António Leite, "A Ideologia Pombalina- Despotismo Esclarecido e Regalismo", in "Brotéria" Maio-Junho 1982.*

(4) *Jorge Borges Macedo, "O Marquês de Pombal, 1699-1782", Lisboa, Biblioteca Nacional- Série Pombalina, 1982.*

(5) *"Relação Geral do Estado da Universidade de Coimbra" (1777).*

(6) *Joaquim Ferreira Gomes, "Pombal e a Reforma da Universidade", in "Brotéria".*

(7) *"Anastácio da Cunha, o Lente Penitenciado", Lisboa, Livraria Bertrand, 1936.*

(8) *Francisco de Castro Freire, "Memória Histórica da Faculdade nos Cem Anos Decorridos desde a Reforma da Universidade em 1772 até ao Presente", Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872.*

(9) *Teófilo de Braga,"História da Universidade de Coimbra nas suas Relações com a Instrução Pública em Portugal", Lisboa, Academia Real de Ciências, 1898.*

(10) *Jão Pedro Ribeiro, "Reflexões Históricas", Coimbra, Imprensa da Universidade, 1835.*

(11) *" O Ensino da Matemática na Reforma Pombalina", in Actas do Colóquio Internacional, 1982.*

(12) *Relação referida em (5).*

(13) *Comunicação referida em (8).*

(14) *Jacques Ozanam e Claude François Milliet Dechalles , matemáticos com obras publicadas no final do século XVII. De Ozanam , conhecem-se, entre outras, as seguintes obras: "Dictionnaire de Mathématique" (1691), "Cours de Mathématique" (1693) e "Récréations Mathématiques et Physiques" (1694) (a Biblioteca da Academia possui no seu acervo um exemplar de cada uma destas obras). De Dechalles , a obra mais conhecida é o seu "Cursus Mathematicus", publicado em 1674 e, posteriormente, aumentado em 1690. No domínio da fortificação militar, de Ozanam foi publicado o ""Traité de Fortification" (1694) (existe um exemplar na Biblioteca do Estado-Maior do Exército), e de Dechalles foi publicada a "Art de Fortifier, de Defendre et d'Attaquer les Places" (1695) (existe um exemplar na Biblioteca da Academia Militar).*

(15) *"Factos contra calumnias", in Actas do Colóquio Internacional, 1982.*

(16) *António Leite, "Pombal e o Ensino Secundário", in "Brotéria" .*

(17) *"História das Matemáticas em Portugal", Lisboa, Academia de Ciências de Lisboa, 1934.*

LA GÉOMÉTRIE DE BOLZANO: CONVICTIONS ONTOLOGIQUES ET OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES[1]

Guillermina Waldegg, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados

Introduction

Les travaux de Bernard Bolzano (1781-1848) dans le domaine de l'analyse montrent une conception très visionnaire de la mathématique. Bolzano fut le premier à considérer la possibilité d'introduire le concept d'infini dans la mathématique, comme un objet opératoire et cohérent à l'intérieur d'une structure axiomatique; la théorie des ensembles infinis de Cantor a donc une dette incontestable envers cette approche innovatrice de Bolzano. D'un autre côté, la théorie des fonctions, et plus concrètement, la théorie des fonctions continues, ainsi que l'approche des nombres réels de Bolzano, préludent un mouvement qui sera prédominant dans la mathématique de la seconde partie du XIXe siècle. Cette façon de concevoir la mathématique a permis à Bolzano de surmonter beaucoup d'obstacles que ses contemporains n'avaient même pas imaginés. Mais elle a agit aussi comme une barrière qui l'a empêché d'accéder à des formes différentes de imaginer la géométrie. Voyons quelles sont les conceptions générales qui dominent la pensée Bolzanienne.

Science, vérité, et activité scientifique

Bolzano soutient que la Science (avec majuscules) est un ensemble de "vérités en soi" inaltérables, donné tout d'un coup, comme un livre idéal qui existe au-delà du temps, au-delà de l'histoire. C'est la forme achevée du savoir humain vers laquelle toute l'activité scientifique est dirigée.

Une proposition de la science, selon Bolzano, établit une vérité "telle qu'elle est", peu importe si on la connaît, si on la pense, si on la dit; il s'agit d'une "vérité en soi". Par conséquent, il existe un "sens objectif abstrait de la vérité" que le savant doit découvrir et établir tout au long de ses apports théoriques [Cf. Bolzano 1837. 39-40].

La totalité des vérités, d'après Bolzano, est gouvernée par une espèce de "connexion objective" qui existe indépendamment de n'importe quelle opération cognitive, de sorte que certaines vérités - *les vérités primitives* - sont, de par leur nature, à la base du reste, et toutes les autres vérités sont coordonnées dans une chaîne déductive unique, dont l'origine est justement l'ensemble des primitives. Remarquons que la seule différence avec nos systèmes axiomatico - déductifs actuels est le caractère "objectif et unique" attribuée par Bolzano.

Concernant les vérités primitives, Bolzano a recours à leur forme simple et élémentaire et à leur contenu général. Je cite Bolzano:

> *La vérité plus simple doit toujours précéder la vérité plus complexe et, lorsque le degré de complexité est le même, la vérité plus générale doit*

[1] Cette étude a été élaborée sous le patronage de CONACYT - México, Projet 1623-S9208

toujours précéder la vérité particulière [Einleitung zur Grössenlehre II: Von der mathematischen Lehrart (1833-1841) cité par Sebestik (1992), page. 275]

Les vérités primitives ne jouent pas, du point de vue de Bolzano, le seul rôle aristotélique d'un commencement de la chaîne déductive, il s'agit de vérités qui existent d'elles mêmes, car il est une exigence de la science, il y a de vérités qui se trouvent à la base du système, objectivement.

Prenons alors une science quelconque (une science particulière), elle est, dans la conception Bolzanienne, la collection de toutes les vérités d'une certaine espèce, de façon à ce que la partie que l'on connaît de cette collection mérite d'être exposée dans un livre (palpable dans ce cas) qui montre l'enchaînement objectif des vérités connues.

L'activité scientifique est ainsi une activité subjective qui implique l'acquisition et la découverte des vérités en soi. Le devoir du savant est donc de les "découvrir" et de les ordonner d'une façon déductive, identifiant celles qui sont (objectivement) à la base du système déductif -le commencement de la chaîne-, et montrant aussi les connexions objectives sous-jacentes du reste des vérités.

Le rôle de la logique et de la mathématique

L'obsession de Bolzano tout au long de sa vie, est de doter à la science d'une méthode claire et rigoureuse qui puisse guider tous les travaux scientifiques: la logique joue ce rôle; elle constitue, avec la mathématique, les *sciences conceptuelles pures*. À l'avis de Bolzano, la logique n'est pas seulement, comme on pensait à l'époque, cette sorte d'exercice préparatoire à la philosophie, mais avant tout, la structure même de la science. La logique règle l'activité scientifique en spécifiant les prescriptions pour organiser le savoir humain afin d'aboutir à la forme finale de science.

Une science conceptuelle pure -c'est-à-dire, la mathématique et la logique- est déterminée par la nature de la dépendance qui peut être établie parmi ses vérités. Dans les *sciences conceptuelles pures*, les rapports de conséquence - à savoir les relations entre une proposition et sa proposition antécédente ou conséquente - ces rapports, disons, possèdent deux propriétés spécifiques: d'abord, aucune vérité conceptuelle pure ne peut être la conséquence d'une vérité empirique (ces sont les vérités qui proviennent de l'expérience physique). L'ensemble des vérités conceptuelles pures est fermé par rapport à la relation "être raison de". En revanche, la conséquence d'une vérité conceptuelle pure peut très bien être une vérité empirique. En second lieu, les propositions antécédentes dominent sur les conséquences de par leur généralité; une proposition est plus générale qu'une autre lorsque son sujet ou son prédicat a une extension plus grande que le sujet ou le prédicat de l'autre. La chaîne déductive est donc un enchaînement dont la complexité croît au fur et à mesure qu'on s'éloigne des origines, en même temps que la généralité diminue.

Pour ce qui est de la mathématique, Bolzano s'en approche, d'abord, parce qu'il la trouve intéressante en tant que science qui a la vertu de fomenter une sorte de gymnastique de l'esprit, moyennant le développement d'une méthode scrupuleuse de penser [Cf. Bolzano 1804, Préface]. Bolzano reconnaît l'énorme avantage d'appliquer les mathématique à la vie quotidienne, néanmoins, l'intérêt principal de la mathématique se trouve dans la formation de l'esprit humain. Bolzano soutient que si la mathématique est organisée correctement, à savoir toutes les vérités sont liées objectivement avec leurs vérités antécédentes et conséquentes respectives, on aura comme résultat, non seulement une façon plus simple de les enseigner et d'exercer l'esprit, mais un chemin assez sûr pour trouver de nouvelles vérités et ensuite pour agrandir les connaissances scientifiques.

L'ontologie des objets géométriques

La *Théorie de la science* est l'œuvre monumentale de Bolzano, publiée en quatre volumes en 1837. Ce texte culmine une longue succession d'efforts méthodologiques que Bolzano aborde dès son premier ouvrage scientifique: les *Considérations sur quelques objets de la Géométrie Élémentaire* de 1804[2] (*Betrachtungen über einige Gegennstände der Elementargeometrie*). Dès le début de ce texte, Bolzano énonce certaines règles pour opérer rigoureusement dans une science déductive. La première règle concerne la nécessité d'établir les connexions objectives déjà mentionnées, même (ou surtout) s'il s'agit des propositions apparemment évidentes. Bolzano affirme qu'une science déductive ne peut pas être édifiée sur des bases intuitives, comme le propose Kant, mais exclusivement sur la démonstration de toutes les propositions. Voici la première règle des *Considérations*:

> *L'évidence d'une proposition ne nous libère pas de l'obligation de poursuivre la recherche d'une démonstration de celle-ci, au moins que clairement nous sachions qu'une telle démonstration n'est pas nécessaire (et qu'elle ne le sera jamais) et pourquoi... On est obligés de chercher toutes les vérités mathématiques jusqu'aux derniers fondements afin de doter tous le concepts de cette science de la majeure clarté, correction et ordre possibles [Bolzano, 1804, Préface]*

La deuxième règle méthodologique, nous prévient de l'usage, dans le corps de la démonstration, des "éléments étranges" qui résultent d'une mauvaise organisation ou conception de la science. Bolzano nous exhorte à faire attention aux erreurs qui surviennent lors de l'usage des argumentations géométriques, par exemple, dans les démonstrations analytiques, ou bien, des argumentations dynamiques dans les démonstrations géométriques.

Voici à nouveau une cite de Bolzano dans les *Considérations*:

> *Je n'accepterai jamais une preuve mathématique si elle ne dérive que des concepts impliqués dans la thèse que nous avons besoin de démontrer [Bolzano, 1804, Préface]*

Avec ces deux règles méthodologiques, Bolzano s'apprête à réorganiser la géométrie d'Euclide dès ses premières propositions, démonstration du V^{e} Postulat inclue.

---

2. Je remercie Steve Russ qui a mis à ma disposition les copies de sa traduction à l'anglais des *Considérations*, pendant la Première Université d'Été Européenne à Montpellier (1994)

D'abord, Bolzano remarque deux erreurs présentes dans les démonstrations de la géométrie élémentaire: la référence aux propositions logiquement postérieurs (comme celle de *plan*) et le recours au mouvement. Le mouvement est un concept qui n'appartient pas à la géométrie et en conséquence il ne peut être utilisé pour valider les concepts géométriques, il s'agit d'un élément étrange mais aussi bien d'une pétition de principe. Comme l'énonce Bolzano:

> *... la théorie du mouvement suppose déjà celle de l'espace, c'est-à-dire, si l'on doit démontrer la possibilité d'un mouvement, qu'on a conjecturé en faveur d'un certain théorème géométrique, on aurait besoin de recourir justement à la même proposition géométrique qu'on veut démontrer [Ibidem]*

Outre l'existence d'un élément étrange à la thèse à démontrer et le problème de pétition de principe, Bolzano nous prévient contre les intuitions kantiennes; systématiquement, il s'oppose aux arguments dynamiques dans la géométrie parce qu'ils impliquent le recours aux intuitions et aux évidences empiriques qui contredissent son idéal de science déductive. La cite continue:

> *[...] Or, comme la présomption de n'importe quel mouvement présuppose les théorèmes de l'espace, nous avons besoin d'une science qui se trouve à la base de tous les concepts de l'espace. Cette science est celle que nous appelons la géométrie pure [Ibidem]*

Nous avons déjà ici les premières idées d'une science conceptuelle pure de l'espace, plus précisément, la science des relations spatiales; relations qui sont indépendantes des objets qui existent dans l'espace et des mouvements qui y ont lieu. La géométrie n'étudie pas le mouvement, parce qu'il présuppose un corps qui se déplace et donc un objet physique duquel nous n'avons que certains intuitions, la géométrie ne peut pas s'occuper des objets qui sont produits par nos intuitions.

Il est clair à mon avis que l'espace géométrique est, pour Bolzano, une entité tout à fait différente de l'espace physique et antérieur à lui. Les relations spatiales qui définissent l'espace géométrique - et voici une façon inédite de concevoir la géométrie, une sorte de définition relationnelle- ces relations, je disais, forment une chaîne déductive unique et immuable, inhérente à l'espace lui même.

Science et espace géométrique sont pour Bolzano deux entités "réelles", appartenant à une "réalité conceptuelle pure" mais objective, qui ne dépend pas du savoir, des connaissances ou du savant. Elles se trouvent à un niveau ontologique, à un niveau des essences.

Étant donné que la géométrie est une science (une science conceptuelle pure), la science de l'espace, elle contient les propriétés de ces deux entités (science et espace), à savoir, réalité objective, connexion objective, vérités primitives objectives, simples et générales. Cohérent avec ces prémices, Bolzano est convaincu du caractère absolu d'un système déductif, de la validité absolue de la géométrie euclidienne et de l'unicité de la géométrie comme la seule description de l'espace; Bolzano cherche le "sens objectif abstrait de la vérité", c'est-à-dire, "l'ordre naturel" des vérités géométriques, puisqu'il pense que cet ordre est unique; de ce point de vue, la tâche du chercheur se réduit à le trouver moyennant une analyse soigneuse des vérités antécédentes et conséquentes.

Bolzano, contemporain des fondateurs des géométries non euclidiennes et du renouvellement de la géométrie projective, est cependant loin de participer à ces processus. Pour lui, l'espace possède une structure unique décrite par les axiomes; les axiomes, à leur tour, ne dérivent pas de l'expérience, ils ne sont pas de "vérités évidentes d'elles mêmes", l'évidence n'ayant aucune place dans la géométrie. L'unicité de la axiomatique et l'unicité de l'ordre déductif sont les postulats fondamentaux de la *Théorie de la science*.

La position de Bolzano n'est aucunement naïve ni dépourvue de cohérence. Son insistance à démontrer le V^e Postulat naît des convictions philosophiques (idéologiques?) profondes qui motivent et façonnent toute sa production mathématique et méthodologique: l'espace possède une structure unique à laquelle on doit réfléchir en utilisant les axiomes. L'unicité de l'axiomatique et l'unicité de l'ordre déductif de la mathématique, hypothèses fondamentales de sa théorie, reposent sur la conviction de l'existence d'une structure inhérente à la science et indépendante de sa connaissance. Ainsi, l'éventualité d'un V^e Postulat indépendant et l'existence des géométries non - euclidiennes sont des événements dont la possibilité est absente dans la conception Bolzanienne.

De la même façon, la expression si complexe de l'énoncé du V^e Postulat d'Euclide (ainsi que des versions postérieures), apparemment assez locale, assez particulière à la géométrie, formulée sur des notions empiriques ou intuitives, est tout à fait incompatible avec l'idée de vérité primitive Bolzanienne -à l'égard des attributs de simplicité et généralité que celles-là doivent accomplir-. Évidemment, Bolzano n'est pas le premier à discuter sur ce point, mais à la différence de ses prédécesseurs, il a un cadre philosophique complet pour l'argumenter.

Les obstacles épistémologiques

Un examen soigneux des conceptions ontologiques de Bolzano par rapport à l'idée d'obstacle épistémologique (prenons, par exemple la caractérisation de Daroux (1982)) montre que nous sommes face à un paradigme de ce genre. Penser à la géométrie en termes d'une science conceptuelle pure de l'espace avec des connexions objectives et des vérités primitives simples et générales, empêche le développement conceptuel vers une autre direction. Il est intéressant d'examiner Bolzano sous la délimitation de Daroux:

Tout d'abord, il s'agit d'une vraie conception et non pas d'une difficulté conceptuelle ou d'un manque de connaissance. Bolzano, grand mathématicien, grand logicien et grand philosophe, connaît bien le développent de la science de son époque, il est au courant des travaux en algèbre et en analyse de Lagrange, Gauss, Lacroix, Clairault, mais concernant les travaux géométriques, il semble les ignorer. Il est aveugle devant ces développements et il ne peut même pas imaginer l'idée de plusieurs géométries ou de différentes organisations de "la" géométrie, puisque cela violerait profondément la croyance à l'existence d'un ordre naturel objectif. Comme d'habitude, la négation est la première réaction devant les grands obstacles de l'histoire des sciences, de la même façon que l'enfant nie l'évidence qui contredit son raisonnement intuitif.

En second lieu, la conception Bolzanienne s'avère extrêmement féconde face aux problèmes de l'analyse où l'on rencontre des réponses géniales aux problèmes orthodoxes. Clairement, ce sont ces conceptions philosophiques qui ont guidé Bolzano dans l'analyse d'une façon brillante. Rappelons-nous la quête constante de Bolzano du plus simple fondement des nombres réels. Bolzano comprend que les propriétés d'une fonction, comme celle de la continuité, doivent être trouvées dans un élément plus simple, à savoir, son domaine, les nombres; c'est donc sur le nombre qu'on doit faire converger tous les efforts de rigueur et de support de la théorie des fonctions et de l'analyse en général.

Un admirable exemple, bien connu de tous, du génie de Bolzano fruit de sa position philosophique, est le théorème des valeurs intermédiaires: Bolzano donne une *Démonstration purement analytique* du théorème dans son Mémoire de 1817. En suivant les règles de raisonnement qui lui demandent d'expulser de l'analyse les idées étranges -comme celle du mouvement ou d'évidence sensible-, Bolzano offre une preuve analytique supportée par l'existence de la limite d'une suite de Cauchy (quatre ans avant Cauchy). Voyons les arguments:

> *... l'hypothèse d'une grandeur invariable ayant cette propriété d'approcher les termes de notre série ne contient rien d'impossible: cela vient du fait que cette hypothèse permet de déterminer cette grandeur avec la précision que l'on voudra. [Bolzano (1917) dans Sebestik (1964), page 151]*

Démontrer la possibilité d'un objet signifie donc pour Bolzano montrer que ledit objet n'est pas contradictoire avec le reste des objets théoriques déjà existant, c'est-à-dire, que l'on peut établir clairement *les connexions objectives* avec le reste de la structure théorique de laquelle il fait partie.

Néanmoins, la conception de Bolzano engendre aussi des réponses fausses ou, au moins, incomplètes en dehors du contexte de l'analyse, notamment dans la géométrie qui restera à une étape inachevée dans l'œuvre globale de Bolzano. La réponse correcte et universelle vis-à-vis de la possibilité des géométries non - euclidiennes, exige un point de vue bien différent, divorcé des considérations d'unicité et d'objectivité de la science ou de l'espace.

Pour la considérer un obstacle épistémologique, cette conception doit résister aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance "meilleure". Bolzano, n'a jamais reconnu une telle contradiction, pourtant, il y a une tâche incomplète; je m'explique. Les *Considérations*, comprennent deux sections: dans la première, Bolzano expose les théorèmes sur les triangles et les parallèles et dans la deuxième, la théorie de la ligne droite (de la droite finie, c'est à dire, du segment droit); cette dernière partie est, cependant, nécessaire pour fonder la première section. Les titres des deux sections expliquent cette apparente altération de l'ordre: La première partie est un "*Essai de démonstration des premiers théorèmes sur les triangle et les parallèles en supposant la théorie de la droite*", la deuxième partie donne "*Quelques idées concernant une théorie future de la droite*". Autrement dit, la théorie bien établie repose sur une doctrine complémentaire hypothétique et qui restera inachevée de la vie de Bolzano. On ne sait pas si Bolzano essaye de la conclure sans réussite ou simplement s'il l'abandonne en faveur de projets plus intéressants.

Selon Daroux, après la prise de conscience de son inexactitude, l'obstacle épistémologique continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre. Pourtant Bolzano ne franchit jamais cette étape. En jugeant par ses travaux publiés, les *Considérations* est le seul ouvrage que Bolzano consacre à l'examen détaillé des premiers concepts et théorèmes de la géométrie. Cependant, dans d'autres manuscrits [Cf. Sebestik (1992) page 35] on peut constater qu'il considère l'essentiel des théories qui y sont exposées comme valable et pour ainsi dire définitif. Donc, il ne se pose jamais la question de les réviser; apparemment, il n'y a pas de prise de conscience de son inexactitude.

Conclusions

L'histoire de la géométrie de Bolzano permet, à mon avis, d'avancer quelques hypothèses concernant la recherche en didactique. D'abord, il est évident que certaines conceptions sous-entendues sur la nature des objets, qu'ils soient naturels ou formels, peuvent à un certain moment, gêner la transition vers un autre niveau de compréhension d'une théorie. Ces conceptions ontologiques s'avèrent plus résistantes que d'autres idées intuitives qui expliquent les phénomènes ou les relations formelles en termes de rapports avec des objets voisins.

Les conceptions spontanées naïves, en générale, ne peuvent pas être considérées comme des théories systématiques, mais plutôt comme des collections d'explications *ad hoc*. À l'exception de la quête de raisons cohérentes, il n y a pas de principe organisateur qui donne naissance à des explications naïves, celles-ci étant construites à partir d'un ensemble de primitives phénoménologiques qui sont mobilisées en réponse à des situations spécifiques.

Par contre, les convictions ontologiques demeurent à un niveau plus bas, plus élémentaire et, en conséquence, il est plus difficile d'en prendre conscience. À différence des explications particulières qui sont locales et *ad hoc*, les convictions ontologiques se trouvent à la base des explications naïves et les régissent, car elles font appel aux catégories de base en fonction desquelles les gens analysent le monde et réagissent à celui-ci. Les convictions ontologiques sont, pour la plupart, implicites dans les raisonnements. Les gens ne sont pas conscients de ces convictions et, normalement, ne les articulent pas. Parce qu'elles demeurent inexplorées, elles peuvent être très puissantes face à de nouvelles données. Lorsqu'une nouvelle information contredit les croyances superficielles, celles-ci peuvent être modifiées, sans toutefois changer les convictions fondamentales, les convictions ontologiques. D'ici l'importance de les connaître.

Bibliographie

Bolzano, B. (1804): *Betrachtungen über einige Gegennstände der Elementargeometrie*, Praga, (*Considerations on Some Objects of Elementary Geometry*, Trad. Steve Russ, Mimeo)

Bolzano, B. (1871): *Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signe opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation*, dans Sebestik, Jan (1964)

Bolzano, B. (1837): *Wissenschaftleher*, Seidel in Sulzbach, (*Theory of Science*, Oxford, Basic Blackwell, 1972)].

Daroux, A. (1982): *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure.* publications de l'IREM de Bordeaux

Sebestik, Jan (1964): "Bernard Bolzano et son Mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse", *Revue d'histoire des Sciences* 17, pages 129-164

Sebestik, Jan (1992): *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, VRIN, Paris

Gómez Farías 74, Coyoacán
04100, México, D.F.
México
gwaldega@mailer.main.conacyt.mx

SOME REMARKS ON CELTIC MATHEMATICS

Harald Gropp
Mühlingstr. 19, D-69121 Heidelberg, Germany

1 Introduction

1.1 Mathematical cultures all over the world

> They have much to say about the stars and their motions, about the magnitude of the heavens and earth, about the construction of nature, about the power and authority of the immortal gods. And this they communicate to their pupils.

These are words of Julius Caesar's *De Bello Gallico* (cited from [1](p.13) concerning the druids of the Gauls, a Celtic people, which he tried to and, at last, succeeded to integrate in his Roman Empire. I think the few words above characterize the Celtic culture quite well although regarded from a Roman who had a quite different background and could hardly understand the Gaulish culture. But at least he understood the importance of their scientific interests, the close connection of science and theology, and the fact that they had established a system of teaching their knowledge to pupils.

In discussing the history of ancient mathematics nearly everything is focussed on Greek mathematics. The reason for that seems to be a Eurocentric view of the world. European culture of today mostly sees its origin in the culture of the Greeks. Thus the knowledge of Greek language among historians of mathematics is much better than that of other ancient languages.

Probably more than 90 percent of all research done in the history of ancient mathematics deals with the Greeks. Among the other early non-European mathematical cultures of the world there is another concentration on Islamic mathematics compared with the mathematics of the Egyptians and Babylonians, Indians and Chinese, not to speak about American cultures like the Maya or Inca or cultures in other continents like Africa or Oceania.

All this is a result of several factors, the unbalanced distribution of political power and influence on our planet throughout the past which also resulted in an unbalanced knowledge of and interest in languages and cultures. In order to investigate the mathematical achievements of ancient cultures one needs sources of all kinds (written texts, oral traditions, and architectural artefacts) and people who can understand the languages and interprete the buildings.

The fact that not much is known about a culture in the past does not necessarily mean that this culture had no mathematical achievements at all. Some facts which we know today were unknown at least to Europeans not too long ago. Of course, the cultural achievements of American Maya or Inca could only become known in Europe after 1492. More striking is the fact that nearly nothing was known about the peoples in ancient Mesopotamia until the nineteenth century.

1.2 The forgotten Celts?

The investigation of the history of mathematics was mainly seen from a Eurocentric point of view. However, there is a European culture which has nearly been forgotten. Its origin and heritage could be called certainly European while the Greek culture originated in and inherited from the region where three continents meet each other. The reason why this culture has nearly been forgotten is the same as for the Eurocentric view of the world. The Celtic culture was not successful in political terms and was shifted to the edges of Europe and has nearly died out. In cultural terms the Greeks and in political terms the Romans and their successors pushed the Celts aside. Hence many facts which we know about Celtic culture were reported to us by their enemies. This is also due to the fact that there are not many written sources by the Celts themselves.

1.3 Celtic culture and Braga

My reasons to present this short report here are twofold. The Meeting on History and Education of Mathematics in Braga seems to be quite suitable as a forum for discussing such a topic. The first reason is the interest of this meeting in mathematics in cultures in all parts of the world and its connections to related sciences.

A second reason is the place of the meeting and its history. Before I became closer interested in my topic I would have been quite surprised that Braga and its region are related somehow to Celtic culture. Perhaps this is typical for the fact how much of the Celtic tradition in Europe is already lost.

Braga seems to have been founded by Celts and was conquered by the Romans in 250 BC. Apart from the not well known situation of Braga itself the Celts entered the Iberian peninsula around 900 BC and were driven to the edges (today Portugal and Galicia) later on. In our days there is no Celtic people left in this part of Europe. The Celtic language died out long ago. The only remains are a certain interest of Galicians in Celtic questions and for example the small town of Bretona which had been the center of the Celtic Church until the seventh century AD.

1.4 Why Celtic mathematics?

The reader may ask why should we be interested in Celtic mathematics at all. At least my interest is that this mathematics may turn out to be quite unusual and different from other cultures. Being interested mainly in the history of combinatorics I find it quite remarkable that there occur 5 problems of combinatorial contents in a collection of mathematical exercises of Alcuin of York. There are original in Latin, probably collected in the 8^{th} century, and have recently been translated into German [3] and English [5]. Alcuin of York was a scientist at the court of Charlemagne, the emperor of the Frankish empire, around 800 AD.

The above mentioned collection contains 4 river-crossing problems. E.g. a wolf, a goat, and a cabbage have to be brought across a river by using a small boat. For further details see [4]. The other combinatorial problem deals with a camel which has to carry a certain amount of hay as far as possible into the desert.

In similar known collections of mathematical problems this kind of combinatorial questions is not asked. Where did Alcuin find these problems? Since his origin is Iro-Scottish, there is a reasonable hypothesis that maybe such mathematics is of Celtic origin.

1.5 Where to find something on Celtic mathematics?

In order to learn something about Celtic mathematics I read through books and looked for papers in journals. However, I realized very soon that perhaps there is no single book or paper on Celtic mathematics at all, at least not in the narrow sense of the word "mathematics".

However, there cannot be a culture without any mathematics. The question should be: How far developed was Celtic mathematics? Mathematics enters daily life in different connections. Perhaps the most direct relation of mathematics and humans occurs in astronomical and calendar questions which are, for certain reasons, closely related to religious and cultural aspects in general. Other topics of interest in this connection could be the used number system, coinage and measure problems and, of course, mathematics in Celtic art, i.e. mainly questions of geometrical contents.

Since my knowledge of Celtic culture is still quite rudimentary and the length of this paper has to be quite short, it is not my aim here to give a survey on Celtic mathematics in general. I just chose one special topic for the rest of this paper.

The most interesting detail on Celtic mathematics which I have found in the literature so far is the calendar of Coligny. This calendar which was found nearly 100 years ago in France was used about 2000 years ago in Celtic Gaul and proves a very high level of Celtic mathematics and astronomy, at least as far as this single source is concerned.

This calendar seems to be relatively unknown to the general public. I hope to get some people interested in the calendar and in Celtic mathematics in general. Maybe it is the written counterpart of the much better known archaeological witnesses of mathematical and astronomical knowledge e.g. represented by Stonehenge in England and Newgrange in Ireland. However, these aspects are out of scope of the present paper.

1.6 Celtic history

There are a lot of books on Celtic history and culture. However, it is not that easy to find them. At least it is much easier to get informed on history and culture of the Celts than about their scientific activities. My short overview here is mainly based on the books of Berresford Ellis [1], [2] and Streit [7]. Both authors emphasize the cultural tradition and heritage of Celtic culture and religions through the centuries.

The Celts are best recognized by their languages which distinguished them from other Europeans.

The following dates are from a detailed chronology in [2]:

around 1200-750 BC "Proto Celtic" Urnfield civilization, Bronze Age; 750-500 Hallstatt civilization, Iron Age; 500-100 La Tène civilization, Iron Age.

2 The calendar of Coligny

This section of my paper is mainly based on Thurneysen [8] who published one of the first papers on the calendar of Coligny and on Olmsted [6] who published the most recent report which I know about. In fact, Olmsted was able to reconstruct the calendar by a very detailed analysis. The reader is recommended to look into Olmsted's book for all details which are not described in this paper.

Before describing the problem of calendars in general and the calendar of Coligny in particular let me cite from the introduction of Olmsted's book in order to describe the importance of this calendar.

> [6](p.1) Gaulish druids could keep track of solar positions, hundreds of years into the future, to within 1 day in 455 years. In its time, the Coligny calendar plate was by far the most accurate lunar/solar predictor in existence. Europe would await the Renaissance to again achieve such accuracy in astronomical prediction!

> Had Copernicus invented this intricate lunar/solar predictor, he would have had my admiration. But no, this highly accurate scientific instrument was invented by druids in the decades before Caesar's conquest. ..... Incredibly, this superb application of number thoery had been invented in a culture which had only just adopted writing!

2.1 The calendar problem in general

The two fundamental facts which describe the relevant movements of celestial bodies as seen by a spectator on the earth are given by $1y = 365.2422d$ and $1m = 29.53074d$ where d is one day, the rotation period of the earth around its axis, m is one (lunar) month, the rotation period of the moon around the earth, and y is one (solar) year, the rotation period of the earth around the sun. The problem to build a calendar, e.g. for agricultural or religious purposes, is that these constants are not integers (They are, of course, not even rational since the given values are only approximations). Moreover, the value of y/m is not rational.

An approximation of y/m by 12 yields a difference of $y - 12m = 10.8751d$ which could be handled with by introducing a socalled intercalary month every 3 years. The idea of these leap periods is the main tool to cope with the general problem. In the history of mankind there have been a lot of more or less elegant, practical, and exact solutions.

The main goal is to find multiples of y and m which are nearly integers and whose difference is nearly integer, and then to realize this calendar as a system of months and possible leap months and leap days.

2.2 Some calendars of the past

Our Christian calendar of today was inherited from the Julian calendar of Julius Caesar. It consists of 4 years of together 1461 days (exact value 1460.9688 days), three years and a leap year. This difference leads to an error of 1 day in about 128 years.

Thus in the year 1582 the still used Julian calendar was off by nearly 12 days. Pope Gregory XIII introduced the socalled Gregorian calendar, after skipping 12 days in October of 1582. This calendar consists of 365.2425 days in one year by having exactly 297 leap years within 400 years.

A calendar which was invented by the Persian mathematician Omar Khayyam in the 11^{th} century was even better with 8 leap years within 33 years which gives 365.2424 days per year.

All these calendars discussed so far do not really care about the moon and its orbit around the earth. In our calendar of today the length of months are

28, 29, 30, or 31 days and are not correlated with the dates of full moon or new moon at all.

2.3 The plate found in Coligny

The calendar plate of Coligny was found in Coligny, north of Bourg-en-Bresse (Dept. Ain), in Southeastern France in 1897, together with a bronze statue of (probably) Mars. Today the calendar can be seen in Lyon in a museum. In fact, the plate of 148*cm* times 90*cm* was broken into many pieces. 153 of these fragments were found which is estimated to be about 45 percent of all pieces. Most of these fragments contain inscriptions in Gaulish, written in Latin script. In its main part the calendar describes 5 years or 62 months of 1832 days. There are 60 regular months and 2 intercalary months. The 12 names of the months are:

Samonios (SAM), Dvmannios (DVM), Rivros (RIV), Anagantion (ANA), Ogronnios (OGR), Qvtios (QVT), Giamonios (GIA), Semivisonns (SEM), Eqvos (EQV), Elembivios (ELE), Edrinios (EDR), and Cantlos (CAN).

There are 6 "complete" months of 30 days: SAM, RIV, OGR, QVT, SEM, EDR.

5 months of 29 days are called "incomplete": DVM, ANA, GIA, ELE, CAN.

The 12^{th} month EQV is called incomplete, having 30 days in years 1, 3, and 5, but 28 days in year 2, and 29 days in year 4 of the 5-year cycle.

All the months are divided into 2 fortnights of 15 days for complete months and 15 days for the first and 14 days for the second fortnight of an incomplete month. The 2 intercalary months INT1 (Qvimonios) and INT2 (Rantaranos ?) have 30 days each. A fortnight is divided into 3 phases of 5 days, the socalled "lunar" week.

The cycle of 5 years was as follows:

INT1,SAM, DVM, ..., CAN (year 1)(385 days);
SAM, DVM, ..., CAN (year 2)(353 days);
SAM, DVM, ..., QVT, INT2, GIA, ..., CAN (year 3)(385 days);
SAM, DVM, ..., CAN (year 4)(354 days);
SAM, DVM, ..., CAN (year 5)(355 days).

2.4 The explanation of the calendar

The following sentence of Olmsted's preface is my excuse for the following simplified and rather superficial description of the calendar functions in this short report.

> [6](p.xii) Explaining the structure and function of an informational system as complex as the Coligny calendar is not an easy task.

The above mentioned cycle of 5 years was repeated 5 times but INT1 of the first 5-year phase was left out. This resulted in 309 months containing 9130 days. The exact values are the following: 309 lunar months are 9124.9517 days, 25 solar years are 9131.0550 days.

Hence assuming 309 months to have 9125 days means an error of 0.0483 days in 25 years or 1 day in 518 years. Assuming 25 years to have 9131 days means an error of 0.0550 days in 25 years or 1 day in 455 years. Apart from these very small differences to integer values the calendar of Coligny had to cope with the problem that 25 years of 9130 days were 5 days too long from a "lunar" point of view and 1 day too short from a "solar" point of view. In the calendar of Coligny there were 3 counting schemes to cope with this problem.

2.5 The counting schemes and the older 30-year calendar

The realization of the calendar as described above meant that the solstices occurred earlier by 5.789 (=1832-1826.211) days every 5 years. The initial phase without INT1 of only 1802 days loses 24.211 days. In the whole period of 25 years we have a fall back of the sun of 1.055 (=24.211-4x5.789) days.

It is assumed that there was an earlier Celtic calendar of 6 cycles of 5 years of 1831 days each which was used since around 850 BC. The month EQV had 28 days also in year 4. This was in good correspondence with the moon (error of 1 day in 199 years) but the sun falls back 1.266 days in 30 years. The changed dates of solstices were marked by certain N counts. The important festivals of the year were shifted against the motion of the sun. This is probably the reason for the celebration of the 4 Irish festivities on dates 51 days earlier than the astronomical event. For instance, the beginning of winter is celebrated on November 1 instead of December 21. While the Gauls reformed their calendar the Irish had kept to the original one and when introducing the Julian calendar in the fifth century AD the days of festivities were fixed.

The 25-year calendar was probably introduced in Gaul around 100 BC together with the second counting scheme, the Loudin/Laget scheme, still in the preliterate phase of the calendar. After adoption of writing, probably in the first century BC, the third counting scheme was added, consisting of the marks TII, ITI, and IIT. These marks denoted the 1 day shift in the position of the sun in 25 years as well as the 5 day shift of the moon at the same time. In fact, the moon shifts by 5 days in 25 years, i.e. 1 lunar week in one cycle of 25 years.

2.6 Calendars and culture

I hope that the reader has at least got interested in the calendar of Coligny and in Celtic science and culture in general. A lot of questions are totally open, in particular the question for the evolution of this astronomical and mathematical knowledge. Anyhow, it is interesting to see which scientific results could be obtained outside the Greek and Roman cultural influence. Thus it is clear that some other surprising results concerning Celtic mathematics can be found.

I think it is necessary to investigate Celtic history and culture much more in the future. For instance, it is still not clear what the origins of the Celtic Christian Church are. There are some reasons why close contacts to Mediterranean and Near Eastern cultures are probable. In questions on the date of Easter calendar and culture meet again. For the Iberic peninsula the council of Toledo in 633 made the Celts accept the Roman Church and its Easter computation, the same happened in Whitby in 664 for the Church in Britain. This was also the end of the Celtic calendar practice. The Julian calendar as the calendar of the politically victorious culture survived. Some names of the today Irish Gaelic months still remind us of the month names in the calendar of Coligny.

References

[1] P. Berresford Ellis, Celtic inheritance, London, 1992

[2] P. Berresford Ellis, The Celtic empire, the first millenium of Celtic history, 1000BC-51AD, London, 1990

[3] M. Folkerts, H. Gericke, Die Alkuin zugeschriebenen propositiones ad acuendos iuvenes (Aufgaben zur Schärfung des Geistes der Jugend), in Science in Western and Eastern civilization in Carolingian times, (eds.) P.L. Butzer, D. Lohrmann, Basel (1993)

[4] H. Gropp, Propositio de lupo et capra et fasciculo cauli — On the history of river-crossing problems, Colloquium Carolus Magnus Aachen 1995 (submitted)

[5] J. Hadley, D. Singmaster, Problems to sharpen the young, Math. Gazette 76 (1992), 102-126

[6] G. Olmsted, The Gaulish calendar, Bonn, 1992

[7] J. Streit, Sun and cross, from Megalithic culture to early Christianity in Ireland, Edinburgh, 1984

[8] R. Thurneysen, Der Kalender von Coligny, Zeitschrift für celtische Philologie 2 (1899), 523-544

THE TRIANGLE OF PASCAL AND ITS HISTORY

Harald Gropp
Mühlingstr.19, D-69121 Heidelberg, Germany

1 Introduction

1.1 The triangle of Pascal

The arithmetical triangle is often but not always called the triangle of Pascal. The French mathematician Blaise Pascal investigated this triangle in his *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même manière* [12] which was written in 1654 (published in 1665). However, this triangle has a long history and was the object of mathematical research in earlier centuries and in non European cultures. This fact seems to be relatively unknown. In modern notation, the triangle contains the binomial coefficients $\binom{n}{k}$.

1.2 Some general remarks

This paper tries to give a survey on what is known about the history of the triangle of Pascal. It is a shorter version of a German text [9] which contains further quotations. Since I have no knowledge of the non European languages Sanskrit, Arabic, Persian, and Chinese my report is based on secondary literature. I also refer the reader to a recently published book of Edwards [7].

The contents of my paper is related to many singular papers which are cited below. Most of the biographical data are taken from the *Dictionary of Scientific Bibliography* [8].

1.3 Two reports of 1933

Some time ago I found a paper and a book in which the arithmetical triangle occurs in an unexpected way. Both papers were published already more than 60 years ago.

The German indologist L. Alsdorf [1] discussed an Indian poem called the *Pratyayas* which is more than 2000 years old and which contains a remarkable contribution to early combinatorics. This paper was republished in 1991 in English and will be discussed below.

In the same year of the publication of Alsdorf's paper a small book was written by H. Dörrie [6]. Among 100 famous problems of two milleniums of mathematical culture we find the following.

> [6] In a town there are m streets running from West to East and n running from North to South; How many ways are there to go (without detours) from the Northwestern corner of the town to the Southeastern one?

It is quite remarkable that Dörrie calls the problem Alchaijâmî's binomial expansion and does not at all mention the name of Pascal.

1.4 The arithmetical triangle in school?

I think that the triangle of Pascal and its history are quite a suitable object to teach in school. The triangle and its mathematics is not too difficult and can be introduced and discussed from the point of view of algebra, combinatorics, geometry, or probability theory.

It can be discussed how the investigation of the arithmetical triangle found the interest not only of Europeans in the 16^{th} and 17^{th} century but also much earlier in other parts of the world. For instance, the children can learn nearly forgotten methods to solve equations approximatively. These methods were probably much more important in history than the search for formulas of the exact computation of zeros of equations.

In this paper in some cases also nonmathematical achievements of the involved scientists are mentioned. This gives the opportunity to discuss the relations of mathematics to e.g. geography, astronomy, even literature and religion. In such an interdisciplinary school teaching the role of mathematics as part of human culture can be demonstrated much better than just by computing the binomial coefficients. The investigation of the triangle of Pascal shows that mathematics is really part of the worldwide human culture.

If the history of the arithmetical triangle in this short paper looks as a collection of episodes I must apologize the reader for this fact. The original sources are still rare and not much investigated and the number of pages of this paper is too small. I, however, hope that we all understand my paper as an invitation to get closer involved with this interesting part of history of mathematics. For pictures of historical arithmetical triangles I refer to [16] and other literature cited below.

2 The triangle of Pascal ...

2.1 ... in Europe before Pascal

The arithmetical triangle was investigated by several mathematicians of the sixteenth and seventeenth century. The most important Europeans in this context are Blaise Pascal (1623 Clermont-Ferrand, 1662 Paris), Simon Stevin (1548 Brugge, 1620 Den Haag), Niccolò Tartaglia (1499 Brescia, 1557 Venezia), Johann Scheybl (1494 Kirchheim/Teck, 1570 Tübingen), Michael Stifel (1487 Esslingen, 1567 Jena), Peter Apian (1495 Leisnig, 1552 Ingolstadt) and a certain "Initius Algebras" whose dates of birth and death are unknown.

2.1.1 Johann Scheybl

The first mathematician which is to be discussed here is Johann Scheybl, also Johannes Scheubel, or Joannes Scheubelius in Latin. He was born in Kirchheim/Teck near Stuttgart on 13 August 1494. He studied in Wien in 1513. Where he stayed for the following 16 years seems to be unknown. After continuing his studies in Leipzig and Tübingen he became a professor at Tübingen University in 1544. He died in Tübingen on 20 February 1570.

He seems to have known one or several works of al-Karaji which is a possible explanation how the knowledge of the triangle came to Europe. In the year 1545 Scheybl explained the arithmetical triangle in his book *De numeris et diversis rationibus.* Further details can be found in a paper of Staigmüller [14].

2.1.2 Petrus Apianus

The arithmetical triangle occurs on the title page of a book of Petrus Apianus 18 years earlier. This is the earliest printed triangle of Pascal in Europe.

Petrus Apianus (or Peter Bienewitz) was born in Leisnig (Saxonia, Germany) probably on 21 April 1495. A very detailed report of his life and work can be found in R. Witzlau [18]. Apianus studied in Leipzig and Wien and became a professor of mathematics in Ingolstadt in 1527. In the same year he published his book [2] with the arithmetical triangle on the title page.

He is mainly known in astronomy and geography. His work was continued by his son Philipp. Petrus Apianus died in Ingolstadt on 21 April 1552. A report on both the father and the son can be found in [10].

2.1.3 "Initius Algebras"

Perhaps Apianus was not the first European who knew about the arithmetical triangle. A manuscript of a German mathematician, probably of the sixteenth century, has been known for nearly 100 years (see [4]). The name of the author "Initius Algebras" could perhaps better be the title of the manuscript. Tropfke [16] suggests that the author could have been Andreas Alexander (born in Regensburg around 1475) who translated the Latin text into German and added some commentaries.

Let me just mention here how "Initius Algebras" generates the triangle by computing the powers of the number 10001 which are

10001, 100020001, 1000300030001, etc. until

1000900360084012601260084003600090001.

Writing down these numbers in a centered form we obtain the arithmetical triangle with the binomial coefficients separated from each other by zeros.

2.2 ... in China

2.2.1 Chu Shih-Chieh and Yang Hui

The fact that the arithmetical triangle was already known in China can be found in several lexika. Let me just mention here that Chu Shih-Chieh displayed the triangle in his book *Sze yuen yuh kihn* in 1303. It had already been discussed by Yang Hui (around 1270).

2.2.2 Biernatzki's report of 1856

There is already a report on mathematics in China by K.L. Biernatzki [3] published 140 years ago. In this report Biernatzki mentions the big cultural achievements of the Chinese, e.g. concerning book printing. He also says that in the exact sciences the Chinese were earlier than the Europeans in some cases.

On the other hand, the careful formulation of his report shows the general opinion about the Chinese in the Europe of that time.

2.2.3 Combinatorial motivation in China?

While the Europeans and the Arabs used the arithmetical triangle in order to find roots of polynomials of higher degree, there is a hint that the Chinese were perhaps also interested in the binomial coefficients from a combinatorial point of view. Yushkevich [19] reports as follows.

> [19] that the Buddhist priest and astronomer Yi Xing ..... (683-727) computed all possible positions for a game which reminds us of chess, with varying numbers of rows and figures. .... for 361 rows the number is about 10^{208}.

2.3 ... in Arabia and Persia

The most important Arabian and Persian mathematicians who investigated the arithmetical triangle were al-Kashi (Kashan, 1429 Samarkand), Samaw'al al-Maghribi (Baghdad, 1175 Maragha), Umar-al-Hayyam (1048 Nishapur, 1131

Nishapur) and al-Karaji (?, 1016). The missing dates of birth and death are unknown.

2.3.1 al-Kashi

The Persian mathematician al-Kashi was born in Kashan (today Iran) and worked in Samarcand (today Uzbekistan) where he died on 22 June 1429. After 1417 Ulugh Beg founded a university in Samarcand, and the city became the center of Islamic science at that time. E.g. in 1424 al-Kashi determined the number π with an accuracy of 16 digits ($\pi = 3.1415926535897932$). The same was achieved in Europe only in 1615.

In 1427 he published a book of 5 volumes called *Miftah al-hisab*, the "key to arithmetic". In this encyclopedia he collected the knowledge of his time and described the arithmetical triangle.

2.3.2 Omar Khayyam

Omar Khayyam is Alchaijami which was already mentioned in the introduction. He can also be found as al-Khayyami, al-Hayyam or Umar Khayyam. He was probably born on 15 May 1048 and died on 4 December 1131. He belonged to a family of tentmakers from Nishapur (today Iran). Omar Khayyam is well known for his big achievements in astronomy and poetry.

In 1079 he proposed a calendar reform which had 8 leap years (of 366 days) within 33 years which implies that one year has 365.24242 days. This is closer to the correct value of 365.24220 days than the calendar which was introduced by pope Gregory in 1582 and is still valid today (365.24250 days).

Omar Khayyam is best known to the general public because of his lyrics (Roba'iyat) which became known in Europe as late as in the nineteenth century. In these poems of four lines he described his time. An example is the following.

> For let Philosopher and Doctor preach
> Of what they will, and what they will not – each
> Is but one Link in an eternal Chain
> That none can slip, nor break, nor over-reach.

The arithmetical triangle was treated by Omar Khayyam in his book on algebra in order to compute roots approximatively.

2.3.3 al-Karaji

The earliest and perhaps most interesting Islamic mathematician who investigated the arithmetical triangle was al-Karaji or al-Karkhi. Neither his name nor his home town nor his year of birth are known with certainty. The name

Karaji is related to Karaj in Persia; Karkh, a suburb of Baghdad, as home town would explain the name Karkhi.

Unfortunately, two of his books which are cited by as-Samaw'al later on are not known today. These are the *Kitab nawadir al ashkal* ("On unusual problems" or perhaps better "On the uniqueness of geometrical figures") and the *Kitab fi'l-hisab al-hindi* ("On Indian mathematics"). So it may be that al-Karaji learned about the arithmetical triangle from Indian sources. Further hints on al-Karaji and as-Samaw'al can be found in a paper of Rashed [13].

2.3.4 Conclusion

In a paper on roots of polynomials and the binomial theorem in Islamic mathematics Luckey [11] explains how the mathematical triangle was used. The main motivation seems to have been the (approximative) computation of roots. At the end of his paper he mentions that most of all Islamic mathematical manuscripts have not yet been investigated at all. Let us hope that one day further details on al-Karaji and his work will become known.

3 The combinatorics of the Indians

Unfortunately, I can only give a short report on the Indian contributions to the arithmetical triangle.

The Indian research is quite different from the later achievements of other cultures. Even the title of a book of the last century of A. Weber [17] gives a hint to the motivation of Indian mathematicians. The later paper of the indologist L. Alsdorf [1], which refers to an old Indian text, the Pratyayas, in Sanskrit and translates and comments it, characterizes the text quite well. The translation of the title *Beitrag zur indischen Mathematik* into *contribution to Indian combinatorics* for the English text of 1991 is quite remarkable. By the way, the arithmetical triangle in India is not only discussed in papers of indologists but also in journals on history of science, e.g. by Datta and Singh [5].

The old Indian religious and mythical texts are written in verses, perhaps a bit comparable with the pentameters and hexameters of the Greek poems. There arose questions of e.g. how many possibilities are there to distribute 3 long and 4 short syllables on 7 positions. These "metrical" questions lead to the development of a combinatorial research in India quite similar to some investigations in Europe around 2000 years later.

The author of the Pratyayas was a certain Pingala who lived around 200 BC and is said to have been a being between man and god. For further details see [15]. Known to us are Pingala manuscripts of the tenth century, written by Halayudha, Hemacandra, and Kedara. By the way, this is more or less the same difference in time as between Euclid and the first known manuscripts of his books, around 1200 years.

In order to find out how to distribute long and short syllables on 3 positions, the following "algorithm" is given. The translation from German into English is my own, as in other citations of foreign languages in this paper.

> [1] Always change the first long syllable of the previous form into a short one in the following form; of the remaining syllables those which follow the changed long one stay unchanged, those which preceed it obtain their original form again.

Maybe the reader tries to write down these schemes of syllables on a piece of paper. They correspond to the smallest numbers written in the system with 2 digits.

The binomial coefficients describe the number of different arrangements of m short syllables within n syllables. The following rule is given in order to construct the arithmetical triangle.

> [1] Write down as many ones as there are syllables and one more (in a column), and always add the lower number to the closest above, leaving out the last one.

I close my paper by citing the last sentences of Alsdorf and want to emphasize that this short paper could only give a short survey. I hope that it will get the readers interested in the history of the arithmetical triangle and ask them for further investigations.

> [1] We have reached the end ..... the teaching of the Pratyayas doubtless contains a lot of mathematical results; as a whole it is anyhow a remarkable and characteristical product of Indian spirit.

References

[1] L. Alsdorf, Die Pratyayas, ein Beitrag zur indischen Mathematik, Zeitschrift für Indologie und Iranistik 9 (1933), 97-157; (transl. by S.R. Sarma) The Pratyayas: Indian contribution to combinatorics, Indian J. Hist. Science 26 (1991), 17-61

[2] P. Apianus, Eyn Newe Vnnd wolgegründte vnderweysung aller Kauffmanß Rechnung, Ingolstadt (1527), Nachdruck Buxheim-Eichstätt (1995)

[3] K.L. Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen, Journal reine ang. Math. 52 (1856), 59-94

[4] M. Curtze, Die Algebra des Initius Algebras ad Ylem geometram magistrum suum, Abh. zur Gesch. der math. Wissenschaften 13 (1902), 435-609

[5] B. Datta, A.N. Singh, Use of series in India, Indian J. Hist. Science 28 (1993), 103-129

[6] H. Dörrie, Triumph der Mathematik, Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur, Breslau (1933)

[7] A.W.F. Edwards, Pascal's arithmetical triangle, London, New York (1987)

[8] C.C. Gillispie (Hrsg.), Dictionary of Scientific Biography, New York (1970)

[9] H. Gropp, Über das (Pascalsche) arithmetische Dreieck aus Anlaß des 500. Geburtstags von Petrus Apianus (submitted)

[10] S. Günther, Peter und Philipp Apian, zwei deutsche Mathematiker und Kartographen, Prag (1882), Amsterdam (1967)

[11] P. Luckey, Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik, Math. Annalen 120 (1948), 217-274

[12] B. Pascal, Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la même manière, Paris (1665)

[13] R. Rashed, L'induction mathématique: al-Karaji, as-Samaw'al, Arch. Hist. Exact Sci. 9 (1972), 1-21

[14] H. Staigmüller, Johannes Scheubel, ein deutscher Algebraiker des XVI. Jahrhunderts, Abh. zur Gesch. d. Math. 9 (1899), 429-469

[15] H. von Stietencron, Dandanayaka und Pingala, Indo-Iranian Journal 13 (1971), 1-19

[16] J. Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, 4. Aufl., Berlin-New York (1980)

[17] A. Weber, Über die Metrik der Inder, Berlin (1863, 1973)

[18] R. Witzlau, Peter Apian (1495 oder 1501-1552), Leben und Werk unter besonderer Berücksichtigung seines Anteils an der Entwicklung wissenschaftlicher Instrumente in der 1. Hälfte des 16. Jahrhunderts in Deutschland, Dissertation PH Potsdam (1990)

[19] A. Yushkevich, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Basel (1964)

LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Henri Lombardi. IREM de Franche-Comté, Besançon, France.

Résumé : De très nombreux raisonnements par l'absurde sont des raisonnements directs présentés à l'envers. D'autres sont des raisonnements directs à peine déguisés, qu'il est facile de transcrire sous forme directe. D'autre preuves, dites **par** l'absurde, ne sont que des preuves **de** l'absurde: comment démontrer qu'une hypothèse est toujours fausse, sinon en la réduisant à l'absurde ?

Enfin, il est des cas où, apparemment, on ne sait pas établir un fait de nature positive autrement qu'en réduisant à l'absurde l'hypothèse selon laquelle le fait en question serait faux. Ce sont là les vrais raisonnements par l'absurde. C'est souvent selon cette méthode qu'ont été établis, au moins en un premier temps, les "théorèmes d'existence" modernes depuis Cantor et Hilbert.

Pour établir une claire distinction entre le raisonnement direct et le raisonnement par l'absurde, il est nécessaire de prendre conscience qu'au moins intuitivement certains faits mathématiques peuvent être qualifiés "de type positif", et d'autres "de type négatif". C'est sur la base de cette intuition que l'on qualifie tel raisonnement de "raisonnement par l'absurde" et tel autre de "raisonnement direct".

1) Quelques exemples classiques: Euclide et Archimède

Nous commençons par quelques exemples classiques de raisonnements par l'absurde tirés des textes fondateurs grecs. Nous avons emprunté ces exemples à J.-L. Gardies (*Le raisonnement par l'absurde*, P.U.F., 1991), mais nous n'en faisons pas le même commentaire.

Le triangle isocèle

Un des premiers raisonnements par l'absurde répertoriés est celui-ci, extrait d'Euclide.

On veut démontrer qu'un triangle ABC ayant les angles en B et C égaux est isocèle. Dans l'explication qui suit, nous utiliserons les notations modernes (droite signifie droite et non segment de droite par exemple). Cependant "angle" signifiera "angle géométrique" et non angle orienté.

Selon notre explication, ce raisonnement par l'absurde est un *raisonnement direct retourné à l'envers.*

On a déjà établi le premier cas d'égalité des triangles : Deux triangles qui ont un angle égal entre deux côtés égaux sont égaux. (figure 1))

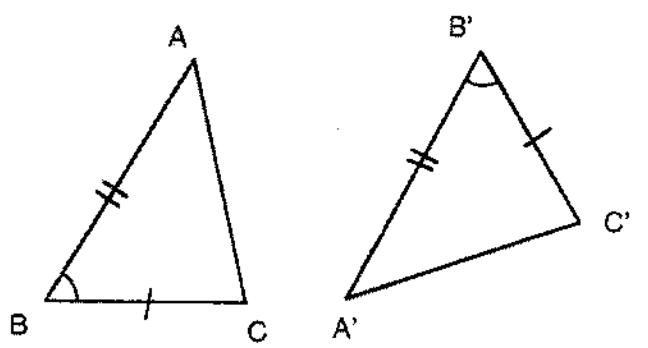


figure 1

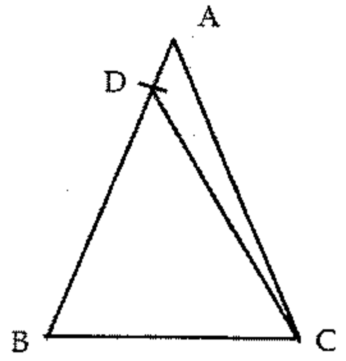


figure 2

On considère alors (figure 2) un triangle ABC ayant les angles en B et C égaux.

On suppose (par l'absurde) que l'un des côtés AB ou AC est plus grand que l'autre. Par exemple AB > AC. On considère le point D du segment BA tel que BD = CA. Par le premier cas d'égalité, et par l'hypothèse sur les angles en B et C du triangle ABC, les triangles ACB et DBC sont égaux (les sommets se correspondant dans l'ordre indiqué). Mais le deuxième triangle est (d'aire) strictement plus petit(e) que le premier. Le tout est donc égal à la partie, ce qui est absurde. Et l'hypothèse de départ était donc fausse.
Ce raisonnement par l'absurde se transforme facilement en un raisonnement direct. On procède comme suit. Construisons sur la demi droite (B,BA) le point D tel que BD = CA. Par le premier cas d'égalité, les triangles ACB et DBC sont égaux. Donc les angles $\angle$ BCD et $\angle$ ABC sont égaux, donc aussi les angles $\angle$ BCD et $\angle$ BCA. Par construction A et D sont du même côté de la droite (BC). L'égalité des deux angles implique donc que les droites (CD) et (CA) coïncident. Donc les points A et D sont confondus et AB = DB = AC.
On notera par ailleurs que le raisonnement direct ne fait plus appel à l'axiome "Le tout est [strictement] plus grand que la partie [stricte]".
Le premier raisonnement, sans faire aucune hypothèse absurde et en commençant comme le nôtre, pouvait conclure que l'aire du triangle CDA est nulle, ce qui impliquait que D soit en A. Les grecs ne pouvaient sans doute guère faire un tel raisonnement où il est question d'un "faux" triangle d'aire nulle, et ils lui ont préféré le raisonnement par l'absurde.
Dans notre rétablissement du raisonnement sous forme directe, nous avons introduit une «simplification» qui consiste à remplacer un raisonnement sur des aires égales par un raisonnement sur des angles égaux. C.-à-d. que nous n'avons pas besoin d'avoir caché une théorie des aires dans les axiomes pour faire fonctionner la preuve. Une telle réticence vis à vis de la théorie des aires ne pouvait être partagée par les grecs, qui ne voyaient sans doute nulle nécessité de subordonner la théorie des aires à celle des angles et longueurs.

L'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré, par le pair et l'impair

Nous considérons maintenant l'un des plus célèbres des raisonnements par l'absurde. L'incommensurabilité du côté et de la diagonale d'un carré selon la preuve par le pair et l'impair.
Nous défendrons ici le point de vue suivant :
à strictement parler, *il ne s'agit pas d'une preuve par l'absurde, mais d'une preuve de l'absurde*, en tout cas si on définit l'incommensurabilité comme l'impossibilité qu'existe une commune mesure.

La preuve par le pair et l'impair peut être présentée comme suit. Supposons une commune mesure au côté et à la diagonale d'un carré. Supposons que le côté est égal à n fois cette commune mesure[1] et la diagonale à p fois cette commune mesure. Si n et p sont tous deux pairs, on peut multiplier la commune mesure par 2 et diviser n et p par 2 . On se ramène donc par un processus fini bien contrôlé au cas où au moins un des deux nombres n et p est impair. Par le théorème de Pythagore $p^2 = 2n^2$. Donc p est pair et n est impair: $p = 2p_1$. Mais $p^2 = 2n^2$ implique alors $n^2 = 2p_1^2$, et n est pair. Ce qui est absurde. *Et c'est précisément ce que nous voulions démontrer.* Car l'incommensurabilité est *définie comme* signifiant l'impossibilité d'une commune mesure.

La double réduction à l'absurde pour prouver des égalités de rapports d'aires, de volumes, de longueurs.

Nous rappelons tout d'abord brièvement pourquoi la théorie de la comparaison des rapports de grandeur attribuée à Eudoxe répond à une nécessité mathématique très forte.

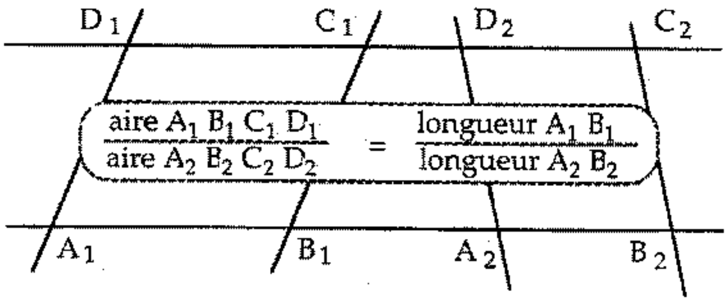
Nous montrons ensuite que cette nécessité mathématique conduit à une conception *positive* de l'inégalité et une conception *négative* de l'égalité.

Nous défendons enfin l'idée selon laquelle le procédé de double réduction à l'absurde, si habilement et systématiquement mis en oeuvre par Archimède, n'est qu'une manière à peine détournée d'appliquer la définition *négative* de l'égalité. En conséquence les preuves d'Archimède sont en fait des preuves **de** l'absurde et non des preuves **par** l'absurde.

Comparaison des aires de deux parallélogrammes

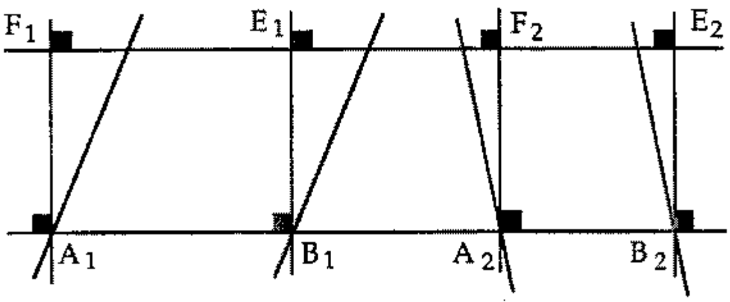
Considérons le théorème suivant:

Théorème: les aires de deux parallélogrammes compris entre deux droites parallèles (Δ) et (Δ') sont entre elles comme leurs bases

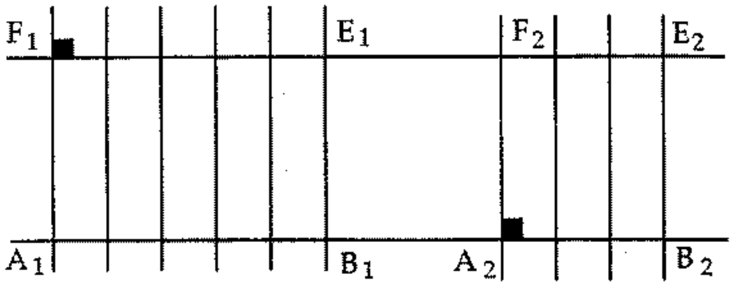


Par un jeu de puzzle on se ramène au cas des rectangles

[1] Dans tout l'article, nous réservons les lettres m, n, p avec éventuellement des indices, pour désigner des nombres entiers.



Si maintenant $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ sont commensurables, l'égalité cherchée se démontre par un jeu de puzzle. (figure ci-dessous pour un rapport de 3 à 5)



Si on ne fait pas l'hypothèse d'existence d'une commune mesure, le même résultat ne peut être obtenu que par des raisonnements beaucoup plus sophistiqués.
Une solution est donnée par la théorie des rapports de grandeurs de même nature attribuée à Eudoxe. Nous commençons par un bref rappel de cette théorie.

Bref rappel de la théorie des grandeurs

Lorsque deux grandeurs sont de même nature, on peut les additionner, les comparer entre elles[2], retrancher la plus petite de la plus grande. Des propriétés de stabilité convenables sont également supposées, comme par exemple:

$$a = b \text{ et } a' > b' \Rightarrow a+a' > b+b'$$

En outre on suppose qu'une grandeur peut toujours être divisée en n parties égales.
Enfin, l'axiome d'Archimède doit être vérifié :
Si deux grandeurs a et e sont de même nature, il existe un entier n tel que $n\,e > a$

Eudoxe **définit** alors l'égalité de deux rapports a_1/a_2 et b_1/b_2 (a_1 et a_2 étant de même nature, ainsi que b_1 et b_2) en demandant, que:

$$\text{pour tous entiers } m \text{ et } p \quad \begin{cases} m\,a_1 > p\,a_2 & \Leftrightarrow \quad m\ b_1 > p\,b_2 \\ m\,a_1 < p\,a_2 & \Leftrightarrow \quad m\ b_1 < p\,b_2 \\ m\,a_1 = p\,a_2 & \Leftrightarrow \quad m\ b_1 = p\,b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Lorsque les deux grandeurs a_1 et a_2 sont commensurables, la dernière équivalence suffit, pour une seul couple de valeurs de m et p. Sinon, il faut faire appel à une infinité de comparaisons pour établir une égalité.

En bonne logique, la définition d'Eudoxe devrait être *précédée* du lemme suivant qui justifie réellement cette définition:

[2] Il faut remarquer que l'hypothèse selon laquelle deux grandeurs de même nature sont toujours comparables ne va pas totalement de soi lorsque par exemple il s'agit d'aires planes, de volumes, et encore moins lorsqu'il s'agit de longueurs de courbes ou d'aires non planes.

Lemme préliminaire: étant données trois grandeurs a, b, c de même nature avec $a > b$ on peut trouver deux entiers m et p tels que $m\,a > p\,c > m\,b$ (c.-à-d. on peut établir que a/c n'est pas égal à b/c au sens de la définition d'Eudoxe)

La preuve de ce lemme repose sur l'axiome d'Archimède. Soit en effet un entier m tel que $m\,(a-b) > 2c$. Considérons la grandeur c/m et soit p le plus petit entier tel que $p\,(c/m) > b$. D'après les hypothèses on a $a > p\,(c/m) > b$ c.-à-d. $m\,a > p\,c > m\,b$

Le caractère négatif de l'égalité des rapports dans la définition d'Eudoxe
La définition de l'égalité des rapports selon Eudoxe (qui pour l'essentiel coïncide avec la définition actuelle de l'égalité de deux nombres réels) implique la situation apparemment paradoxale suivante.
Lorsque a_1 et a_2 sont incommensurables, et que $a_1/a_2 = b_1/b_2$, l'égalité est a priori impossible à constater selon un processus fini. L'infinité des couples (m,p) intervenant dans la définition ôte à celle-ci tout caractère directement opératoire. Par contre, si les deux rapports sont inégaux, cela se constatera au moyen d'un seul test:
pour deux entiers m et p convenables, $m\,a_1 > p\,a_2$ et $m\,b_1 < p\,b_2$ (2)

La condition ci-dessus, qui s'interprète comme $a_1/a_2 > p/m > b_1/b_2$, donne une condition suffisante simple permettant de distinguer deux rapports, tandis que l'égalité de deux rapports est essentiellement définie comme l'impossibilité de les distinguer selon la procédure simple ci-dessus.

Résumons nous. La définition (2) de l'inégalité, (qui est presque sous cette forme chez Eudoxe), a un caractère positif, fini, directement opératoire. La définition (1) de l'égalité a un caractère infini et se révèle être une *définition par l'absurde*: deux rapports sont égaux si et seulement si il est impossible de les distinguer.

Nous allons maintenant voir comment fonctionne la définition d'Eudoxe en pratique, mais plutôt que de traiter le cas des aires de parallélogrammes, nous examinons le cas plus intéressant des aires enfermées par des courbes planes.

Comparaison d'aires enfermées par des courbes

Considérons le cas des aires de deux cercles de rayons r et $2r$.
Alors que pour les carrés de côté r et $2r$ il est facile de montrer que le rapport des aires est égal à 4 en utilisant un puzzle, on voit bien qu'il ne peut guère être question d'une telle preuve pour le cas des deux cercles, à cause des bords des deux cercles.
Une théorie sophistiquée des rapports de grandeur s'avère donc maintenant indispensable même dans le cas où les rapports sont rationnels.
En d'autres termes, et bien que ceci ne soit devenu apparent que fort tard, il y a inévitablement un côté "purement conventionnel" dans la définition de l'égalité de deux aires limitées par des courbes: cette égalité ne peut pas être établie de manière aussi incontestable que l'égalité des aires de deux rectangles ayant leurs côtés tous commensurables, ou que l'inégalité de deux aires enfermées par des courbes. Certes, l'axiome d'Archimède semble sauver en partie la mise (au regard de la preuve du

lemme préliminaire donné plus haut), mais lorsqu'il s'applique à des aires, il s'agit d'un nouvel axiome par rapport à celui qui s'applique à des longueurs. L'axiome d'Archimède pour les aires permet de faire l'économie de la théorie des aires des domaines quarrables du plan (c.-à-d. essentiellement l'intégrale de Riemann), mais du coup, il cache le caractère "conventionnel" de la définition de l'égalité des aires.

Voici alors la preuve que les aires de deux cercles sont entre elles comme celles des carrés construits sur leurs rayons. Notons $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{A}_2$; $\mathcal{C}_2$ les aires respectives des cercles et des carrés. Supposons que le rapport des aires des carrés soit supérieur à celui des cercles correspondants: $\mathcal{A}_1 / \mathcal{A}_2 > \mathcal{C}_1 / \mathcal{C}_2$, ou ce qui revient au même en introduisant une quatrième proportionnelle "abstraite" $\mathcal{A}'_1$, supposons que $\mathcal{A}_1 / \mathcal{C}_1 > \mathcal{A}'_1 / \mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_2 / \mathcal{C}_2$.

On peut alors trouver un polygone P_1 inscrit dans le cercle C_1 et dont l'aire $\mathcal{P}_1$ vérifie:

$$\mathcal{A}_1 / \mathcal{C}_1 > \mathcal{P}_1 / \mathcal{C}_1 > \mathcal{A}'_1 / \mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_2 / \mathcal{C}_2.$$

Mais en considérant l'aire $\mathcal{P}_2$ du polygone correspondant P_2 inscrit dans le cercle C_2 on obtient

$$\mathcal{P}_1 / \mathcal{C}_1 = \mathcal{P}_2 / \mathcal{C}_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 / \mathcal{C}_2 > \mathcal{P}_2 / \mathcal{C}_2$$

ce qui est absurde. L'inégalité dans l'autre sens se réduirait à l'absurde de la même manière. Ainsi, bien qu'on ne soit pas retourné à la définition stricto sensu de l'égalité, puisque le rapport intercalé $\mathcal{P}_1 / \mathcal{C}_1$ n'est pas rationnel, la preuve constitue en soi le même genre de réduction à l'absurde que celui réclamé par la définition.

2) Une analyse plus détaillée

Dans cette section nous présentons une analyse plus détaillé de la signification, positive ou négative, des énoncés mathématiques. Nous nous appuyons sur cette analyse pour donner un exemple de vraie preuve par l'absurde, et pour discuter la question du retournement des preuves par l'absurde en preuves directes.

Une définition un peu plus formalisée du positif et du négatif

Nous avons parlé dans la section 1, de manière informelle, du caractère «positif et fini» de certaines assertions, opposé au caractère «négatif et infini» de certaines autres. Ceci était basé sur une intuition qui est suffisante dans beaucoup de cas concrets. Nous essayons maintenant d'en donner une approche un peu plus formalisée. Cette approche tient compte des acquis de l'histoire, qui a mis les entiers naturels au premier rang pour tout ce qui concerne les questions de l'infini, au point de subordonner sur le plan logique toutes les mathématiques au cas paradigmatique des entiers. Ce n'est d'ailleurs que le prolongement naturel du "début de l'histoire" dans laquelle le cas difficile du rapport des grandeurs a été ramené à des considérations sur les entiers naturels.

Nous considérons donc un "corps de mathématiques" dans lequel interviennent les entiers naturels ainsi que des "mécanismes" fonctionnant à partir des entiers naturels. Nous notons m, n, p, q pour des entiers naturels et $\alpha : (m,n,p) \longmapsto \alpha(m,n,p)$ pour un

"mécanisme". Par exemple un mécanisme typique chez Archimède est la production d'aires successives connues qui approchent une aire inconnue avec une précision toujours plus grande et bien contrôlée (la précision double au moins à chaque étape).
Pour simplifier la discussion, nous supposons que le mécanisme α produit en sortie un entier naturel (en pratique, le mécanisme produit souvent un résultat du type Vrai ou Faux, et ces valeurs de vérité peuvent être codées par 0 et 1).
Une assertion de caractère positif, fini, concernant le mécanisme α est de l'un des types suivants:
type immédiat (m, n, p, q sont des entiers précisés)

$$\alpha(m,n,p) = q \qquad \text{(I)}$$

type purement existentiel (n, p, q sont des entiers précisés)

$$\exists\, m \quad \alpha(m,n,p) = q \qquad (E_1)$$

Par contre, une assertion du type purement universel suivant est de caractère négatif (infini)

$$\forall\, m \quad \alpha(m,n,p) = q \qquad (U_1)$$

Il est à noter qu'on ne change pas le type logique d'une telle assertion si on remplace la relation d'égalité par une autre relation facile à tester.
Le lecteur ou la lectrice constatera donc que beaucoup, pour ne pas dire la plupart, des théorèmes mathématiques sont des énoncés de caractère infini.
Le caractère infini d'un énoncé n'est pas un obstacle pour une preuve convaincante: les preuves par récurrence sont très convaincantes. C'est seulement un obstacle à sa vérification par un simple calcul.

Il se présente aussi naturellement des assertions de caractère plus compliqué que les précédents comme par exemple: (p, q sont des entiers précisés)

$$\exists\, m\, \forall\, n \quad \alpha(m,n,p) = q \qquad (E_2)$$

$$\forall\, m\, \exists\, n \quad \alpha(m,n,p) = q \qquad (U_2)$$

ou, plus compliqué encore, (q étant un entier précisé)

$$\exists\, m\, \forall\, n\, \exists\, p\ \alpha(m,n,p) = q \qquad (E_3)$$

$$\forall\, m\, \exists\, n\, \forall\, p \quad \alpha(m,n,p) = q \qquad (U_3)$$

Et on peut considérer des énoncés dont le caractère de complication logique sera supérieur à tous les types (E_n) ou (U_n) en utilisant la méthode diagonale de Cantor par exemple.
La surprise est sans doute que les grandes conjectures mathématiques sont (équivalentes à) des énoncés du type (U_1) (théorème de Fermat, conjecture de Riemann sur les zéros de la fonction Zéta, conjecture de Poincaré sur la topologie de la sphère) ou (U_2) (conjecture $P \neq NP$ en informatique théorique) mais très rarement d'un type plus compliqué.

Toutes les preuves d'énoncés du type (U_1) ou d'un autre type plus compliqué impliquent une infinité de vérifications (ou des infinités imbriquées de vérifications). Dans ces cas, une vérification directe est difficile à concevoir. On ne peut guère espérer exclure des preuves la méthode de réduction à l'absurde.
En effet, la *signification* d'une assertion du type (U_1) n'est rien d'autre que la possibilité de réduire à l'absurde une assertion de type (E_1).

> Les *vraies preuves par l'absurde* sont des preuves qui utilisent plus de réduction à l'absurde que ne le réclame la signification même de l'assertion qu'on veut prouver.

Le cas le plus simple est celui d'un énoncé de type (E_1) qu'on démontre en réduisant à l'absurde l'énoncé de type (U_1) correspondant. Supposons par exemple qu'on ait réduit à l'absurde l'hypothèse

$$(B) \quad \forall m \quad \alpha(m) \geq 3$$

La preuve que (B) se réduit à l'absurde ne fournit pas en général d'entier m *tel que* $\alpha(m) \leq 2$ et donc *ne réalise pas la signification naturellement attachée à l'énoncé*

$$(A) \quad \exists m \quad \alpha(m) \leq 2$$

La signification de (B) n'est autre que l'absurdité de (A), sauf à admettre que l'infinité des vérifications naïvement comprises dans l'énoncé (B) puisse se produire "en acte" dans quelque univers mathématique idéal mais inaccessible à l'entendement humain. Toute preuve de (B) (ou d'un énoncé du même type) est donc une preuve **de** l'absurde et non une preuve **par** l'absurde.

Par contre la signification de (A) est supérieure à l'absurdité de (B). Prouver (A) par l'absurde c'est prouver que l'absurdité de (A) se réduit à l'absurde, mais cela ne fournit pas l'entier réclamé.

Nous allons présenter un cas concret lié à l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Positif et négatif: le cas de l'irrationalité d'un nombre réel

Tout d'abord quelques définitions dans la lignée de la théorie d'Eudoxe.

Un nombre réel x est considéré comme donné par une suite x_n de rationnels qui converge vers x avec

$$|x_n - x_{n+1}| \leq 1/2^{n+1} \qquad (\text{d'où } |x - x_n| \leq 1/2^n)$$

Deux réels représentés par les suites x_n et y_n sont (définis comme) égaux si

$$\forall n \quad |y_n - x_n| \leq 2/2^n$$

Il s'agit d'une notion de type (U_1).

Ils sont distincts si

$$\exists n \quad |y_n - x_n| > 2/2^n$$

Il s'agit d'une notion purement existentielle, de type (E_1).

Démontrer que deux nombres réels sont distincts en réduisant à l'absurde l'hypothèse selon laquelle ils seraient égaux, c'est faire une vraie preuve par l'absurde, qui ne réalise pas complètement la signification de l'énoncé démontré.

Un nombre réel x est dit positivement irrationnel s'il est distinct de tout nombre rationnel. C'est une notion de type (U_2).

Le nombre x est dit négativement irrationnel s'il est absurde qu'il soit égal à un nombre rationnel.

Lorsqu'on démontre qu'un nombre réel x est négativement irrationnel, il s'agit d'une vraie preuve par l'absurde du fait qu'il est positivement irrationnel. Plus précisément, pour chaque rationnel r on a une preuve par l'absurde du fait $x \neq r$, qui est de nature (E_1).

Dans la section précédente, nous avons montré que le carré d'un rationnel n'est jamais égal à 2 . On en déduit que $\sqrt{2}$ est négativement irrationnel. En effet, si deux réels sont égaux, leurs carrés aussi. Mais le carré d'un rationnel n'est jamais égal à 2 (preuve de la section 1). Pour autant, nous n'avons pas prouvé l'irrationalité positive de $\sqrt{2}$, i.e. nous n'avons pas précisé de combien $\sqrt{2}$ s'écarte de chaque nombre rationnel. Prouver l'irrationalité positive de $\sqrt{2}$ c'est donner une procédure explicite qui minore l'écart entre $\sqrt{2}$ et un rationnel arbitraire $r = m/p$. Cette procédure n'a pas été donnée, mais elle peut néanmoins être facilement déduite:
Puisque m^2 et $2p^2$ sont deux entiers distincts on a $|m^2 - 2p^2| \geq 1$. Donc

$$|m^2 - 2p^2| /p^2 = |r^2 - 2| = |r - \sqrt{2}| (r + \sqrt{2}) \geq 1/p^2$$

Comme $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ on se ramène au cas où $1 < r < 2$ (donc $1 < r + \sqrt{2} < 3$) et alors

$$|r - \sqrt{2}| \geq 1/3p^2$$

Positif et négatif: un peu d'algèbre linéaire réelle

Il n'est pas évident de trouver des exemples élémentaires de "vrais raisonnements par l'absurde" dans les cours de mathématiques.
C'est peut être en algèbre linéaire qu'on est le plus immédiatement tenté d'en faire.
Considérons une matrice réelle A de type $n \times n$ et notons f l'application linéaire associée. On munit l'espace $\mathbb{R}^n$ d'une norme usuelle. On peut alors démontrer les deux chaînes d'équivalence suivantes.

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est inversible} \iff f \text{ est surjective} \iff \det(A) \neq 0 \iff \\ \forall x\ (\|x\| \neq 0 \Rightarrow \|f(x)\| \neq 0) \iff \exists c > 0\ \forall x\ \|f(x)\| \geq c\|x\| \end{array}}$$

et

$$\boxed{\text{non } \det(A) = 0 \iff \forall x\ (\|f(x)\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0)\ (\text{c.-à-d. } \mathrm{Ker}(f) = \{0\})}$$

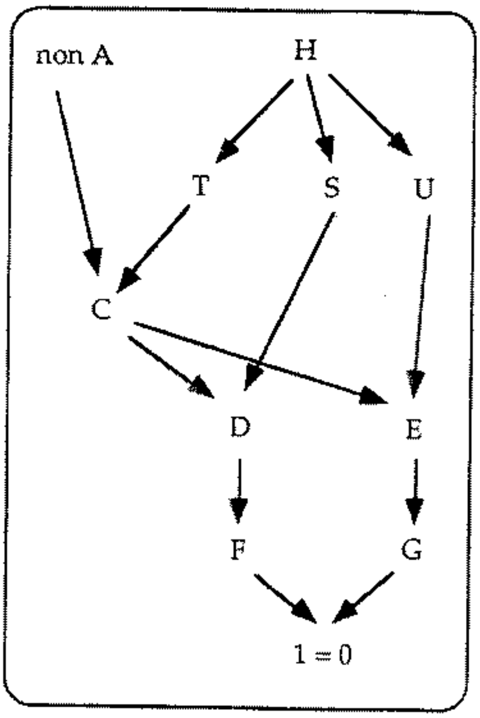
Reformulé en termes d'indépendance linéaire, la première chaîne d'équivalence correspond à une notion positive d'indépendance linéaire des colonnes de A, tandis que la deuxième chaîne correspond à une notion négative d'indépendance linéaire. Lorsqu'on considère des matrices à coefficients rationnels, les deux notions sont les mêmes parce qu'il y a un test d'égalité à zéro pour un nombre rationnel. Par contre, pour des matrices à coefficients réels, les deux notions ne coïncident pas et il est souvent tentant de prouver l'indépendance linéaire sous la forme faible: une combinaison linéaire qui s'annule a nécessairement tous ses coefficients nuls.
Prenons par exemple l'espace E des polynômes réels de degré < n. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels distincts, et considérons l'application linéaire suivante:

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto (P(x_1), \ldots, P(x_n))$$

Il est agréable (et élégant) de démontrer que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ en disant qu'un élément P dans le noyau doit être divisible par $(X - x_1) \ldots (X - x_n)$. Cependant, pour démontrer que f est surjective, il vaut mieux utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

3) Tout raisonnement par l'absurde se retourne en un raisonnement direct si on admet le principe du tiers exclu

La remarque selon laquelle tout raisonnement «par l'absurde» peut se retourner en un raisonnement direct a souvent été faite. Nous allons mettre en évidence qu'elle s'appuie sur un principe général de tiers exclu qui nie la distinction naturelle entre assertions de types logiques différents.
Prenons un énoncé (A) de type (E_1) se situant dans un contexte général que nous résumons en (H) (les hypothèses données par le contexte).
Supposons que nous ayons prouvé (A) par l'absurde en utilisant un raisonnement structuré comme suit



Des hypothèses (H) on déduit les théorèmes, T, S, U.

De T et non A on déduit C.

De S et C on déduit D.

De U et C on déduit E.

De D on déduit F et de E on déduit G.

De F et de G on déduit l'absurdité 1 = 0.

Une "preuve directe" déduite de la précédente consiste à retourner partiellement l'arbre initial de la preuve à l'envers pour aboutir à la conclusion non non A.
Ce retournement est basé sur les principes (incontestables) que

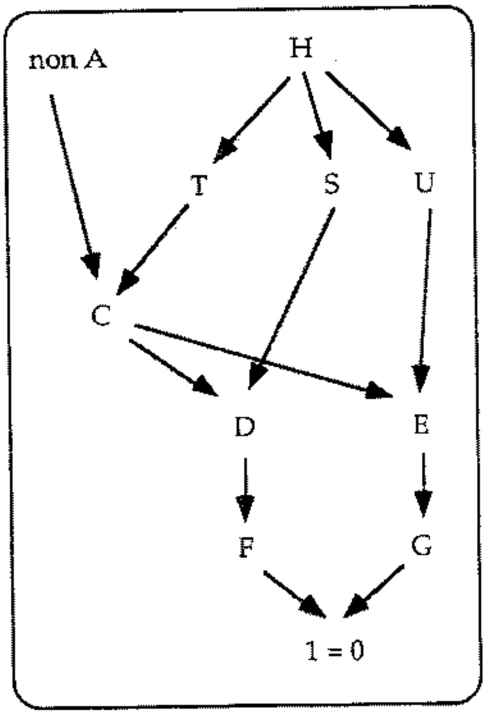
si on a $(H, C, D) \Rightarrow E$ alors on a $(H, C, \text{non } E) \Rightarrow \text{non } D$

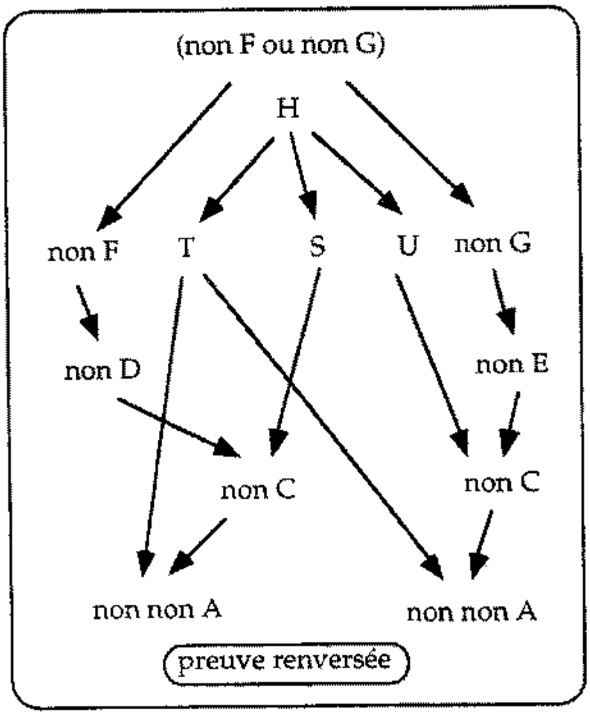
si on a $(H, C, D) \Rightarrow \text{non } E$ alors on a $(H, C, E) \Rightarrow \text{non } D$

En outre, avec l'exemple que nous avons pris, on a besoin du principe (contestable) du tiers exclu sous la forme suivante:

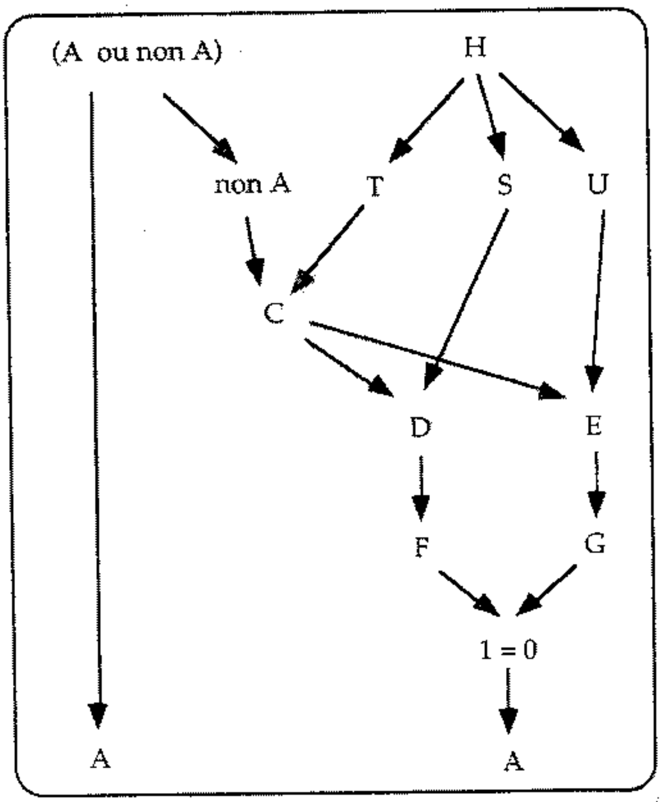
si F et G sont incompatibles alors on a non F ou non G

La preuve examine séparément les deux cas (a priori non exclusifs) possibles: non F d'une part, non G d'autre part. Dans chaque cas elle établit non non A. Enfin le fait qu'on puisse déduire A de non non A résulte également du principe du tiers exclu.
Le renversement de la preuve en "preuve directe" donne alors le résultat montré dans la figure suivante.





Pour montrer à quel point le renversement proposé ci-dessus nous paraît peu convaincant, nous en proposons un autre, nettement plus provocateur, mais basé au fond sur les mêmes principes.



La preuve "directe" suivante est elle aussi basée sur le principe de tiers exclu:
On examine séparément ce qui se passe dans les deux seuls cas possibles: A d'une part, non A d'autre part.
On démontre dans les deux cas que A est vérifié.
Le deuxième cas est examiné selon la preuve précédente, puis A est déduit de l'absurdité $1 = 0$.

Beaucoup de gens ne trouvent cependant pas cette preuve très directe, malgré le fait d'expérience bien établi qu'on peut prouver n'importe quoi à partir de l'absurde (il est par exemple facile de prouver $7 < 3$ à partir de $1 = 0$ par des raisonnements incontestables).

Conclusion

Les raisonnements par l'absurde peuvent classés en deux catégories distinctes.
Ceux qui réalisent pleinement la signification de l'énoncé recherché: cette signification est que quelque chose est absurde, et la preuve est alors une preuve de l'absurde.
D'autre part, ceux qui ne réalisent pas pleinement la signification de l'énoncé recherché. Dans ce cas, l'utilisation du principe du tiers exclu permet de rétablir une preuve sous forme directe. Mais l'utilisation du principe du tiers exclu conduit à une étude cas par cas alors même que la signification de cette disjonction n'est pas réalisable en pratique. Au bout du compte, le rétablissement sous forme directe n'est qu'illusoire au regard du but recherché.

Table des matières

P27

TRADITIONAL COUNTING SYSTEMS AND ITS PLACE IN THE PAPUA NEW GUINEAN CULTURE

Indira Chacko, University of Papua New Guinea

Background and Rationale

The author's interest in the traditional counting systems in Papua New Guinea started from the interactions with the students offering mathematics as one of the two teaching subjects at the Goroka Campus of the University of Papua New Guinea (UPNG). It is pertinent to mention that Goroka Campus is where high school teachers for PNG are trained.

In 1995, data on traditional number systems was gathered from the students in the Diploma in Secondary Teaching (DST), who were in the third and final year of their programme. The pattern that emerged from the data got me further interested in the number systems, especially the use of these as well as the efforts to transfer the knowledge of these systems to the younger generation and through that the propagation as well as preservation of these systems.

In PNG, level of education is low and those with grade 10 and above is around 7%. (Report of National Population and Housing Census 1990). This implies that the role of the teachers in the education of the young in Papua New Guinea (PNG) is very crucial compared to other countries where parents are more educated, hence in a better position to take active part alongside teachers.

The sample involved in the study would be teaching mathematics at the high school level and the rationale is that once the interest of this group is aroused in the traditional counting systems, the chances of them passing this on to their students is better thereby getting the younger generation interested in these systems and preventing these from a natural death.

Source of Data

The data was gathered from students offering mathematics in 1995 and 1996. Altogether twenty two DST students in 1995, thirty six DST final year and fourty two B.Ed Preservice Year Two students in 1996, which makes up a total of one hundred, are involved in the study.

Instrument

A questionnaire was used in gathering data in 1995 which was further modified in 1996 whereby the provision to give the names as well as the meanings of numbers from one to fifty was included. Items to obtain information on the use of the number systems and whether these are taught in the formal school system were also added to the questionnaire.

Reliability of Information

As the data is gathered from the students, some of whom had been away from home for long periods of time, one needs to be cautious about the reliability of the information provided. Few of the students reported that they consulted friends to check the accuracy of information while some others completed only the first few numbers like one to ten with the remark that others are rarely used. When there were more than one respondent from the same area, information obtained was cross checked to ensure reliability.

Aims of the study

Primary aim was to find out whether (I) PNG has its own number systems (II) these are in use and where (III) these are taught in schools.

A number system, if not in use, is as good as not having it, hence the effort to find out the uses. If the system is passed on to the young then it will not die with the old which led to adding the third objective.

Scope

To identify the various number systems being used in PNG, with such diverse culture and language is beyond the scope of this work.

The objectives listed earlier on is all that will be covered with just a glance at the number systems in the various provinces along the cost, the high lands and the islands.

Results and Discussion

Results will be presented along the same line with the objectives.

1. Traditional counting systems in PNG.

All the 100 respondents listed the number systems in their villages or towns, scattered all over the country. There was no one that said that they had no traditional counting system. This confirms the research report by Lean (1991) who studied the systems in PNG.

Variations in number systems are noticed within and between provinces. Some examples follow, starting with the highlands and moving down to the islands. Due to the page limit to be followed, only a random sample of the systems gathered will be given in this paper.

Table 1

Two Number Systems from Eastern Highlands Province (EHP)

Village/ Town	*Kasena - Asaro*	*Safayufa - Bena*	
Numbers	**Local Names**	**Local Names**	**Meaning**
1	Hamo	Menekoe	Single
2	Seta	Lowe	Double
3	Seta Hamo	Loweyagi Meneyagi	Tripple
4	Seta Seta	Lowefa lowefa	Double Double
5	Handahera (Five fingers)	Neyahi Subago	Fingers on one hand finish
6	Handahera Hamo	Neyahi suboloto menehite	Fingers on one hand + single
7	Handahera Seta	Neyahi Suboloto lowehiti	Fingers on one hand + double
10	Gurehe	Neyahi lowe subago	Fingers on two hands finish or one stick = 10
11	Gurehe Hamo	Negahi lowe suboloto nugusaga helokati	Fingers on two hands + one toe
20	Gonombu (Red)	Osahi lowe	Two sticks

These are just two of the many systems reported from the EHP. In the first one, Hamo and Seta are combined to form other numbers like three and four. In the second case, Monekoe is used just for one. Use of hand and feet is noticed in number systems from other places in EHP as well as other provinces.The systems from two other places namely, Lufa and Kainantu in the same province, too start with specific words for one and two then move on to use of hand and feet.

A sample of two systems from Southern Highlands Province follow:

Table 2

Two number systems from Southern Highlands Province

Village/ Town	*Tari Basin*	*Kuma/Mendi*	
Numbers	**Local Names**	**Local Names**	**Meaning**
1	Ndu	Selu	First in the first lot of four
2	Yapa	Talo	
3	Itupa	Yepok	
4	Sondopa	Kise	End of first lot of four
5	Repu	Sepakara	First in the second lot of four
6	Raga	Talopakara	
7	Gona	Yepokopakara	
8	Pou	Engaik	End of second lot of four
9	Gi		
10	Rapagia		
11	Repane		
12	Konane	Rurep	End of third lots of four
13	Ginani		
14	Malura/Ngui Ndu		
15	Ndu/Mandi		

The system on the left goes from one to fourteen while the one on the right is counted in groups of four. The respondent on the system with base fourteen was of the belief that it is based on lunar months.

Number system from the Western Highlands Province follow.

Table 3

Two Number systems from Western Highlands Province

Village/ Town	*Banz*		*Hagen*
Numbers	**Local Names**	**Meaning**	**Local Names**
1	Handam	One stick	Tenta
2	Tal	Two sticks	Ralg
3	Thalika	Three sticks	Ralg Tik
4	Kaplkapl		Timb Kagal
5	Hangal Horo		Timb Kagal Pimbit
6	Hangal Horo Handam		Timb KagalPimb ralg
7	Hangal Horo tal		Timb Kagal Pimb ralg tika
10	Hangal Handam		Engake Pimb ralg
11	Hangal Handam Handam		Engake Pimb ralg tika

The system from Banz appears to count in groups of five while the one from Hagen is counted in groups of four from five to seven then in sets of eight.

Number systems from Enga and Simbu which are among the highlands provinces, follow:

A system each from Madang, Morobe and Central Provinces are given in table 4.

Table 4

Number Systems - Madang, Morobe and Central Provinces

Village/ Town	*Madang - Malalami*	*Morobe - Selepet*	*Central - Amazon Bay*
Numbers	**Local Names**	**Local Names**	**Local Names**
1	Emo	Konok	Omu
2	Rua	Yo'op	Aua Ava
3	Tolu	Kalimbu	Aiseli
4	Pangge	Imbot	Toulai
5	Nimanda emo	Momerek	Ima Omu
6	Nimanda emo takesi emo	Nomobolon konop	
7	Nimanda emo takesi rua	Nomobolon Yo'op	
8	Nimanda emo takesi tolu	Nomobolon kalimbu	
9	Nimanda emo takesi pangge	Nomobolon imbot	
10	Nimanda rua	Bot nombot harok	Ima Ava

The three systems above uses hands, fingers and toes in counting. In all three, the number five is represented by the word for hand.

Due to the need to adhere to the number of pages only a few of the number systems from the islands will be looked at before moving on to the final part of the paper.

Table 5

Sample Number Systems: W.N.B., E.N.B, N.S.P.

Village/ Town	*W.N.B.P - Bakowi*	*E.N.B.P - Kokopo*	*N.S.P. - Siwai*
Numbers	**Local Names**	**Local Names**	**Local Names**
1	Taku	Tikai	No'o
2	Rua	Amurua	Kiigo
3	Tolu	Autul	Pegan/Perima
4	Wa	Aivat	Korigan
5	Lima	Ailina	Agumuka
6	Polu Taku	Lap Tikai	Nobgi Naran
7	Polu Rua	La Vurua	Klige Naran
8	Polu Tolu	La Vtul	Pegan Gi naran
9	Polu Wa	La Avat	Korigan Gi naran
10	Ravulu Taku	Avinun	Naran
11		Avinun ma tikai	

W.N.B.P - West New Britain Province, E.N.B.P - East New Britain Province
N.S.P. - North Solomon Province
The way the names change from six in all cases seem to indicate use of five based on palm and feet.

There are numerous counting systems in PNG and a lot of variation is observed, even in this small group of data gathered. Use of fingers, toes and body parts in matching numbers appears to be common. Probably due to the ease in using ones hands and feet, counting in groups of five and ten are more common than two, four, fourteen and so on.

Uses of Traditional Counting Systems

The second question is on the uses of these and this is actually important for the systems to survive through time. The uses listed by the respondents relate to cultural issues where older people in the clans are involved like bride price exchange, compensation payments, construction of canoes, building of houses, bartering and more. In all these listed, older generation takes the lead. Traditional crafts like carvings, bilums and baskets too use the number systems that are traditional in the areas. Most of the time, in the local markets in the villages, selling and buying of goods too is based on the local systems. It is possible that the older generation, who never had the opportunity to learn the Arabic system, finds it easier to use the systems they are used due to simplicity and familiarity. The needs of these people are also very simple, which do not involve large numbers.

II. The Introduction of the traditional counting systems in preschools.

The third objective was to find out whether the traditional systems are dying out or being taught to the younger generation. About 50% of the respondents indicated that recently, pre schools have introduced the local systems in the schools so the children learn these with ease. This certainly will go a long way towards the preservation of the existing systems.

Conclusion

Papua New Guineans are very culture conscious and it is good to see that they have their own number systems which were probably established in yester years to serve their simple needs and are still being used. With more effort, these number systems could be well documented for the future generations. Efforts like those of Lean (1991) should be encouraged to study these in more detail.

References

Flagg Graham , Numbers: Their History And Meaning. The Chaucer Press. 1984.

Lean A. Glendon , Counting Systems of Papua New Guinea (2nd ed). Papua New Guinea University of Technology, Papua New Guinea, 1991.

National Population Census, National Statistical Office, PNG. 1990.

Smeltzer Donald, Man And Number. A and C. Black Ltd. 1965.

INVESTIGAÇÃO DAS CONCEPÇÕES, ATITUDES E EXPERIÊNCIAS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA QUANTO AO USO DA HISTÓRIA NA SALA DE AULA

Iran Abreu Mendes, UEPA, Belém, PA (Brasil)
John A. Fossa, UFRN, Natal, RN (Brasil)

O presente estudo procura identificar as concepções, atitudes e experiências dos professores de matemática da rede de ensino da área urbana de Natal, RN (Brasil) quanto ao uso da história da matemática como um recurso metodológico do ensino da matemática. Em especial, queremos (1) verificar se o putativo interesse na história da matemática realmente existe entre os referidos professores; (2) determinar, pelo menos de grosso modo, os níveis de conhecimento histórico dos entrevistados; (3) retratar as práticas pedagógicas tanto das experiências discentes quanto das experiências docentes do grupo investigado; e (4) determinar sobre quais áreas específicas da matemática os professores quereriam ter mais conhecimento histórico. Estes dados são importantes para assessorar o especialista na confecção de material didático baseado na história da matemática que suprirá as necessidades dos professores e que terá boa aceitação entre os mesmos.

Apresentação aos Professores Pesquisados

A pesquisa foi desenvolvida nas escolas da rede de ensino de 1° e 2° graus de Natal, buscando as informações através da elaboração e aplicação de um questionário composto de doze questões semi-abertas que abordaram aspectos referentes aos itens acima mencionados. Foram pesquisadas as opiniões de 47 professores, que representa uma estimativa de 10% dos professores de matemática da cidade.

Os professores de matemática da referida rede de ensino têm uma formação acadêmica variada e essa variedade ficou evidente com o grupo investigado. Nosso estudo verificou que 2% dos participantes possui graduação em matemática e também em outro curso superior, enquanto 53% tem o 3° grau completo em matemática, 17% ainda está cursando e 19% são graduados em outras áreas como engenharia civil, biologia, estatística, pedagogia e física. Verificou-se, ainda, que 9% tem apenas licenciatura curta em ciências.

O grupo investigado distribui-se nos graus de ensino da seguinte maneira: 45% atua no 1° grau, 21% no 2° grau e 21% em ambos simultaneamente. Há ainda 4% que atua no 3° grau bem como 9% em outros setores das escolas como a supervisão e a orientação.

Outro fato interessante que surge do levantamento feito é que 32% dos participantes trabalham em escolas públicas, 17% em escolas privadas, 38% em ambas escolas públicas e privadas, e 13% em outras instituições de curso superior ou são estudantes universitários estagiando nas escolas.

Apresentação dos Dados

Apresentamos em seguida os dados levantados para cada uma das doze questões do questionário.

1 - *A história da matemática na formação acadêmica do professor de matemática.*

Quando perguntados acerca da presença ou não da história da matemática na sua formação acadêmica, a grande maioria dos respondentes (81%) garante não ter cursado essa disciplina em virtude da ausência da mesma no currículo, da incompatibilidade de horários, ou o fato de que a referida disciplina não foi ofertada aos estudantes por falta de professores. Dos respondentes, 19% afirma ter cursado a disciplina no curso de graduação. Desse total, porém, somente 4% garante ter experimentado a resolução de problemas clássicos de matemática através de aulas boas e dinâmicas.

2 - *Ponto de vista dos professores a respeito da importância da história da matemática na sua formação acadêmica.*

Esse item nos mostra que 98% dos respondentes atribuiu grande importância ao conhecimento da história dos tópicos matemáticos para dar mais embasamento metodológico ao professor, além do aprofundamento a respeito da origem desse conhecimento. Afirmam ainda que a história da matemática desperta o interesse e dá mais compreensão aos problemas da matemática, facilitando, portanto, a aprendizagem. Além disso, dizem que esse conhecimento situa o aluno no tempo e na evolução dos tópicos matemáticos como motivação para a aprendizagem.

3 - *A história da matemática como disciplina no curso de licenciatura em matemática.*

Na visão de 43% dos professores a história da matemática deveria ser ensinada na graduação como uma disciplina específica de história relacionada ao conteúdo programático do curso. Porém, 30% aponta outras abordagens como, por exemplo, o uso de material histórico para cada tema abordado no curso. Apenas 17% dos professores acha que a disciplina deveria ser obrigatória.

4 - *Relação entre o conteúdo matemático e a história.*

Na opinião de 85% dos respondentes, há entre o conteúdo matemático e a sua história uma relação construtiva desde sua origem até hoje e uma relação pedagógica onde uma coisa está atrelada a outra. Assim, há, sempre segundo os professores, uma interdependência entre ambas as partes que é estimulada pela curiosidade e que ocasiona a explicação dos porquês matemáticos que constróem os fundamentos dessa ciência.

5 - *Experiência dos professores com a história damatemática em sala de aula.*

Nesse aspecto temos um quadro interessante: 45% dos professores afirma já ter utilizado a história da matemática na sala de aula e o mesmo percentual afirma que não, enquanto 10% não responderam nada a respeito. Os primeiros apontam seu uso na introdução de tópicos matemáticos como motivação através de livros-textos ou paradidáticos, ilustrando a aula e mostrando a biografia de alguns matemáticos. Em contraste, aqueles que negaram ter utilizado a história na sala de aula justificam essa atitude pelo pouco conhecimento que tem do assunto, pela falta de tempo, ou por se tornar chato para o aluno, embora reconheçam sua importância.

6 - *Uso do livro em sala de aula.*

Nesse aspecto 60% dos respondentes afirma utilizar o livro-texto nas aulas de matemática pois o mesmo facilita o trabalho e ganha-se tempo, dá para seguir uma seqüência lógica, ou serve como fonte de exercícios. Os que responderam negativamente (34%) justificaram-se pelas condições financeiras dos alunos, especialmente os da rede pública de ensino, pelo pouco tempo para as aulas e pela vantagem de usar vários livros na elaboração de apostilas. Apenas 6% somente indicam livros para que os estudantes façam pesquisas e/ou resolvam exercícios.

7 - *Preferência por livros de matemática.*

Os livros mais utilizados ou preferidos pelos professores são os mais variados possíveis em virtude da imposição capitalista das editoras, valendo-se do discurso de que os mesmos são de cunho didático. Os livros mais preferidos ou utilizados pelos professores respondentes foram:

Matemática - 2° grau - Bonjorno e Giovanni
Matemática - 2° grau - Bianchini
Matemática e Realidade - Gelson Iezzi
Matemática - 2° grau - Scipione

8 - *Presença de tópicos de história da matemática nos livros utilizados pelos professores ou indicados aos alunos.*

Apenas 15% dos professores garante que os tópicos de história da matemática presentes nos livros didáticos utilizados por eles aparecem ligados aos tópicos programáticos destes textos. Em contraste, quase o dobro, 28%, não encontra a história da matemática presente nos livros. Mesmo assim, 45% ressalvam que é possível encontrar alguns assuntos dos livros em que a história se faz presente.

9 - A visão dos professores sobre a abordagens que os livros adotam para a história da matemática.

Para os professores pesquisados, a história da matemática aparece nos livros através de biografias de alguns matemáticos famosos, de forma muito resumida através de uma breve introdução. Apenas os paradidáticos mostram a evolução dos assuntos embora a maioria seja cronológica, ilustrativa, superficial e desinteressante para professor e aluno.

10 - *Importância da história da matemática para a melhoria do processo ensino-aprendizagem a partir da experiência dos professores.*

Na opinião de 59% dos professores, a história da matemática é importante para que o aluno compreenda a construção desse conhecimento ao longo do tempo. Para 21%, é importante por contribuir para a aprendizagem do assunto, enquanto que para 20% é importante à medida que relaciona-se com as atividades propostas no livro-texto do aluno e/ou do professor.

11 - *Tópicos matemáticos que mais precisam do conhecimento da história para que sejam bem ensinados em sala de aula.*

Nesse ponto verificamos que a geometria apresentou 58% da preferência, seguida da trigonometria com 26%, equações com 16%, além de outros como funções, álgebra, números, e conjuntos. Tivemos ainda a presença de outros tópicos como logaritmos, limites, análise combinatória, matrizes e determinantes, entre outros, que tiveram menor preferência na escolha.

12 - *Tópicos em que o professor mais precisa de subsídios da história para a efetivação de seu trabalho em sala de aula.*

Os tópicos que mais exigem o conhecimento de história da matemática, por parte do professor, para que ele realize um trabalho efetivo em sala de aula são, sempre segundo os professores, a geometria com 30% e trigonometria com 15% da preferência dos respondentes, seguidos de logaritmos, funções, conjuntos, matrizes e determinantes, entre outros, que tiveram menor preferência.

Análise dos Dados

Das informações apresentadas acima, fica patente que há, entre os professores pesquisados, um enorme interesse na história da matemática como sendo um componente importante na formação de uma compreensão adequada da própria matemática. Também há quase unanimidade em torno da opinião de que a história da matemática é um elemento indispensável da formação do professor.

Quanto ao uso da história da matemática como um recurso pedagógico, as opiniões divergem. Enquanto a grande maioria dos professores pesquisados pensam que há uma relação estreita entre a história e o conteúdo, poucos são capazes de explicitar esta relação, devido parcialmente a falhas da sua própria formação. Há ainda um grupo expressivo que acredita que a história motiva e interessa aos alunos dos primeiro e segundo graus. Este grupo é contraposto por uma grupo do mesmo tamanho que afirma que a história é difícil e chato para estes mesmos alunos. O primeiro grupo parece se apoiar em razões aprorísticas (entendimento do desenvolvimento da disciplina é necessário para a sua plena compreensão e, portanto, é interessante) e/ou experiências em que o aluno é permitido fugir do conteúdo matemático através da história mal-empregada. O segundo grupo parece se apoiar em textos sobre a história da matemática que são de leitura árdua e que não relacionam a matemática com os outros eventos culturais da época estudada.

Quando os professores afirmam usar a história da matemática na sala de aula referem-se, geralmente, ao fornecimento de informações presentes em seus livro-textos. Assim, a pressuposição básica é de um contexto de ensino nos moldes tradicionais de transmissão de conhecimentos. Isso é ainda verificado através da indicação dos livros didáticos utilizados em suas atividades profissionais, pois uma avaliação do conteúdo histórico dos livros adotados pelos professores mostra que a presença histórica se limite a biografias sintéticas de alguns matemáticos famosos, geralmente postas no início ou no final de cada capítulo. O que se encontra também são aspectos históricos ligados à cronologia da geometria, da trigonometria e, em alguns casos, de funções, mas que não são apresentados no desenvolvimento do assunto nem apresentam a evolução de conceitos matemáticos.

As experiências acadêmicas dos professores estudados apontam a precariedade e a carência de ensino da história da matemática na formação do professor de matemática. Porém, também aponta falhas enormes de ordem metodológica, pois os professores possuem pouquíssima informação sobre práticas modernas e eficazes do ensino. Consequentemente, se limitem a usar a história da matemática dentro do estilo tradicional de ensino em que práticas como o ensino baseado em atividades e o uso de material concreto e manipulativo é virtualmente ausente. É também claro que o pouco que existe entre nós que realça a história da matemática como uma parte integrada ao ensino do seu conteúdo não é do conhecimento geral dos professores.

Os professores pesquisados apontam tópicos da geometria e a trigonometria como os tópicos matemáticos que mais precisam de uma abordagem histórica para que sejam bem ensinados e aprendidos em sala de aula, embora não desprezem, em nenhum momento, quaisquer outros assuntos da matemática. De fato, tais assuntos como funções, álgebra de uma forma geral, números e sistemas numéricos, e conjuntos também receberam atenção por uma parte expressiva dos entrevistados. Salientamos, porém, que a história de alguns destes tópicos se complica rapidamente, exigindo uma boa formação matemática para a sua plena compreensão. A tarefa que nos desafia é de empacotar esta informação histórica em uma abordagem que será útil e agradável ao professor e aos seus alunos. Para tanto, será necessário integrar a história da matemática ao desenvolvimento dos outros aspectos culturais do homem e apresentá-la munida de uma metodologia de ensino eficaz.

Conclusão

Podemos sintetizar os resultados expostos acima através das quatro metas assinaladas no início deste trabalho:

1 -*Interesse e importância*.

Não há dúvida de que os professores investigados têm astante interesse em apossar-se do conhecimento da história da matemática, a fim de compreender melhor o desenvolvimento dessa ciência entre nós. Há também grande interesse no uso da história da matemática como um recurso pedagógico, porém, existe uma parcela expressiva de professores que só serão convencidos do seu valor pedagógico mediante da confecção de material eficaz incorporando um ponto de vista histórico.

2 - *Conhecimento*.

Outro aspecto conclusivo da investigação nos aponta para o alto grau de desconhecimento dos professores acerca da história dos tópicos matemáticos que são ensinados por eles. Em particular, falta-lhes uma orientação para que busquem esse conhecimento em algumas referências bibliográficas e as transformem em atividades que contribuam para a aprendizagem de seus alunos.

3 - *Uso*.

Quando a história é usada no ensino de matemática ocorre quase sempre nos modelos tradicionais e, por isso, a história não é inserida em uma abordagem eficaz de ensino. Essa prática é fruto da própria formação acadêmica dos professores, cujo objetivo central é a apreensão de um conhecimento matemático formal e estático. Assim, a falta de acesso que o professor tem ao material apropriado existente, dificulta o uso da história da matemática na sala de aula.

4 - *Áreas*. O trabalho aponta as áreas de geometria e trigonometria como sendo do interesse principal dos professores pesquisados, embora há interesse também na história das outras áreas da matemática ensinada nos primeiro e segundo graus.

PÁRA DE CALCULAR E PENSA! ou A EXISTÊNCIA MATEMÁTICA NO ENSINO

Isabel Serra, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

"Pára de calcular e pensa" é apenas uma frase destinada a exprimir, duma forma um tudo nada teatral, um sentimento certamente comum a muitos professores. Ao longo deste texto tentarei caracterizar a atitude face à matemática, que pode desencadear tal sentimento. Essa atitude pode ser combatida de várias maneiras. Tratar a questão da existência na aula de matemática pode ser uma delas.

QUANDO A MATEMÁTICA É APENAS UM JOGO DE CARTAS

Uma grande parte dos alunos que passa pelo ensino secundário aprendem matemática como se fosse um jogo de cartas, em que ganhar significa chegar ao bom resultado pelo caminho mais curto. Para além de um eventual prazer em "jogar" (e ganhar) a única justificação que a maioria deles encontra para os cálculos que efectua é a da sua serventia para resolver problemas -- daí que seja esta a grande motivação para a matemática.

Também na universidade, para muitos dos estudantes que frequentam cursos de ciências, a matemática não é mais do que um conjunto de normas usadas em cálculos cujo sentido lhes escapa mas que lhes servem, esporadicamente, para usar noutras disciplinas mais concretas.

Não quero, de modo algum, rejeitar as virtudes e as vantagens de "viver" a matemática na sua componente mais "operativa". Aliás penso que é fundamental estimular e fomentar o prazer do cálculo e da obtenção de resultados, sobretudo naqueles alunos que, embora necessitando de uma prolongada formação matemática, não serão matemáticos de profissão. A capacidade operativa e a habilidade em manipular símbolos e operações são qualidades importantes num estudante de física, química ou economia.

É relativamente frequente que as crianças, quando começam a aprender matemática, manifestem uma certa capacidade operativa (tal como a habilidade em aprender jogos), que se detiora mais ou menos rapidamente com a idade. Sem que seja preciso citar estatísticas todos sabemos que as taxas de insucesso sobem à medida que se progride no estudo da matemática.

É um facto que, com a idade dos alunos, aumenta o número de objectos introduzidos e se complexificam as relações entre eles. Um estudante, nos anos terminais do secundário, já teve que lidar com vários quadros conceptuais e com objectos matemáticos de naturezas diferentes. Esta variedade traduz-se, evidentementemente, na utilização de um grande número de regras operativas.

Mas não me parece, no entanto, ser esse -- o grande número de técnicas operativas a aprender -- o escolho fundamental do ensino-aprendizagem da matemática. Claro que, frequentemente, aprender a calcular torna-se uma obsessão, de tal modo que constitui um bloqueio para a aprendizagem da matemática.

A "OBSESSÃO" PELO CÁLCULO

Há alunos que, perante um exercício, têm uma tal preocupação em começar imediatamente a resolver que não reflectem minimamente sobre o que estão a fazer. Outros que, bloqueados por se sentirem obrigados a tomar uma atitude activa, dizem logo que não sabem resolver, sem tentarem relacionar o que lhes é pedido com o que já sabem. Qualquer destes dois comportamentos, opostos do ponto de vista da acção, traduzem a mesma atitude face à matemática -- uma obsessão pelo cálculo.

No entanto, o mais fácil na matemática é, quanto a mim, aprender as regras operativas e as manipulações. É de facto tão simples como jogar às cartas e passível de provocar o mesmo prazer lúdico. Porque é que os mesmos alunos que são capazes de aprender jogos e estratégias complicadas têm dificuldades na matemática? Penso que em grande parte é porque, precisamente, para eles, a matemática é apenas um jogo de cartas. A maior parte dos alunos, mesmo com alguma aptidão para a matemática, não se preocupa com o quadro conceptual em que está a operar, quando resolve um exercício. É frequente menosprezarem as definições, as noções de base em que assenta o desenvolvimento de um determinado cálculo.

Precisamente o que é mais difícil, em matemática, é perceber a "teoria" -- conhecer os quadros conceptuais que se utilizam, distinguir as diferentes estruturas com que se trabalha, comprender as definições e a sua razão de ser. Isso exige uma maturidade matemática que a maior parte dos alunos não adquirem até ao momento em que entram universidade (mas que os professores universitários esperam que eles tenham).

Na aquisição dessa **maturidade matemática** a história pode desempenhar um papel fundamental. Para o pôr em evidência vou utilizar um exemplo que está ligado a várias revoluções (1) na história da matemática -- a evolução do conceito de número.

DOS NATURAIS AOS REAIS

A apresentação do conjunto dos Reais pela via axiomática talvez seja apropriada para um estudante universitário com alguma vocação para a matemática. No entanto, seria absurdo usar com crianças pequenas essa forma "fácil" de ensinar o que são os números e como se opera com eles. Não se encontrou ainda uma maneira melhor de efectivar essa aprendizagem, senão a de fazer reviver a cada criança, ao longo do ensino básico e secundário, as várias etapas da história da matemática que caracterizam a evolução do conceito de número. No entanto, ao longo desse processo, são-lhe quase sempre escamoteadas as dificuldades vividas pelos matemáticos das diferentes épocas.

No que diz respeito aos alunos, as dificuldades começam logo quando são introduzidos os racionais não inteiros. De facto, mesmo os que aprenderam bem a operar com os inteiros positivos, têm por vezes problemas com os fraccionários, problemas esses que se avolumam quando passam para os irracionais. Penso que, neste caso, o que os bloqueia já não são apenas as dificuldades operativas, mas também as questões conceptuais inerentes aos novos objectos introduzidos.

A fim de justificar esta afirmação é tentador fazer a comparação entre o que se passa em dois percursos -- o da história da matemática e o do ensino. Enquanto que o tratamento rigoroso dos racionais foi feito na Antiguidade, foi preciso esperar muitos séculos, após a sua descoberta, para resolver completamente a questão dos irracionais (2,3).

Pode considerar-se que a descoberta dos irracionais contituíu uma das revoluções da matemática (cf. 1). Como esperar que os alunos do ensino secundário compreendam e "absorvam" essa revolução sobretudo se não ouvirem falar dela?

Há historiadores da matemática que põem em causa a utilização desse conceito de revolução (cf. 1), mas nenhum contesta que foi muito importante o momento em que os matemáticos gregos da escola pitagórica se aperceberam de que os números irracionais eram inexprimíveis. A introdução desses números é também um momento importante da formação matemática. No entanto ele não é especialmente assinalado no ensino e a sua importância passa desapercebida. De facto, os alunos trabalham com os irracionais mas não os compreendem -- eles têm, até uma fase mais ou menos avançada da sua formação matemática uma noção pouco rigorosa de número.

A falta de rigor na definição de número não é muito grave em si mesma -- ela existiu durante séculos na história. A matemática, até ao fim da Idade Média, é dominada por uma noção "ingénua" de número, sendo-lhe «aplicadas as regras de cálculo dos inteiros e obtidos assim resultados exactos sem que se procurasse analisar a fundo as razões do sucesso desses métodos» (4).

Também no ensino secundário é de esperar que subsista até bastante tarde uma "noção ingénua de número". É natural que as extensões do conceito números sejam apresentadas como o resultado de equações algébricas -- foi aliás assim que eles fizeram a sua "aparição" na matemática e que eles se tornaram "familiares" aos matemáticos.

No entanto, essa forma de introduzir os números irracionais no ensino é origem de equívoco e confusão. Frequentemente o aluno não compreende que a extensão do conceito de número implica novas regras operatórias. É habitual que um aluno faça, por exemplo, $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ igual a $\sqrt{5}$ e que chegue à universidade ainda a cometer erros desse tipo. Ele está apenas a usar as regras que aprendeu para operar com os racionais -- não tomou verdadeiramente consciência da **existência** dos números reais.

Continuando a fazer um certo paralelismo entre o percurso histórico e o pedagógico podemos dizer que, para os matemáticos de outros tempos, a possibilidade de representar certos números irracionais usando símbolos ou equações permitiu adiar a questão da existência de tais números. Para um estudante, o facto de operar com novos objectos, da maneira a que estava habituado com os antigos, torna possível adiar para mais tarde o estudo da sua definição rigorosa. No entanto, para quem está a aprender, esse "adiar da definição" transforma-se em "ignorar a existência".

A falta de consciência de que um novo objecto matemático foi introduzido faz-se sentir mesmo quando se passa dos inteiros para os racionais. Esta constatação pode ser ilustrada com um exemplo simples: é frequente os estudante da faculdade afirmarem que a desigualdade $x^2 < x$ é impossível, mesmo quando já sabem operar bem com os racionais não inteiros.

NÚMEROS TRANSCENDENTES NEGATIVOS E IMAGINÁRIOS

Os irracionais transcendentes levantam dificuldades ainda maiores do ponto de vista conceptual, pois são ainda mais "estranhos" do que os irracionais algébricos. Em relação a estes últimos, criam-se hábitos de representação e de cálculo que fazem com que, embora com dificuldade, se comece a entender a sua "existência".

A aceitação dos irracionais algébricos é facilitada pelo facto desses números serem soluções de equações que, num percurso de aprendizagem matemática, se tornam rapidamente familiares. No que diz respeito aos transcendentes, o problema começa logo com o da sua representação -- não é possível escrevê-los senão "recorrendo ao infinito" (limites de sucessões ou de séries) ou então usando uma letra. Quando se trata de fazer cálculos numéricos com esses números eles são sustituídos por valores racionais aproximados. Essa maneira de resolver o problema dos irracionais, e que é a única possível nas situações em que é preciso calcular um valor numérico, vem confundir ainda mais a questão da existência de tais números.

Os irracionais *não existem de facto* para aqueles que trabalham apenas com cálculo numérico independente da geometria -- um físico, um químico ou um biólogo quando determinam um valor experimental obtêm sempre um número racional. Claro que, quando a obtenção desse resultado passa também por um cálculo, ele usa eventualmente um número irracional algébrico ou transcendente, (normalmente e ou π) que deve aproximar com o rigor necessário.

No que diz respeito aos números negativos, o principal problema que eles levantam são de natureza operativa -- a maior parte dos alunos não percebe porque é que se devem somar, e sobretudo multiplicar, esses números, usando regras cuja "razões" lhes escapam. Nesses casos valeria a pena fazer um esforço no sentido de pôr em evidência que o progresso na aprendizagem da matemàtica passa inevitavelmente por uma extensão do conceito de número o que implica a "necessidade" de regras.

Quanto às dificuldades com os números complexos, elas estão frequentemente ligadas ao problema da sua representação no plano, questão que não abordámos aqui e que merecia um tratamento específico.

Em todo o caso, as várias extensões do conceito de número devem causar bastante perplexidade aos que estudam matemática, tentando reflectir no sentido das coisas que, nesse percurso, são obrigados a aprender. Tratar a questão da existência é um procedimento que vai de encontro a essa necessidade de encontrar um sentido no que se aprende; e pode "conquistar" para a matemática alguns daqueles que, sendo reflexivos, pensam que a matemática é "árida" e "abstracta".

SUGESTÕES PARA ABORDAR NA PRÁTICA A QUESTÃO DA EXISTÊNCIA DOS REAIS

É habitual que nas escolas se festejem os equinócios e os solestícios, o "dia do não fumador" ou o "dia da árvore", mas nunca ninguém se lembrou de festejar a passagem a essa etapa "superior" no ensino da matemática -- a introdução dos números irracionais.

No entanto, esse acontecimento, do ponto de vista da aprendizagem matemática, é tão importante como o é, para a ecologia, a árvore e o que ela simboliza. Embora, é claro, seja diferente, o contexto e a dimensão do valor dos dois objectos -- a árvore e o número irracional -- deveria ser dado à apresentação deste último mais ênfase do que é habitual.

É evidente que não é possível ensinar a adolescentes a teoria de Weierstrass-- Cantor. Nesse sentido é impossível definir completamente os reais. Mas já é possível explicar-lhes porque é que a descoberta dos incomensuráveis, por um pitagórico, foi um "escândalo" e um revolução. Esse episódio tão importante da história das matemáticas quase nunca chega ao conhecimento dos estudantes e mesmo quando chega ele não é "encenado" e "dramatizado" de maneira a chamar a atenção para o que é fundamental - o universo matemático dos alunos vai mudar a partir dessa generalização do conceito de número que passa a incluir os irracionais.

Para além de uma certa dramatização do momento em que se passa dos racionais aos reais, existem outras formas de chamar a atenção dos alunos para a questão da existência. Algumas delas passam também pela história.

Por exemplo, é útil pôr em evidência que uma operação "proibida" pode conduzir à "definição" de um novo objecto matemático, comparando entre si o aparecimento dos números irracionais, negativos e imaginários a partir de operações que os originam. Este procedimento vai no sentido do que eu chamaria ensino "transversal" pois liga entre si temas aprendidos em várias fases da formação matemática.

(Aliás, no ensino da matemática, deviam ser previstos momentos para estudar as ligações, que não são óbvias para os estudantes, entre diversas áreas e temas aprendidos em tempos diferentes.)

Considero também importante abordar a questão da representação dos números irracionais para distinguir entre algébricos e transcendentes. Essa distinção pode ser exemplificada com a história da quadratura do círculo, uma das mais divulgadas (mas nem sempre compreendida) da história da matemática. Embora possa ser contada de forma simples e com recurso a conhecimentos comuns, a história da quadratura do círculo, que dura vários séculos, permite chamar a atenção para as diferenças entre algébricos e transcendentes.

Outra questão que já aqui foi referida -- a da utilização de números irracionais em cálculo numérico -- pode também abrir caminho para o conhecimento intuitivo dos números. Por exemplo, a apresentação das aproximações racionais de π, além de ter pertinência do ponto de vista histórico, pode alertar um aluno para a importância da problemática dos limites e da aproximação. Por sua vez, o estudo dos limites, que do ponto de vista histórico constituiu uma via para a definição rigorosa de número real, também desempenha o seu papel na aprendizagem do que é um número.

INTUIÇÃO MATEMÁTICA

Ao longo des texto tentei pôr em relevo o paralelismo de dois percursos -- o da história e o da aprendizagem matemática -- tendo em vista o aproveitamento das "lições da história". Foram referidos alguns momentos da história da matemática em que o recurso à intuição permitiu avançar na compreensão e utilização dos números. No entanto, devemos ter presente que «a aritmetização correcta da análise só foi possível quando os matemáticos compreenderam (...) que era necessário considerar os números reais como "estruturas abstractas" e não como grandezas definidas intuitivamente e herdadas da geometria de Euclides» (cf. 3).

É possível encontrar outros exemplos em que a invenção matemática se afirma "contra" a intuição (5) e é questionável o papel da intuição também na aprendizagem da matemática. Não cabe discutir aqui essa questão, demasiado complexa e fora do âmbito desta comunicação. No entanto, vejo vantagens em que se fomente um certo tipo de "intuição" -- que se pode desenvolver, por exemplo, quando se trabalha desde um nível elementar, questões como a da existência matemática.

De facto, certos aspectos da natureza do conhecimento matemático, faz com que se afastem dela alunos reflexivos e inteligentes. O "dogmatismo" e o excesso de formalismo podem dar da matemática a impressão de que ela é apenas constituída por um sistema de fórmulas, regras e sinais, em que as ideias estão ausentes. Em geral, só num estádio avançado de formação matemática, é que os estudantes se podem aperceber que a matemática se construíu sobretudo com ideias. Mas se, desde cedo, eles tomarem consciência da importância das ideias na matemática, não terão tempo de adquirir o hábito de manipular cálculos sem pensar. Passarão a proceder com os símbolos matemáticos como fazem com as palavras em literatura ou filosofia -- usá-las com sentidos determinados e em contextos definidos.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

(1) Dunmore, Caroline, Meta-level revolutions in mathematics, in Revolutions in Mathematics, Donald Gillies, Oxford University Press, 1992

Este livro é constituído por um conjunto de artigos de diversos autores (alguns deles já publicados em revistas) onde se discute a noção de revolução na matemática. O artigo citado trata, entre outros exemplos, o dos números irracionais, exemplo que é referido também por outros autores no mesmo livro.

(2) Dahan-Dalmenico, Amy e Peiffer, Jeanne, Une histoire des mathématiques, Editions du Seuil, 1986

(3) Boyer, The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, 1959.

Ao referir a evolução do conceito de número é possível indicar, obviamente, uma vasta bibliografia; no entanto, seleccionei estes dois livros, porque neles se dá grande importância às ideias e ao seu significado na história da matemática, embora sejam menos detalhados que muitos outros.

(4) Bourbaki, Nicholas, Éléments d'Histoire des Mathématiques, Paris, Hermann, 1969.

Para o tema em questão interessa sobretudo o capítulo sobre *l'evolution de l'algèbre* que permite estabelecer o paralelismo entre o percurso histórico e o da aprendizagem.

(5) Hans Hahn, The Crisis in Intuition, in The World of Mathematics, Vol III, Microsoft Press, Washington, 1988

Este artigo é útil para entender um certo tipo de abordagem da questão da intuição matemática, mas não pode, é claro esgotá-la. Em alguns dos artigos do livro citado em (1) é possível encontrar também várias referências à questão da intuição.

UM ESTUDO HISTÓRICO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA BRASILEIRA ENQUANTO CAMPO DE INVESTIGAÇÃO*

DARIO FIORENTINI (FE/UNICAMP) - Campinas, Brasil
E-mail: <FIORENT@TURING.UNICAMP.BR>

Este artigo apresenta um estudo que tem por objetivo inventariar e descrever historicamente a evolução das tentativas brasileiras de investigação em Educação Matemática.

Embora o conceito do que seja pesquisa em Educação Matemática tenha variado historicamente à medida que sua região de inquérito foi sendo construída e ampliada, adotamos para esse estudo a concepção "stricto sensu" de pesquisa: "indagação disciplinada"(Kilpatrick, 1992) ou "estudo sistemático e consistente de problemas"(Ponte, 1993) cujo relato da pesquisa apresenta, além dos pressupostos teóricos que sustentam a formulação e tratamento do problema/pergunta, a linha de inquérito ou os procedimentos metodológicos de coleta/análise dos dados (Fiorentini, 1994).

Consideramos aqui apenas aqueles estudos que têm, como foco principal de investigação, problemas ou indagações relativas ao ensino e à aprendizagem da matemática, à formação de professores, aos estudos histórico-filosóficos do ensino da matemática ou da própria matemática desde que relacionados ao ensino, aos materiais/recursos didáticos para o ensino da matemática, etc. Além disso, concebemos a Educação Matemática como uma área multifacetada e multidimensional que envolve não apenas a dimensão didático-metodológica, mas também, outras de caráter epistemológico, histórico-filosófico, sociológico, psicológico e teleológico-axiológico pertinentes à Matemática e à Educação.

Para descrever a trajetória da Educação Matemática brasileira enquanto campo profissional emergente de produção de saber, tentaremos responder a seguinte pergunta: *que aspectos, temas e dimensões da Educação Matemática têm sido, nos diferentes momentos, privilegiados pela pesquisa brasileira e de que forma e sob que condições ela tem sido realizada?*

O material que selecionamos para esse estudo histórico é constituído, antes de 1970, dos poucos estudos/pesquisas sistemáticos realizados na área e, após esse período - décadas de 70 e 80 - a produção científica realizada no âmbito dos cursos de pós-graduação do País, num total de 204 teses/dissertações de Mestrado ou Doutorado relativas à Educação Matemática[1]. Excluímos dessa análise, portanto, os ensaios, os

* Esta é uma versão reduzida e parcial da Tese de Doutorado de FIORENTINI (1994).

[1] 62,7% desses estudos foram produzidos em programas de Educação; 24,5% em programas específicos de Educação Matemática ou Científica; 8,8% em programas de Psicologia; 2,5% em Programas de Matemática; e 1,5% em outros programas de pós-graduação.

relatos de experiência, as reflexões, os pontos de vista, os subsídios didáticos produzidos, etc.

A partir dos resultados obtidos em FIORENTINI (1994), identificamos quatro fases de desenvolvimento da Educação Matemática brasileira enquanto campo profissional e área de investigação. Estas são: as fases da gestação (anterior à década de 70) e do nascimento (anos 70 e início dos 80) da Educação Matemática; a fase da constituição de uma comunidade de educadores matemáticos (década de 80) e fase do surgimento de uma comunidade científica na área (anos 90). É com base nessa periodização que passamos, a seguir, a descrever historicamente a Educação Matemática brasileira.

1) A **primeira fase** iria do início deste século ao final dos anos 60 e corresponderia à fase da **gestação da Educação Matemática enquanto campo profissional**.

Nesse período a Educação Matemática ainda não existia como campo diferenciado de estudo ou pesquisa. Raramente se olhava para o ensino da matemática com perspectivas diferentes daquelas voltadas diretamente às tarefas da prática de sala de aula e à produção de manuais e subsídios didáticos.

Os poucos estudos sistemáticos sobre fatos ou problemas concretos do ensino brasileiro, nesse período, parecem ter ficado a cargo de pedagogos e psicólogos e se restringiram ao ensino da aritmética e ao estudo de habilidades das crianças por meio de testes. Os matemáticos ou professores de matemática, apesar de não realizarem investigações em sentido estrito, passaram, nesse período, a se mobilizar e interessar pelos aspectos pedagógicos dessa disciplina. Os ensaios, os pontos de vista, as orientações didático-metodológicas e os relatos de experiência produzidos pelos últimos mostram que eles tinham como preocupação básica a pergunta "o quê e como ensinar?". As tentativas em responder à esta pergunta eram buscadas ou no estudo na própria lógica e/ou estrutura da matemática sistematizada (Movimento da Matemática Moderna) ou nas técnicas didáticas como, por exemplo, o estudo dirigido.

Esse quadro sugere que a Educação o Matemática enquanto campo diferenciado de estudo/pesquisa não possuía uma existência claramente configurada. Entretanto, o movimento "escolanovista" desencadeado no Brasil a partir da década de 20 e o "Movimento da Matemática Moderna (MMM)", juntamente com a realização dos Congressos Brasileiros de Ensino de Matemática, nas décadas de 50 e 60, seriam fundamentais para o surgimento posterior da Educação Matemática.

De fato, ligado ao movimento "escolanovista" vimos surgir os primeiros "educadores matemáticos", notadamente Euclides Roxo e Malba Tahan. Mais tarde, outros personagens surgiriam junto ao Movimento Modernista, especialmente, Osvaldo Sangiorgi.

Se caracterizarmos como pesquisa o que esses e outros professores de matemática realizaram em relação ao ensino da matemática, uma coisa parece não deixar dúvidas: esses estudos não se debruçavam sobre problemas ou fatos concretos da realidade educacional brasileira.

Entretanto, o envolvimento desses matemáticos ou professores de matemática e a concomitante formação de grupos de estudos, como o GEEM e o GRUEMA em São Paulo, o GEMPA em Porto Alegre, o GEMEG no então Estado da Guanabara, proporcionaram condições favoráveis para a emergência de um novo campo de estudo: a Educação Matemática.

Além disso, o surgimento das Licenciaturas em Matemática, na década de 30; dos Ginásios de Aplicação, nos anos 40; e da obrigatoriedade da disciplina de Prática de Ensino e do Estágio Supervisionado firmado nos anos 60 (Parecer 292/62) abririam um campo profissional para o surgimento nas universidades de especialistas em didática e metodologia do ensino da matemática.

2) A fase que, segundo nosso ponto de vista, marcaria o **nascimento da Educação Matemática enquanto campo profissional não só de ensino mas também de pesquisa**, vai do início da década de 70 aos primeiros anos da década de 80.

O início da década de 70 seria ainda marcado pelo MMM. Mas, nesse período, começamos a ter um contato mais estreito com alguns educadores matemáticos internacionais, notadamente, Lucienne Felix, Dienes, Papy e Gaulin que ministraram palestras e cursos em Porto Alegre, São Paulo e Rio de Janeiro.

Neste período, surgem também os cursos de Pós-Graduação "strito sensu" em educação e, junto deles, as primeiras tentativas de produção de pesquisa sistemática para além do ensino primário e da aritmética.

Até 1982, foram produzidas/defendidas 80 dissertações/teses de Mestrado e Doutorado, envolvendo basicamente quatro focos temáticos:

- estudo, desenvolvimento e testagem/validação de "novos" métodos/técnicas de ensino e de materiais instrucionais ou de propostas metodológicas "inovadoras" de ensino de matemática;
- estudos exploratórios/descritivos, geralmente do tipo “survey”, do currículo escolar e/ou do processo ensino/aprendizagem da matemática;
- estudos de natureza psicológica (com predominância da behaviorista) e cognitiva (com predominância da piagetina); e
- projetos/programas de formação do professor de matemática com ênfase no treinamento em serviço.

O problema mais comum perseguido por esses estudos dizia respeito ao fracasso escolar do ensino da matemática. Entretanto, se antes da década 70 o problema era percebido no âmbito do conteúdo escolar que deveria ser reformulado e atualizado, agora o problema estaria no professor, nos materiais de ensino e, sobretudo, no modo como ensinava. Daí o grande número de trabalhos, preocupados, de um lado, em descobrir, desenvolver/validar e fornecer ao sistema de ensino novos métodos/técnicas de ensino e materiais instrucionais; e de outro, treinar professores nessas inovações. Essa, inclusive, seria a tendência predominante das 28 dissertações sobre o ensino da matemática produzidas no Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do IMECC/UNICAMP em convênio com o MEC/PREMEN e OEA[2].

Esses métodos, todavia, não eram construídos/concebidos a partir do questionamento dos conteúdos matemáticos tanto nos seus aspectos conceituais e histótico-epistemológicos quanto nos seus aspectos sócio-políticos e cognitivos. A ausência de uma postura crítica e reflexiva sobre o ensino da matemática parecem ter sido a característica principal dos estudos da década de 70. Dois fatores, a nosso ver, foram determinantes dessa realidade: a repressão exercida pelo Regime Militar e, sobretudo, a influência da Pedagogia Tecnicista que era hegemônica nesse período.

Questões do tipo "por quê?", "para quê?" e "para quem?" ensinar matemática raramente apareciam como preocupação dos estudos da época. A pergunta mais comum era "como ensinar?". As respostas, salvo raras exceções, eram buscadas junto às tecnologias educacionais e às teorias psicológicas de aprendizagem.

Porém, contraditoriamente, foi justamente quando pouco se levou em consideração a epistemologia ou a especificidade do conteúdo matemático para se definir/experimentar estratégias de ensino, que a denominação "Educação Matemática" passou definitivamente a identificar essa área emergente de conhecimento. E isso deveu-se basicamente à forte liderança de Ubirantan D'Ambrósio que sempre usou essa denominação e ao Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática do IMECC/UNICAMP que recebeu forte influência norte-americana.

Fora do âmbito dos cursos de pós-graduação, encontramos, até início dos anos 80, salvo raras exceções, relatos de experiência relativos ao ensino ou ao treinamento/atualização de professores e propostas alternativas de ensino de matemática que, a rigor, não podem ser classificados de estudos investigativos.

Fazendo uma síntese dessa fase, podemos dizer que embora os programas tenham contribuído para a formação de lideranças regionais, a produção científica em Educação Matemática, nesse período, parece não ter passado de iniciativas individuais e isoladas que visavam, antes de tudo, a atender exigências acadêmicas para a titulação

---

[2] Este programa multinacional de mestrado foi coordenador por Ubiratan D'Ambrosio e vigorou de 1975 a 1984 tendo atendido a quatro turmas de alunos oriundos de toda a América Latina. O principal objetivo desse programa era desenvolver lideranças regionais na área de ensino de Ciências e Matemática.

de especialistas em didática ou metodologia do ensino de matemática, que a constituição de uma prática consistente de investigação para além dos cursos de pós-graduação. Ou seja, apesar da existência de especialistas formados na área, não havia ainda uma comunidade nacional organizada e articulada que tivesse como objeto de estudo ou de reflexão sistemática a Educação Matemática.

3) A **terceira fase** compreenderia o período de 1983 a 1990 e corresponde àquela que marca o **surgimento de uma comunidade nacional de educadores matemáticos**. No plano da pesquisa, representa o período da ampliação da região de inquérito da Educação Matemática e do aparecimento de algumas linhas temáticas de pesquisa com alguma continuidade e consistência teórico-metodológica.

Com efeito, foi nesse período, mais precisamente nos anos 87/88, que surgiu a Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Vários fatores contribuíram para o surgimento/organização dessa comunidade de educadores matemáticos. Um deles advém da contribuição da pós-graduação no que diz respeito à formação de especialistas em Educação Matemática. Um outro, como mostramos em FIORENTINI (1994b), foi o Projeto SPEC/PADCT que, ao longo da década de 80, financiou e estimulou, por todo o Brasil, a formação de grupos de estudo/pesquisa voltados para a melhoria do ensino de ciências e matemática.

No âmbito da pesquisa, foram produzidas entre 1983 e 1990 pouco mais de 120 dissertações/teses em 30 programas diferentes de pós-graduação "strito sensu" abrangendo 12 linhas temáticas:

- estudo e experimentação de novos métodos ou técnicas de ensino (resolução de problemas e modelagem matemática);
- currículo escolar;
- materiais didáticos e meios de ensino;
- prática docente e pedagógica (pesquisa em sala de aula);
- formação de professores de matemática (inicial e continuada);
- etnomatemática e educação de adultos;
- filosofia/história/epistemologia da matemática X ensino;
- concepções/significados/ideologia no ensino/aprendizagem;
- estudos histórico-analíticos do ensino da matemática;
- políticas oficiais sobre o ensino da matemática;
- psicologia e aprendizagem da matemática;
- cognição matemática no ensino e/ou em contextos sócio-culturais.

Em comparação ao período anterior, nesse, os estudos sobre o desenvolvimento e testagem/validação de "novos métodos/técnicas" de ensino perdem intensidade e deixam de focalizar o ensino individualizado, as tecnologias educacionais e os chamados "métodos ativos" e passam a estudar/experimentar a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática. Estas linhas estão presentes no Mestrado em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro.

Os estudos relacionados ao desenvolvimento/experimentação de propostas ou projetos curriculares continuam em alta só que sob uma nova abordagem. O "modelo da agricultura", amplamente utilizado na década de 70, vai aos poucos cedendo lugar ao "modelo da antropologia". Ou seja, ao invés do uso do método experimental e da abordagem quantitativa tenta-se, agora, utilizar o método etnográfico e a pesquisa participante ou a pesquisa-ação sob uma abordagem que LUDKE & ANDRÉ (1986) chamam de "qualitativa". E, sob essa abordagem, começam a aparecer outras vertentes epistemológicas de investigação que não a empírico-analítica: a fenomenológico-hermenêutica e a histórico-crítica ou dialética.

A presença dessas vertentes epistemológicas foi notada também e outras linhas temáticas como, por exemplo, o estudo de significados, percepções e concepções presentes no ensino da Matemática sob a abordagem fenomenológico-hermenêutica (UNESP-RC e PUC-SP) e os estudos histórico-filosóficos e epistemológicos sob a abordagem histórico-dialética (FE-UNICAMP, FE-UFPR e UFSCar).

Os estudos psicológicos e psico-cognitivos, relativos à aprendizagem da Matemática, continuaram fortemente presentes nesse período. Aqueles que procuram investigar a formação e o desenvolvimento de conceitos e habilidades/estratégias cognitivas diante de atividades ou programas especiais de ensino estão presentes em vários programas de pós-graduação em educação (FE-UNICAMP, UFSCar, FE-USP, PUC-SP e FE-UFRGS) e, sobretudo, no Mestrado em Psicologia Cognitiva da UFPE. Na UFPE, em Recife, surge e se consolida uma linha que adquiriu respeitabilidade internacional: aquela que investiga as relações entre contexto sócio-cultural e cognição matemática.

Além dessas, surgiram ou se destacaram também, nesse período, outras linhas como, por exemplo, a Etnomatemática (UNESP-RC), o currículo escolar de matemática (UFPR), a prática pedagógica e o cotidiano da sala de aula (UFSCar), os estudos analíticos e históricos do ensino da Matemática (FE-UNICAMP e UFPR), as políticas oficiais sobre o ensino da Matemática (UFPR, PUC-RS).

Com base nisso e pelo que vimos em FIORENTINI (1994), podemos dizer que, na década de 80, a região de inquérito da pesquisa em educação matemática ampliou-se sensivelmente, de sorte que outras dimensões passaram a ser investigadas como, por exemplo, a histórico-filosófica, a epistemológica, a antropológica, a lingüística, a sociológica e a teleológico-axiológica.

Em linhas gerais podemos dizer que de uma ausência de uma abordagem crítica (década de 70) passamos para um período (década de 80) de amplas discussões políticas, sociais e ideológicas. De uma preocupação centrada no "como ensinar?", passamos para outras: "por que ensinar Matemática?" e "para quem ensinar?".

Entretanto, se, de um lado, a pesquisa na década de 80 contribuiu para elucidar alguns determinantes sócio-culturais e políticos da educação matemática, de outro, pecou por priorizar aspectos muito gerais ou amplos do fenômeno educacional deixando praticamente de lado questões mais específicas e pontuais do processo ensino/aprendizagem da matemática.

Por que isso ocorreu? Seria decorrência do fato de os principais orientadores desses estudos não possuírem uma formação específica em Educação Matemática?

Mesmo que a resposta à essa pergunta seja afirmativa, não podemos deixar de reconhecer que a produção de conhecimentos na área manteve-se ativa ou intensa graças à colaboração de vários profissionais que, embora não possuíssem uma formação específica em Educação Matemática, dedicaram-se a essa área de conhecimento e ajudaram a construí-la.

Por essa razão, afirmamos que, nesse momento, embora houvesse uma comunidade de educadores matemáticos, com certa visão pedagógica crítica, não havia ainda uma comunidade de pesquisadores em Educação Matemática com linhas de pesquisa claramente definidas e com tradição de produção de conhecimentos fora dos cursos de pós-graduação. Assim, de uma maneira geral, podemos dizer que os estudos desse período, apresentam, de um lado, uma visão relativamente ampla, crítica e bem fundamentada pedagogicamente, mas, de outro, denota ausência de uma postura investigativa ou inquiridora capaz de formular e tratar um problema (ou pergunta) de maneira consistente, e embasada teórico-metodologicamente.

O papel da pesquisa, como diz Edgar Morin (1982), não consiste em produzir a verdade ou a certeza mas sim de interrogar, questionar, problematizar a realidade e, sobretudo, compreendê-la para melhor transformá-la.

Talvez exista, entre uma boa parcela dos educadores matemáticos brasileiros, certa confusão entre projeto de ensino e projeto de pesquisa. Entendemos que um projeto de ensino pode vir a ser um objeto de pesquisa mas, embora indissociáveis, são práticas distintas cada qual atendendo a uma finalidade específica.

4) Atualmente, podemos dizer que vivemos uma **quarta fase**. A fase da **emergência de uma comunidade científica de pesquisadores em Educação Matemática**.

De fato, a partir dos primeiros anos da década de 90 retornam ao País mais de duas dezenas de educadores matemáticos que concluíram doutoramento nos EUA, França, Inglaterra e Alemanha em diversas áreas de investigação: didática da matemática; história, filosofia, epistemologia e psicologia da educação matemática;

formação de professores; currículo escolar; resolução de problemas; ensino de geometria; álgebra e pensamento algébrico; etnomatemática etc.

Por outro lado, no Brasil, mais de quatro dezenas de educadores matemáticos doutoraram-se, nos últimos dez anos, em cursos de pós-graduação em educação[3]. Se incluirmos também, nessa relação, os doutores em Matemática, Educação e Psicologia que, a partir da década de 80, passaram a dedicar-se exclusivamente ao estudo da Educação Matemática, podemos seguramente afirmar que formamos, hoje no Brasil, uma comunidade com cerca de 100 doutores que fazem dessa área seu principal campo de atividade profissional de produção de saber. Isso, sem incluir um número ainda maior de não-doutores que, igualmente, dedicam-se exclusivamente à Educação Matemática.

Em correlação a isso, estamos também presenciando, no momento, um grande movimento nacional de formação/consolidação de grupos e linhas de pesquisas em Educação Matemática e do oferecimento de novos cursos de pós-graduação com áreas de concentração ou programas específicos em Educação Matemática. Por exemplo, surgiu em 1992, na USU/Rio, o segundo Programa brasileiro de Mestrado em Educação Matemática. Em 1993, A UNESP/Rio Claro passou a oferecer também o Doutoramento em Educação Matemática. e a PUC-SP(Instituto de Ciências Exatas) passou a oferecer Mestrado em Ensino de Matemática. E, em 1994, a FE-UNICAMP e a FEUSP abriram uma área de concentração em Educação Matemática em nível de Mestrado e Doutorado.

BIBLIOGRAFIA

1- FIORENTINI,D.(1994). **Rumos da pesquisa brasileira em Educação Matemática: o caso da produção científica em cursos de pós-graduação**. Campinas: FE-UNICAMP, Tese de Doutorado.

2- FIORENTINI,D.(1994b). A Educação Matemática enquanto campo profissional de produção de saber: a trajetória brasileira. Blumenau: **Dynamis**, 1(7): 7-17, Abr/Jun.

3- KILPATRICK,J.(1992). A history of research in mathematics education. In GROUWS,D.A (Ed.). **Handbook of Research on Mathematis Teaching and Learning**. (pp.3-38). New York: Macmillan.

4- LUDKE,M & ANDRÉ,M.(1986). **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo, EPU.

5- MORIN,E.(1982). **Science avec Conscience**. Paris. Fayard.

6- PONTE,J.P.da (1993). A Educação Matemática em Portugal: os primeiros passos de uma comunidade de investigação. **Quadrante**, Lisboa, 2(2): 95-125.

[3] Só no ano de 1995 foram concluídas/defendidas, nos cursos de pós-graduação do Brasil, 10 teses de Doutorado e 32 dissertações de Mestrado tendo como foco de investigação a Educação Matemática

PRÉSENTATION D'UN *ATELIER PHILO-MATH* (IREM DE POITIERS – FRANCE).

Jacqueline Guichard, IREM de Poitiers et Lycée E. Pérochon - Parthenay.

À l'IREM – Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – de l'Université de Poitiers (France), un groupe de travail interdisciplinaire tient trois ou quatre sessions par an, depuis septembre 1991. C'est l'*Atelier Philo-Math* qui comprend huit participants réguliers : sept enseignants de mathématiques – six de l'enseignement secondaire et un professeur d'Université –, avec comme animatrice une enseignante de philosophie de l'enseignement secondaire.

Le groupe s'est constitué initialement pour répondre à un besoin d'échanges : d'une part, des échanges sur des points d'histoire et d'épistémologie des mathématiques qui nous apparaissent importants pour avancer dans notre compréhension des mathématiques ; et d'autre part, en relation plus ou moins étroite, selon les questions, avec le premier point, des échanges sur la conception et l'analyse critique de travaux à proposer aux élèves, travaux qui utilisent les ressources de l'histoire et de la philosophie des mathématiques quand elles nous semblent permettre aux élèves de mieux comprendre ce qu'ils font en faisant des mathématiques. Les activités de ce groupe de travail interdisciplinaire débouchent sur des travaux dans les classes, sur des actions de formation continue à l'adresse des professeurs de mathématiques et de philosophie dans le cadre du plan annuel de formation de l'Académie de Poitiers, sur des interventions ponctuelles dans la formation initiale des enseignants de mathématiques à l'IUFM – Institut Universitaire de Formation des Maîtres – de l'Académie de Poitiers, et sur des publications pour les enseignants.

Études d'histoire et d'épistémologie des mathématiques

Le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par récurrence ont constitué un des premiers objets d'analyse retenus par le groupe à cause des résistances et des obstacles qu'ils suscitent chez les élèves. Pour nous éclairer sur les principes de ces raisonnements, les situations qui rendent nécessaire d'y avoir recours, nous avons tenté de remonter le cours de l'histoire.

• Pour **le raisonnement par l'absurde** que la tradition fait remonter à Zénon d'Elée (-V°s.) et à ses paradoxes contre la réalité du mouvement, nous sommes revenus à sa définition dans l'ouvrage du "père de la logique classique" : les *Premiers analytiques* d'Aristote (-IV°s.), ce qui nous a conduits à distinguer la démarche générale de réduction à l'impossible — ou démarche apagogique :

ἀπαγωγή εἰς ἀδυνατόν selon l'expression grecque — de ce qu'on appelle habituellement la preuve ou démonstration par l'absurde ; la démarche générale de réduction à l'impossible peut ne reposer que sur le principe de non-contradiction quand elle vise à rejeter une proposition parce que sa conséquence est reconnue comme fausse en elle-même ou contraire à la proposition prise comme point de départ (hypothèse) ; la preuve par l'absurde qui prouve la vérité d'une proposition par la fausseté d'une conséquence qui résulte de sa contradictoire, repose sur le principe du tiers-exclu, selon lequel deux contradictoires ne peuvent être fausses en même temps : si non-P est faux, alors P est nécessairement vrai. Or, si la reconnaissance de la nécessité logique du principe de non-contradiction ne pose pas de problème, il n'en est pas de même de celle du tiers exclu que les intuitionistes contestent, et qui ne semble pas évidente pour beaucoup d'élèves.

- La démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré qui se trouve au livre X, proposition CXVII des *Éléments* d'Euclide, nous a fourni un bon objet d'étude, puisqu'elle se présente comme ce que nous appelons une démonstration par l'absurde et qu'elle est construite sur un emboitement de réductions à l'impossible.

- Nous avons également étudié des textes de philosophes comportant des raisonnements par l'absurde et qui pourrait servir de matériaux pour un travail interdisciplinaire : Jean-Jacques Rousseau : *Du contrat social* (1762), *Discours sur l'origine et les fondements de l'inégalité entre les hommes* (1754), Auguste Comte : *Cours de philosophie positive* (1830), Henri Bergson : *La conscience et la vie* (1911).

• Pour **le raisonnement par récurrence**, nous avons confronté deux traditions mathématiques : celle qui soutient que Blaise Pascal est le créateur du raisonnement par récurrence ou principe d'induction dans son *Traité du triangle arithmétique* écrit vers 1654 : et celle qui soutient qu'il faut remonter plus loin et que Francisco Maurolico énonce et utilise le principe d'induction mathématique dans son traité d'arithmétique *Arithmeticorum libri duo* (1557) pour démontrer la proposition 15 : «La somme des n premiers nombres impairs est égale au $n^{\text{ème}}$ nombre carré.» Ce qui a suscité bien des débats dans le groupe, entre d'une part une démarche qui procède par l'instauration d'une règle qui permet de traiter d'une infinité de cas – celle de Pascal – et d'autre part une démarche qui traiterait d'une infinité de cas à partir d'une opération dont la répétition envisagée à l'infini est ineffectuable, et ce serait la démarche de Maurolico, supposant un "et ainsi de suite...".

- Nous sommes revenus à la distinction classique entre induction et déduction, à ce qui distingue l'induction mathématique de l'induction en physique ; à ce propos, nous avons relu le texte *Sur la nature du raisonnement mathématique* (1894), dans lequel Henri Poincaré explicite le caractère essentiel du raisonnement par récurrence comme contenant «*condensés pour ainsi dire en une formule unique*, *une infinité de syllogismes»* ; et nous nous sommes demandé si l'on pouvait vraiment faire du raisonnement par récurrence *«le raisonnement mathématique par excellence»* ...

• **Les probabilités** ont constitué un autre objet de réflexion, avec deux axes principaux.

- Un axe conceptuel et historique, avec le retour aux textes fondateurs : l'*Ars conjectandi* (1713) de Jacques Bernoulli, l'*Essai philosophique sur les probabilités* (1814) de Pierre Simon Laplace, et un début de constitution d'une base documentaire qui serve de référence commune au groupe ; avec également la lecture et le commentaire du livre de Ivar Eekland *Le calcul et l'imprévu.* (Paris 1984), et un exposé sur *Statistical independence in probability, analysis and number theory* de Marc Kach (1959). (*Carus Mathematical Monograph N° 12*).

- Une réflexion sur les obstacles rencontrés dans leur enseignement et sur les implications différentes de l'approche fréquentiste et de l'approche par la modélisation.

• **L'intuitionisme**, déjà croisé à propos du principe du raisonnement par l'absurde, a retenu l'attention du groupe, parce qu'il nous a semblé que, en renvoyant à une problématique du fondement des mathématiques, aux rapports des mathématiques et de la logique, il touchait à ce qui fait le sens même de l'activité mathématique.

- La lecture introductive de *L'intuitionisme* de Jean Largeault (Paris, 1992) nous a permis de resituer l'intuitionisme dans l'histoire des mathématiques et de penser les articulations et différences entre constructivisme et intuitionisme. Il nous a semblé bon de revenir au concepteur de l'intuitionisme mathématique, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, et nous avons décidé de tenter une lecture du discours d'ouverture qu'il a prononcé à l'Université d'Amsterdam le 14 octobre 1912, *Intuitionisme et formalisme*. Brouwer nomme sa conception «le néo-intuitionisme» pour la situer dans la lignée de l'héritage philosophique kantien.

- Une session a été réservée à une présentation de la philosophie de Kant et à la lecture des passages de la *Critique de la Raison Pure* (1781-87) où il définit l'activité mathématique comme une construction de concepts dans l'intuition pure. Kant voyait le fondement des mathématiques dans une activité de l'esprit construisant ses objets dans l'intuition pure de l'espace pour la géométrie, et dans celle du temps pour l'arithmétique. Le développement de géométries non euclidiennes a remis en question la première. Reste l'intuition du temps commme fondement a priori - i.e. antérieur à toute expérience et constituant sa condition de possibilité - de toute activité mathématique, parce qu'en elle sont donnés en même temps, dit Brouwer, *«le connecté et le séparé»* ou l'intuition du continu dans la *«présence originaire de la dyade pure»*.

• Une recherche historique sur la théorie des **Fractales** et une recherche documentaire sur ses applications ont fournit des éléments pour concevoir des travaux pour les élèves et une brochure pour les professeurs.

• Le programme de lecture que nous nous sommes donné au début de cette année universitaire 1995-96 qui s'achève, concernait les **rapports des mathématiques et du réel**. Ce qui nous a conduits à travailler :

- ***le problème du continu*** à partir du texte d'une conférence de Maurice Caveing au Séminaire de philosophie et mathématiques de l'École normale supérieure, rue d'Ulm, Paris : *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les Éléments d'Euclide et dans la Physique d'Aristote* (1982),
- ***le problème du rapport des mathématiques et de la physique*** avec deux autres conférences du même séminaire : *Mathématiques et réalité physique au 17ème siècle (de la vitesse de Galilée aux fluxions de Newton)* (1982) de François de Gandt, et *Physique et mathématiques* (1982) de Jean-Marc Lévy-Leblond.

• Le souci de constituer un dossier de travail qui permette aux élèves de mieux saisir **le sens du "dx" dans le calcul différentiel** nous a fourni matière à un second programme concernant le débat sur le fondement du calcul et la métaphysique des infiniment petits, avec des lectures comparatives d'extraits des XVIIème et XVIIIème siècles :

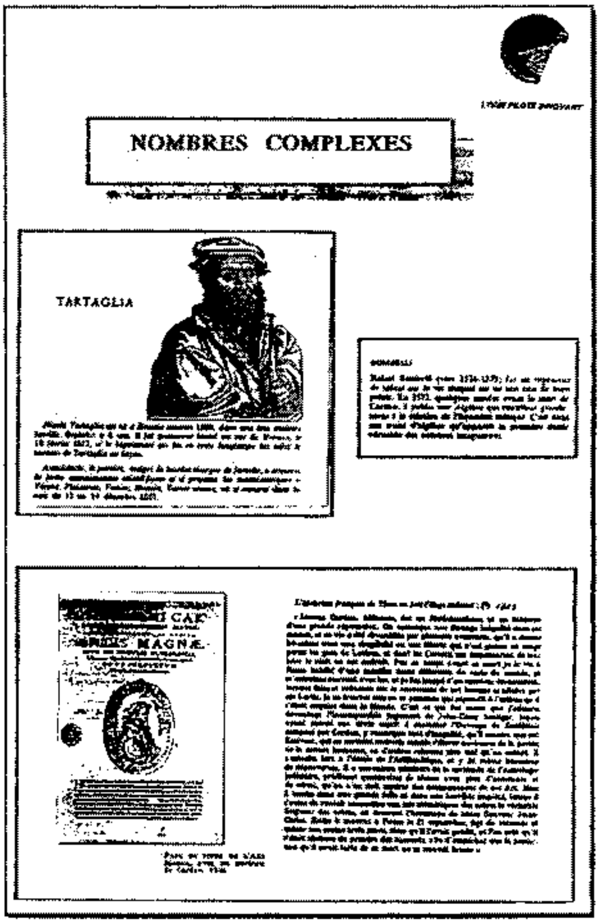
- du texte fondateur par lequel Leibniz livre aux lecteurs des *Acta Eruditorum* les règles de son calcul, sous le titre : *Nova methodus ..., Nouvelle méthode pour chercher les Maxima et les Minima, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les expressions fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée du calcul original qui s'y applique*, Octobre 1684 ;
- du texte de reconstruction par lequel, à la fin de sa vie, il défend la paternité de son calcul : *Histoire et origine du calcul différentiel*, (1714) ;
- du texte "didactique" du traité du Marquis de l'Hospital : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris 1696 ;
- des *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797) de Lazare Carnot ;
- de l'*Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances*, § XIV : *Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal* (1759) de d'Alembert.

• À la fin de chaque année, un document intitulé *Mémoria* réunit le compte rendu de chaque séance de travail, avec en annexe, les textes rédigés par des membres de l'Atelier, ainsi que les documents qui ont servi de référence et des indications bibliographiques.

Conception, analyse critique, mise en œuvre de travaux dans les classes

Leur principe commun est d'utiliser ce qui de l'histoire et de la philosophie des mathématiques peut aider les élèves à accéder à une meilleure compréhension du sens mathématique de ce que le programme exige qu'ils sachent faire, et de constituer un document de travail pour les élèves. Ces documents, qui constituent chacun un dossier de taille variable de quatre à douze pages, ne sont pas construits dans les sessions de l'Atelier, mais par celui qui en a eu l'initiative, et, en général, avec le collègue de philosophie de son établissement. Le travail dans l'Atelier est un travail de discussion des objectifs, des projets d'exercices, de leurs supports, et quand le dossier est constitué, un travail de lecture critique, d'explicitations, de suggestions de modifications avant la mise en œuvre dans la classe. Quand celle-ci a eu lieu, elle fait l'objet d'un bref compte rendu des points positifs, des difficultés rencontrées par les élèves..., et d'éventuelles retouches pour une future utilisation peuvent être proposées. Six dossiers ont déjà subi ce traitement.

• Un dossier pour les élèves de Terminale scientifique option mathématiques sur **les nombres complexes**, avec des références historiques qui recontextualisent pour l'élève le concept mathématique ; avec des textes historiques et réflexifs de mathématiciens et de philosophes qui donnent matière à des exercices qui incitent au recul et à la réflexion, en pointant ce qui a fait problème ou obstacle dans l'histoire du concept mathématique, et des éléments ou raisons de ces difficultés ; l'objectif étant de créer les conditions d'une décentration qui permette à l'élève d'avoir une conscience plus claire de ses propres problèmes, d'accéder à une pratique moins aveugle de l'activité mathématique, de sortir de la vision cloisonnée du savoir qu'induit le découpage de l'enseignement en disciplines disjointes.



• Un dossier pour les mêmes élèves sur le ***calcul intégral*** qui a pour objectif de faire prendre sens à "somme de dx" en donnant aux élèves la représentation de la dimension historique, par l'accès à la façon dont les théories mathématiques sont créées : quels sont les enjeux du calcul intégral ? Comment en est-on arrivé là ?

• Un dossier pour les mêmes élèves sur **les suites**. Il a son origine dans le constat de la difficulté qu'éprouvent les élèves à comprendre le principe, mais aussi l'intérêt du raisonnement par récurrence. Ils disent que «...ça ne sert à rien...» : ils ne voient pas la nécessité du raisonnement, ont le sentiment d'un tour de passe-passe, et par conséquent ne sont pas convaincus.

Les deux objectifs principaux de ce document de travail sont :

- pour le professeur de mathématiques, que les élèves perçoivent le principe du raisonnement par récurrence, son statut et sa fonctionnalité, c'est-à-dire qu'ils comprennent que la récurrence n'est pas un procédé de découverte, mais un procédé de démonstration, de validation, que son principe est un principe formel, de l'ordre de la règle, et que c'est le traitement d'une infinité de cas qui fait sa fonctionnalité : que si on reste dans le fini, le raisonnement par récurrence est sans intérêt :

- pour le professeur de philosophie, de faire approcher la différence entre la démarche du mathématicien et celle du physicien : le statut différent de l'induction ; et à partir de là, de faire analyser la différence entre induction et déduction.

• Un dossier pour les mêmes élèves sur **les géométries non euclidiennes**, dont l'objectif général est de faire réfléchir à l'axiomatique, en amenant les élèves à s'interroger :

- sur ce qui est démontrable et ce qui ne l'est pas,
- sur le statut de la vérité,
- sur la façon dont se bâtit une axiomatique,
- sur le statut de la règle par rapport à la nécessité.

Les travaux sont structurés en trois séquences décalées dans le temps. La première, est une phase de sensibilisation, centrée sur le rôle des principes chez Euclide, pour faire découvrir l'apport euclidien et le problème du postulat des parallèles, et prévoit un temps d'apport magistral sur Lobatchevsky. La seconde est une phase de confrontation aux géométries non euclidiennes, avec des documents et des questions, pour faire que les élèves s'impliquent et surmontent l'impression d'étrangeté. La troisième a pour objectif de montrer comment un modèle non euclidien peut trouver une application en physique. Ce qui permet de poser le problème du statut des théories physiques, et constitue un moyen de faire prendre du recul par rapport à un réalisme naïf, qui est souvent la conception spontanée des élèves.

• Un document de travail sur **les probabilités : *«Hasard et probabilité»*** conçu pour tout élève de Terminale à partir de la réflexion sur les obstacles rencontrés dans l'enseignement. «Comment peut-on mesurer quelque chose d'incertain ?» est une question qui constitue ou comporte un obstacle pour les élèves. L'objectif est de les aider à passer de l'idée que «le hasard existe» à l'enjeu des probabilités : analyser, quantifier le hasard.

• Deux dossiers sur **les fractales** avec comme objectifs généraux de faire travailler les élèves sur ce qu'est l'activité mathématique, à partir de textes de Benoît Mandelbrot parlant de sa façon de voir l'algèbre, décrivant l'origine de ses premières images de fractales..., et de leur donner par là un accès à la recherche en mathématiques ; de leur fournir des moyens de faire le pont entre les émissions télévisées de vulgarisation scientifique et le travail en classe. Un tel travail constitue un moment dans la réflexion sur le statut des objets mathématiques, sur le problème des rapports mathématiques-réalité, sur le statut de la vérité mathématique. Plus spécifiquement, c'est une possibilité de travailler sur l'homothétie, sur les paradoxes, sur le problème de la modélisation, de l'adéquation entre le modèle et la réalité, les fractales permettant de modéliser beaucoup d'aspects du réel.

- Document de travail 1. : ***«Les Fractales»***, dossier pour les élèves de Terminales scientifiques, constitué de deux parties : une partie "découverte" fait repérer par des constructions et des calculs où les problèmes se posent et quelles sont les propriétés étranges du "flocon de neige" de Von Koch, du "Tapis de Sierpinski"... ; la seconde travaille sur la notion de dimension.

- Document de travail 2. : ***«La géométrie classique suffit-elle à modéliser la nature ? »***, conçu pour tout élève de Terminale. Son idée directrice : est-ce que la géométrie euclidienne suffit pour décrire la nature ? Il est structuré en trois temps : exercices sur des objets qui se révèlent être des "monstres", travail sur l'algorithme de construction, puis sur des modélisations. Le document est fait pour que les élèves tombent sur des fractales peu ordinaires pour eux, qui ont plutôt rencontré les ensembles de Julia, de Mandelbrot, et qu'ils arrivent à concevoir que la fractale, c'est l'objet limite de ce qui est figuré dans la belle image.

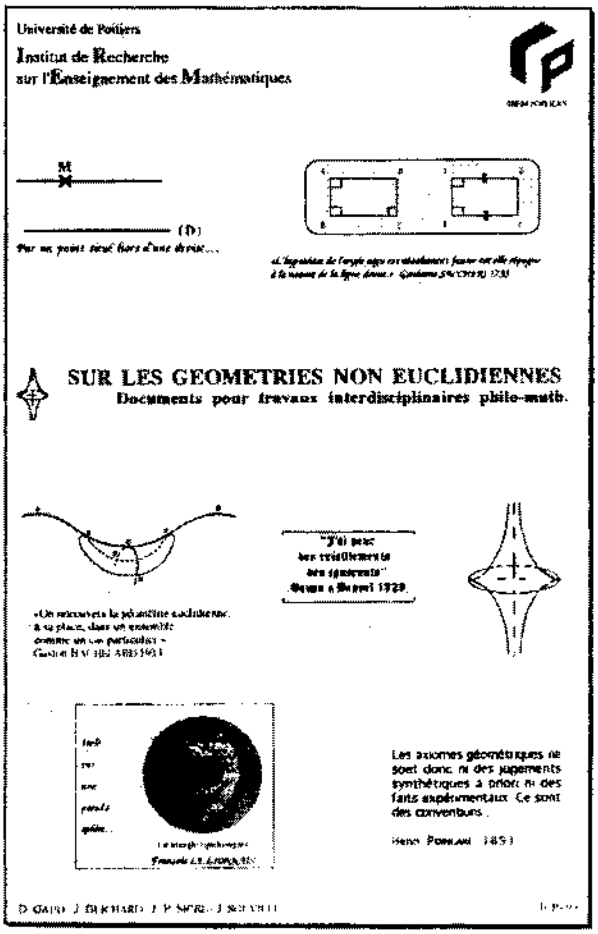
• Enfin, un nouveau dossier : $\boxed{\frac{dy}{dx} \overset{?}{=} f'(x)}$ ***Mais qu'est-ce qu'un nombre ?*** est en phase "d'expérimentation-modifications". Son objectif est de redonner du sens à un calcul qui pour les élèves est totalement formel, en les faisant réfléchir sur le rapport entre $\frac{dy}{dx}$ et $f'(x)$, la première notation étant en général utilisée par les physiciens, la seconde, privilégiée par les mathématiciens.

Des actions de formation

• Organisation de **stages académiques** sur le statut de la démonstration, sur les géométries non euclidiennes, sur les fractales, sur le sens des mathématiques, sur l'aide à la conception d'activités interdisciplinaires "math-philo" propres à favoriser l'accès des élèves au sens des concepts et des problèmes. Ces stages s'adressent aux professeurs de mathématiques et de philosophie dans le cadre du plan annuel de formation de l'Académie de Poitiers.

• Interventions ponctuelles dans la **formation initiale** des enseignants de mathématiques à l'IUFM – Institut Universitaire de Formation des Maîtres – de l'Académie de Poitiers, dans le cadre d'un module d'histoire des mathématiques et à la demande des formateurs, ou des enseignants en formation, sur l'histoire des géométries non euclidiennes, des fractales... .

Des publications pour les enseignants



LES FRACTALES. Réflexions et travaux pour la classe.

Brochure de 105 pages. I.R.E.M. de Poitiers. Janvier 1996.

STATUT ET FONCTIONS DE LA DÉMONSTRATION EN MATHÉMATIQUES : quelques repères.

Brochure de 66 pages. I.R.E.M. de Poitiers. Juin 1993.

SUR LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES. Documents pour travaux interdisciplinaires philo-math.

Brochure de 85 pages. I.R.E.M. de Poitiers. Juin 1995.

TRAVAUX INTERDISCIPLINAIRES : • Mathématiques et Philosophie • Sciences Physiques et Philosophie EN CLASSES TERMINALES SCIENTIFIQUES. I.R.E.M. de Poitiers - LPI (Lycée Pilote Innovant du Futuroscope).

Brochure de 183 pages. I.R.E.M. de Poitiers. Septembre 1993.

ANOMALIES AND THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL UNDERSTANDING

Janet Heine Barnett, University of Southern Colorado

A number of historians of mathematics have identified anomalies as one of the major forces shaping the development of mathematics. Wilder [1980], for example, classifies paradoxes and inconsistencies as components of 'hereditary stress', a force which he puts forward as "the most important force exerted from the mathematical community upon the individual mathematical mind". Several of the famous "Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics" identified by Crowe [1975] also point to the role of anomalies in both delaying and advancing mathematical developments[1]. In his critique of Crowe's laws, Mehrtens [1976] remarks not only on the role played by anomalies in the history of mathematics, but also proposes the concept of an 'anomaly' as a valuable tool for the historian in assessing historical developments.

If one accepts the Piagetian belief that there are parallels between the way individuals construct mathematical knowledge and the way humanity constructed such knowledge historically, then the concept of an 'anomaly' might also be used as a tool to draw implications from the history of mathematics for mathematics pedagogy. This paper looks at three specific instances in the historical development of mathematics in which the resolution of anomalies played a central role in an effort to elaborate on this notion. The examples we will consider (incommensurable magnitudes, non-Euclidean geometries, and Cantor's infinite sets) have been chosen specifically to draw attention to the role of intuition and communication in generating and resolving anomalies, a process which often leads to the introduction of new concepts, the modification of existing concepts, and/or changes in accepted standards of rigor. We will conclude by commenting on the connection between the historical examples and principles underlying current learning theory in mathematics education.

INCOMMENSURABLES

The details of the ancient Greek discovery of incommensurable magnitudes are shrouded in the religious mysticism of the Pythagoreans, as well as the lack of primary source material concerning pre-Euclidean Greek mathematics. What is known concerning this discovery is that somewhere between 450 B.C.E. and 375 B.C.E., someone discovered the existence of two magnitudes which could not be measured by a common unit. One hypothesis concerning the discovery is that our standard proof that $\sqrt{2}$ is irrational was discovered in the context of finding a common measure for the side and diagonal of a unit square[2]. A second possibility put forward by von Fritz [1945] involves the incommensurability of the side and diagonal of the regular pentagon, a figure associated with the pentagram which served as a recognition symbol for the Pythagoreans[3].

However this discovery was made, it must certainly have shaken the foundations of the Pythagorean philosophy that "All is number". The severity of the shock is suggested by the story of Hipassus being drowned at sea for revealing the discovery. This Pythagorean belief in number as the substance of the physical universe grew out of the observation that whole numbers (and ratios thereof) can be used to describe phenomena as diverse as music, astronomy and geometry. This intuition that everything can be counted, and hence assigned a number, is easily applied to lengths simply by designating a unit of measure which can be duplicated to cover the given length. For two or more magnitudes, the intuition that one can find some (possibly) small unit that can be used as a common measure is very reasonable based on experiences with physical measurements. In fact, the need to prove the existence of such a common measure would not have occurred to the Babylonians and Egyptian predecessors of the Greeks, in part because they were more empirically oriented than the Greeks, but also because of the strength of the intuition in question.

The requirement of a proof did arise in Greece, however, although the standard account of the incommensurable discovery as a 'crisis' for mathematics is as unverifiable as the Hipassus story. Given the role played by commensurability in geometrical proofs, however, the discovery could certainly not be ignored by mathematicians indefinitely. In this instance, a resolution of the 'crisis' was achieved by Eudoxus (408-355 B.C.E.) who developed a theory of proportions for continuous *magnitudes* as an alternative to the existing theory of proportional *numbers*. As presented by Euclid in Book V of the *Elements*, the Eudoxian Theory of Proportion provided the necessary logical foundation for the existing theory of similar rectilinear figures, as well as a basis for the limiting process of the Method of Exhaustion used to establish area and volume formulae.

It is interesting to note, however, that the Eudoxian theory did not replace the Pythagorean theory of proportional numbers, which appears in Book VII of Euclid. Thus, the resolution of the incommensurable 'crisis' led not to a more general conception of number, but rather to a strictly enforced distinction between continuous magnitudes and discrete number. This distinction is at least partially due to the authority of Aristotle, who was the first to define it. It is also an indication of the reluctance of the mathematical community to cast off a theory or concept which has served it well. In this instance, the techniques for working with ratios of numbers were considerably less cumbersome than those for working with ratios of magnitudes. In fact, the two techniques are interchangeable for commensurable magnitudes, as established by Euclid in Book X. It is interesting to speculate whether Aristotle's authority would have been sufficient to maintain the distinction had the two theories been incompatible, forcing mathematicians to choose between the two.

Another interesting feature of the Eudoxian resolution of the incommensurable anomaly is the ensuing period of mathematical development, which appears to have been intensely active. Again, one can only speculate as to the reasons for this activity. One explanation is that the foundational concerns surrounding the discovery led to reluctance on the part of mathematicians to work on new problems prior to the resolution of the difficulty. Alternatively, it may have been that mathematical efforts were so completely concentrated on resolving the anomaly that other problems were not pursued. Or it may simply have been that the resolution of so great a problem brought renewed interest in mathematics by new generations of scholars. Judging by more recent historical instances in which a new theory has been introduced, the latter explanation is likely. As seen with the development of analytic geometry and calculus in the 17th century, or Cohen's method of forcing in set theory in the 1960's, the introduction of new techniques opens the possibility of solving wider sets of problems which attract the attention of new and old mathematicians alike.

NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

The anomaly which precipitated the development of non-Euclidean geometries was not a foundational 'crisis' of the kind associated with the discovery of incommensurables. The truth of the parallel postulate was never questioned by Euclid's contemporaries, nor by the mathematicians of the next 20 centuries who investigated it. Rather, efforts to derive the parallel postulate as a proposition, or at least to re-state it in a more self-evident form, were based on a more subtle dissatisfaction with its role in the formal axiomatic system of the *Elements*. First, there is the fact that Euclid's parallel postulate is strikingly complicated, especially in contrast to the simplicity and self-evident characteristic of the first four postulates. Additionally, the parallel postulate is not employed in a proof until Proposition I-29, and is the converse of Proposition I-17. These facts suggest that the parallel postulate might itself be a theorem, and not a postulate.

Although attention to this anomaly began as early as the first century B.C.E., the first significant breakthrough in the development of a non-Euclidean geometry was made by Saccheri (1667-1733) in the eighteenth century. Assuming the negation of the postulate, Saccheri sought a contradiction which would then establish the truth of the parallel postulate by *reductio ad absurdum*. The result of this investigation was a series of theorems in non-Euclidean geometry which Saccheri rejected as "repugnant to the nature of the straight line". Efforts of Lambert (1728-1777) and Legendre (1752-1853) to improve on Saccheri's work ended with a similar appeal to intuition about the correctness of Euclid's version of geometry.

The next major step taken towards the eventual acceptance of non-Euclidean geometry as simply paradoxical and not fallacious was the publication by Lobachevsky (1793-1856) and Bolyai (1775-1856) of their investigations of the theory of the parallels. These manuscripts appeared nearly simultaneously around 1830, and publicly acknowledged the "curious geometry"[4] as a logically rigorous alternative to Euclidean geometry for the first time. Despite the obvious break with previously accepted intuition, the work did not at first draw wide attention from the general mathematical community. This may have been in part due to the fact that both men were isolated geographically and by language from the mainstream mathematical community, a fact which in turn may have contributed to their ability to break with the traditional view of Euclidean geometry as the one true geometry.

The difficulty of breaking with this intuition is attested to by Gauss' (1777-1855) reluctance to publish his development of a non-Euclidean geometry derived by following Saccheri's method to its logical conclusions. Although the conclusions were logical, they were not intuitively correct, leading Gauss to expect controversy upon publication. The truth of Euclidean geometry had been accepted implicitly for centuries, due both to the weight of Euclid's authority and to the fact that this geometry accords with our experience of the physical world. In the 18th century, Kant's doctrine of space as a pure intuition independent of empirical experience further emphasized Euclid's geometry as the one "true" geometry. Perhaps more surprising than the long delay in the recognition of a non-Euclidean geometry is the fact that this recognition occurred at all.

Two developments of 19th century aided the eventual acceptance of non-Euclidean geometry as legitimate. The first of these was the development of new algebras possessing some, but not all, of the properties of traditional algebra. These new algebras included a non-commutative matrix algebra which grew out of the theory of linear equations, Boole's algebra of symbolic logic with its dual distributive properties, Hamilton's non-commutative quarternions, and the subsequent development of a vector algebra with two multiplicative operations. The acceptance of these various algebras shows that mathematics was increasingly being viewed as the study of structures independent of physical reality and traditional "rules".

The second 19th century development which aided the acceptance of non-Euclidean geometry was Riemann's development of a general system of geometry in 1868, which in turn led to the creation of models of non-Euclidean geometry. These models enhanced the acceptability of the new geometries by providing a concrete interpretation for them. Additionally, because the models use a part of Euclidean space to interpret non-Euclidean space, any inconsistency within the non-Euclidean space corresponded to an inconsistency in the "accepted" Euclidean model. What began then as an effort to remove what Saccheri and others viewed as a "blemish" in Euclid's work thereby ended with the parallel postulate being vindicated as the essential assumption which distinguishes Euclid's geometry from other, equally consistent geometries he did not even know existed.

INFINITY

The concept of infinity is another enigma which has intrigued scholars since the time of the Greeks. Like the notion of an irrational number, infinity was barred from Greek mathematics, except in the sense of a potential infinity. It is widely believed that the Greek *horreur de l'infini* was directly related to Zeno's famous paradoxes. These paradoxes show that the assumption that space and time are infinitely divisible, as well as the assumption that space and time are composed of infinitely many indivisible atoms, will lead to contradictions concerning motion. Hypotheses concerning Zeno's motivation in putting forward these arguments range from the desire to confound the sophists at their own rhetorical games to a more scholarly desire to add credence to his teacher Parmenide's tenet that "All change is illusory". Whatever his original objective, Zeno did succeed in drawing attention to problems concerning the infinitely large and small for centuries.

Among those who took up the task of refuting Zeno's paradoxes was Aristotle, who rejected the notion of the "actually infinite" in both a physical and mathematical sense as a result[5]. Aristotle's banishment of the actually infinite remained intact for centuries. Those occasional mathematicians who did entertain the idea of an actually completed infinite set firmly rejected it as contradictory. Galileo, for instance, established that there is a one-to-one correspondence between the set of natural numbers and the set of perfect squares, implicitly assuming the completion of both sets. Rather than accept the notion that these two sets are the same size, however, Galileo rejected the notion that cardinality can be applied to infinite sets, asserting that "the attributes of 'equal', 'greater', and 'less' are not applicable to infinite, but only to finite quantities".[6]

The mathematician responsible for the critical breakthrough concerning infinity was Georg Cantor (1845-1918). Cantor's main contribution was the principle that every set, whether finite or infinite, contains some definite number of elements. According to this perspective, earlier confusion about the actually infinite stemmed from the belief that infinite sets should possess the same properties as finite sets. In essence, previous mathematicians had confused the concept of a 'set' with their intuition of 'finite set'. In fact, an infinite set has the peculiar property that its elements can be placed in one-to-one correspondence with the elements of some of its proper subsets, a property which does not hold for any finite set. Rather than reject the notion of infinite sets due to this peculiarity, Cantor defines the concept of 'cardinality' using the idea of one-to-one correspondences, the very notion which led to earlier rejections of infinite sets.

The criticism which Cantor's work attracted from some of his colleagues is well known. In particular, objections were raised concerning the non-constructive nature of many of his proofs. Further concerns about his work arose when paradoxes involving the intuitive concept of 'set' appeared, raising questions concerning the logical consistency of the theory[7]. Again, the question of whether these paradoxes presented a real 'crisis' for the foundations of mathematics is debatable. For the 'working' mathematician of that time and today, the key issue appears to be the tremendous value that set theory has as a tool in analysis and other areas of mathematics. Rather than lose the value and power of set theory by rejecting it on the basis of the paradoxes, the majority of mathematicians choose to accept the formal axiomatization of set theory which developed in response to these paradoxes.

PEDAGOGICAL IMPLICATIONS

A first observation concerning these historical examples is that the attempts of mathematicians to resolve anomalies in their work often end with new intuitions which render the "paradoxes" little more than curiosities for the uninitiated. Although we find the topics interesting, today's mathematicians are not concerned about possible contradictions in non-Euclidean geometry or in set theory. Previous generations, however, considered these ideas completely inconsistent. As suggested in the discussion above, this current acceptance is in large part due to the fact that our intuitions about the concepts in question differ from the intuitions of past generations. We adopt here the definition of *intuition* as "an accumulation of attitudes based on experience" given by Wilder [1967], a definition which captures the two essential features of intuition with implications for mathematics. First, it is the *intuitions* of mathematicians which lead them to their definitions and theorems, not vice versa.

Cantor did not begin with definition of a transfinite numbers, but was led to it at the end of extensive studies[8]. These studies constitute the second key feature of intuition: it is based on *experience*, and not derived from logic. The obvious implication for the classroom is that students gain intuition, and thereby understanding, through the acquisition of experience. The teacher's role is to structure these experiences in order to stimulate the desired intuition. Once developed, the teacher may direct the students' intuition towards the appropriate definitions and theorems.

A second historical observation with pedagogical implications is that the presence of anomalies in mathematics seems to *stimulate* the growth of mathematics, rather than prohibit it. This growth may occur in connection with efforts to develop an acceptable resolution of the anomaly, as was the case of non-Euclidean geometry, or it may follow the successful resolution, as was noted in the case of incommensurables. In each case, the eventual resolution of the perceived anomaly involved reconstruction of the concepts themselves. These modifications are often accompanied by changes in accepted standards of rigor, as well. In fact, it has been hypothesized that the need to resolve the contradictory mathematical knowledge of their Egyptian and Babylonian predecessors motivated the Greeks to turn towards deductive logic as a basis for mathematics.

The pedagogical implication of this observation is that concept formation may be enhanced by the presence of anomalies in the individual's understanding. This idea is, in fact, consistent with Piagetian learning theory which hypothesizes that learning takes place when cognitive schema are transformed through the processes of assimilation and accomodation. Due to the self-perpetuating nature of cognitive schema, the individual will resist these modifications, much as mathematicians resisted changes in their shared schema involving number, geometry and infinity. Especially in the case of accomodation, which requires significant restructuring of the cognitive schema, the individual's resistance is so strong that an encounter with an anomaly is considered necessary to motivate the change. Some educational research suggests that cognitive disequilibration may benefit learning even in situations requiring only assimilation. In their research on the formation of rational number concepts, for instance, Behr et al [1983] found that a 'good' manipulative aid is one that actually causes some confusion.

Thus, although the creation of confusion seems contrary to the role of a teacher, both history and psychology suggest that students can benefit by encounters with an anomaly. Relating this again to the need for proper experiences in building 'correct' intuition, this means that the student can benefit tremendously by the right anomaly at the right time. The difficulty for the teacher lies in judging what is 'right' in each case. Historical instances confirm that good math can be done even on the basis of 'false' intuitions, as is the case with the Greek theory of similarity which was assumed commensurable magnitudes until the great 'crisis'. Correcting students who hold false intuitions is, therefore, not the main issue. In fact, such correction merely puts students in possession of new facts without any supporting intuition or understanding. Rather, the teacher's concern should be to psychologically prepare students to accept the new intuitions to which their experiences should lead them.

Using history as a guide in this matter, we see that preparing an individual to accept new intuitions can be a lengthy process. Within this process, anomalies may play several important role. First, anomalies can define relevant questions of study, as was case with the development of non-Euclidean geometry. Sierpinksa [1994] remarks that a discrepancy in one's understanding is actually necessary in order to produce questions which are both sensible and interesting to the student. Such questions are one of three psychological conditions which she identifies as necessary for understanding. Relative to the other two psychological conditions Sierpinska identifies, 'attention' and 'intention', an unresolved anomaly may also be of value by maintaining student attention to the relevant questions and by providing students with the motivation to understand and resolve these questions. The existence of anomalies can also enhance students' awareness of the need for proof in mathematics.

Our final remark on the relation of the historical examples to pedagogy concerns the social conditions of learning. Applications of constructivist learning theories to the classroom often emphasize the role of these conditions, and especially the need for communication with peers to build individual understanding. In this regard, the case of Bôlyai and Lobachevsky raises an interesting question. Although both men were aware of the mainstream mathematical tradition and worked within it, it was suggested earlier that their relative isolation from this mainstream helped them to break from the traditional view of Euclidean geometry as absolute truth. Regardless of the degree to which this suggestion is true, it does draw attention to the role of the individual in developing mathematical knowledge. Cantor's contributions to set theory highlight this same issue. Without *individual* reflections on and interpretations of shared problems and intuitions, the new developments would not have occurred. For the classroom, this suggests that cooperative work and discussion will not suffice to build individual understanding, a suggestion which is being confirmed by educational research[9]. For the teacher, this suggests that providing effective opportunities for both individual reflection and group discussions is essential to developing individual understanding.

We have suggested a number of ways in which anomalies can be used to develop student understanding. We close with one final suggestion as to how teachers can draw on the role anomalies played in shaping the historical development of mathematics. Namely, the historical stories themselves show students that mathematicians have always struggled to resolve problems, and that confusion is an inherent part of the process. Beyond that, sharing stories of past paradoxes and puzzles is both interesting and fun, for students and teachers alike.

BIBLIOGRAPHY

Behr, M., Lesh, R., Post, T. and Silver, E. 1983. Rational-Number Concepts. *Acquisition of Mathematics and Processes*. New York: Academic Press. 91 - 126.

Crowe, M. 1975. Ten 'laws' concerning patterns of change in the history of mathematics. *Historia Mathematica* (**2**). 161-166.

Jones, P. 1956. Irrationals or Incommensurables I: Their Discovery and a "Logical Scandal". *Mathematics Teacher* (**49**). 123-127.

Jones, P. 1956. Irrationals or Incommensurables III: The Greek Solution. *Mathematics Teacher* (**49**). 282-285.

Katz, V. *A History of Mathematics: An Introduction.* New York: Harper Collins.

Mehrtens, H. 1976. T. S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the 'new historiography' of mathematics. *Historia Mathematica* (**3**). 197-320.

Sierpinska, A. 1994. *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R.. 1987. *The Psychology of Learning Mathematics.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

von Fritz, K. 1945. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapantum. *Annals of Mathematics* (**46**). 242-264.

Wilder, R. 1967. The Role of Intuition. *Science* (**156**). 605-610.

Wilder, R. 1980. *Mathematics as a Cultural System.* Oxford: Pergamon Press.

---

[1] This is especially seen in laws 1, 2, 3 and 9, reproduced below:

(1) New mathematical concepts frequently come forth not at the bidding, but against the efforts, at times strenuous efforts, of the mathematicians who create them.

(2) Many new mathematical concepts, even though logically acceptable, meet forceful resistance after their appearance and achieve acceptance only after an extended period of time.

(3) Although the demands of logic, consistency, and rigour have at times urged the rejection of some concepts now accepted, the usefulness of these concepts has repeatedly forced mathematicians to accept and to tolerate them, even in the face of strong feelings of discomfort.

(9) Mathematicians have always possessed a vast repertoire of techniques for dissolving or avoiding the problems produced by apparent logical contradictions, and thereby preventing crises in mathematics.

[2] Evidence to support this view is found in Aristotle's comment that "if the side and diagonal are assumed commensurable, then odd numbers equal even numbers".

[3] See also Jones [1956] for details of this argument.

[4] Gauss refers to his work by this name in a letter to Taurinus dated November 8, 1824. He goes on to say: "The theorems of this geometry appear to be paradoxical, and, to the uninitiated, absurd, but calm, steady reflection reveals that they contain nothing at all impossible".

[5] It is also conjectured that his efforts to refute Zeno's paradoxes led to Aristotle's distinction between "number" and "magnitude" discussed earlier in this paper.

[6] *Two New Sciences*, Galileo, 1638.

[7] Cantor drew additional criticism by appealing to theological arguments to address these paradoxes and other objections.

[8] Cantor's interest in transfinite numbers grew out of his work in the foundations of analysis, and specifically in questions concerning the convergence of trigonometric series.

[9] See, for example, Sierpinska [1994], pp. 66-68.

FIRST VECTOR SPACES OF FUNCTIONS

Jean-Luc Dorier, Laboratoire Leibniz, Grenoble, France

1. Beginnings of linear algebra in infinite dimension

In the 19th century, the most common representation for functions was given by series. In 1822, Joseph Fourier, solving a differential equation was therefore led to study a linear system with infinitely many equations and unknowns [Fourier 1822, 168 or 212]. Knowledge of that time on the convergence of series and the conditions under which their derivatives exist did not allow him a rigorous approach of the problem. He nevertheless laid down the basic principles for the solving of infinite linear systems : the system is reduced to its n-th first equations and unknown and one studies the limit of the sequence of determinants (this method is known as *le principe des réduites*). However, Fourier's work remained in the shade for the next half century. After some inconclusive trials by Fürstenau (1860) and Kötteritzsch (1870), George William Hill (1877), Henri Poincaré (1886 and 1900) and Helge von Koch (1891 and 1892-3) established the main results of the generalization to infinite dimension of the theory of determinants. But the problem was not only algebraic, the difficult question being the determination of what could be accepted as a solution, and therefore which restriction was to be given to the convergence. In 1913, Frédéric Riesz was to say about these first works : "*Pour appliquer la méthode classique des déterminants aux systèmes infinis, il fallait imposer des conditions plus ou moins restrictives, et il faut bien avouer que c'est la méthode et non le problème qui exigeait ces restrictions.*" [Riesz 1913, 42].

Indeed, the study of infinite linear systems rapidly led to technical difficulties, which some mathematicians like Töplitz [1909] tried to overcome by using alternative methods to the theory of determinants. But new approaches could not be invented or simply imposed so quickly and things were to change gradually, as will now be demonstrated.

2. Peano, Pincherle : early axiomatical approaches

The first axiomatic definition of a vector space was given by Guiseppe Peano [1888a, 141-142], in relation to Hermann Grassmann's *Ausdehnungslehre* (cf. [Dorier 1995, 241-252]). It was therefore primarily connected to geometry, although his definition was not restricted to this field and not even to finite dimension. However, Peano's work remained little developed by himself or by anybody else ; he only used it once, although in a very modern presentation, for the study of linear differential equations [1888b].

Salvatore Pincherle is, among Peano's followers, the one who made the most use of the axiomatic approach for infinite dimensional problems. After several publications (from 1890) using very formal presentations of problems concerning differential and integral equations, he published in 1901 a book entitled *Le Operazioni Distributive e le loro applicazioni all'analisi*, with his student Ugo Amaldi, which is an axiomatic presentation of linear operators in $\mathbb{R}^n$ and in several functional spaces. This work was quite unique for its time and remained unknown by most of his contemporaries. It is more than likely that the choice of a formal axiomatic approach did not match the goals of most of the analysts of that time. Indeed, the paradigm of the representation of functions by series induced a much more conceptually economical approach (the infinite case of coordinates), and in spite of technical difficulties -which had so far been overcome- the generalized theory of determinants allowed a continuity with traditional problems in finite dimension, where tools and methods were well tried and tested.

Yet, in spite of his modernism, Pincherle himself does not break completely with the traditions of his time ; he is, for instance, very much attached to the representation of functions by series.

3. Integral equations : a field of problems

Before the axiomatic approach could impose its view, the nature of functional linear problems had to be elucidated. The study of integral equations played a fundamental role in this sense.

One of the first decisive steps was taken by Ivar Fredholm in a text of 1903, which originated in the mathematization by Niels Abel, Joseph Liouville, Carl Neumann and Vito Volterra of traditional problems of physics, leading to the study of the integral equation :

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x) \text{ ; where f and } \psi \text{ are given and } \varphi \text{ is unknown.}$$

Fredholm studies this equation when f is bounded and integrable (in Riemann sense). The most interesting point for us is the use he makes of analogy with linear problems in finite dimension. From what he says, this analogy may seem purely formal, as he abruptly introduces a sophisticated quantity :

$$D\lambda f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \ldots x_n \\ x_1, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

$$\text{where } f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \ldots x_n \\ x_1, x_2 \ldots x_n \end{pmatrix} = \det\left(f(x_i,x_j)\right)$$

of which he says (without further explanation) that it plays, for the integral equation, the same role as the determinant for a finite system of linear equations. Although the link between Fredholm's quantity $D\lambda f$ and a plain determinant is not easily perceptible, it appears quite clearly through a technique well known at the time. As in Fourier's *principe des réduites,* one introduces a finite linear system but in a more sophisticated manner. One cuts the interval [0 ; 1] in *n* equal parts and chooses a value x_i on each sub-interval; the integral (in y) is then approached by a Riemann sum (for the subdivision x_i), then by writing the equation for $x = x_i$; i = 1 to *n*., one obtains the following *nxn* linear system :

$$\varphi(x_i) + \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, x_j)\varphi(x_i) = \psi(x_i) \text{ ; } \quad i = 1 \text{ to } n.$$

Therefore, if $\psi = 0$, $-\frac{\lambda}{n}$ is the inverse of an eigenvalue of the matrix $[f(x_i, x_j)]$. The quantity $D\lambda f$ introduced by Fredholm is the limit (when n --> + ∞) of the characteristic polynomial of this matrix in $-\frac{\lambda}{n}$. As one can see, the analogy with the finite case is used to elaborate a new method of investigation. It creates new tools that operate in the infinite case, which can be studied directly, not as the limit of a finite problem as with the *principe des réduites*. Then, Fredholm introduces the concepts of infinite minors and proves that if $D_\lambda f = 0$, there is a first minor which is not zero. This induces, in modern terminology, that a bounded linear operator always has a kernel of finite dimension.

The next step is also very important, as Fredholm uses a very modern notation :

En considérant l'équation (b) comme transformant la fonction $\varphi(x)$ en une nouvelle fonction $\psi(x)$ j'écris cette même équation

(7) $S_f\varphi(x) = \psi(x)$,

et je dis que la transformation S_f appartient à la fonction f(x,y).

Les transformations (7) *forment un groupe.* [Fredholm 1903, 372].

To consider a functional equation as the transformation of a function into another one had already been suggested by Volterra around 1886, through the notion of *function of a line*. Fredholm not only introduces the idea but he uses it as an essential framework to solve the equation. Indeed he states that solving the equation means finding the *noyau résolvant*, i.e. the function g such that: $S_fS_g = S_0 = \text{id}$. He is then able to state what is now known as the *Fredholm's alternative*:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution différente de zéro de l'équation :

$S_f\,\varphi(x) = 0$; c'est que $D_f = 0$. Si *n* est l'ordre du premier mineur de D_f qui soit différent de zéro, l'équation donnée possède *n* solutions linéairement indépendantes. [Fredholm 1903, 375].

He also shows that, only when $D_f \neq 0$, does the equation have a unique solution: $S_g\psi(x)$, g being the *noyau résolvant*; and that if $D_f=0$, there exists a solution if and only if:

$$\int_0^1 \Psi_k(x)\psi(x) = 0 \; ; \;\; k = 1 \text{ à } n \; ;$$

where Ψ_k are *n* independent solutions of the homogeneous equation.

These results are identical to the case of a finite linear system. Therefore the analogy appears to be very consistent, yet the method elaborated by Fredholm does not depend on any previous sub-problem in finite dimension, his tools operate straight on the equation and uses the function independently of any representation by series. Nevertheless, no functional vector space is considered, even though the notion of linear operator is explicitly formalized and used.

Between 1904 and 1910, David Hilbert published 6 texts about integral equations in the *Göttingen Nachrichten*, which he edited together with an introduction as a book in 1912. These texts were to become a reference for any mathematician interested in the subject. They present a valuable collection of results and methods, generalizing Fredholm's work in many new directions. On the other hand, this master piece of ingenuity lacks a unified point of view, as Hilbert himself recognizes in the introduction to the 1912 collection. Compared to Fredholm, it is far less innovative in the use of formalism and new concepts such as formal linear operator. Moreover, no vector space is explicitly considered. The concept of Hilbert space, although it came from this work, was not to be abstracted for several years. Hilbert starts with the study of Fredholm's equation when the kernel *f* is symmetric. Therefore, as an introduction, he presents a detailed study of the reduction of symmetrical finite matrices, using the framework of bilinear forms. These results were not new at the time, but Hilbert's presentation is quite a novelty, it is adapted to be generalized to the infinite dimension. As all his predecessors, he makes no use of geometrical language (scalar product, norm, orthogonality, etc.). He also makes explicit the passage to the transcendental case, in the same way as we assumed Fredholm had made it. Once he obtained similar results as Fredholm, in the case in which *f* is symmetric, he shows numerous applications. This occupies the first three texts; in the fourth, he studies the reduction and the nature of the spectrum of infinite quadratic forms. Formally, the methods are quite similar to what he had used concerning Fredholm's equation, except that functions are now infinite sequences of numbers and the sums are series instead of integrals; yet, this analogy remains implicit. Finally, he uses what had been established about quadratic forms to approach Fredholm's equation via Fourier series. This point of view leads him to the study of infinite linear systems. He established the most fundamental results about what is now known as complete orthogonal systems of units in a Hilbert space. In this framework, he is able to present several generalizations of Fredholm's results and numerous applications.

Hilbert's work is very rich, his use of analogy between finite and infinite problems is varied and he explores several different examples. Similarities in the results are visible but not explored as such, as there is no trial to create a unified theory. In particular, there is no explicit functional space and no recognition of quantities such as: $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ or $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$, as scalar product, or use of the geometrical (or any other unifying) language.

Therefore the concept of Hilbert space had not yet been created explicitly. This would be done gradually by others who based their works on the wide range of results and methods established by Hilbert.

4. First generalizations and unifications of Hilbert's work

Frédéric Riesz and Ernst Fischer, both in 1907, generalized Hilbert's results to a kernel, whose square is Lebesgue-integrable. Implicitly, each of them shows the isomorphism between the space l^2 of sequences whose sum of squares converge and the space L^2 of functions whose square is Lebesgue-integrable. Riesz's approach uses Fourier's coefficients although Fischer's is more general; he introduces for the first time the concept of mean-convergence. In another paper written the same year, where he compares the two approaches, Riesz shows that he is aware of the theoretical consequences of this result :

> [Pour le système des fonctions sommables et de carré sommable], il existe un lien plus intime entre la fonction et sa série de Fourier [...]. Pour cette classe de fonctions on peut définir une notion de distance et l'on peut fonder sur cette notion une théorie géométrique des systèmes de fonctions, théorie qui ressemble à la géométrie synthétique." [Fischer 1907, 1409-1410].

It is clear for him that L^2, is the synthetical geometrical space and that l^2 is its analytical representation, therefore geometrical notions such as distance, norm and scalar products have both synthetical and analytical representations. The parallel with geometry is based here on topological facts rather than algebraic relations ; no structure of vector-space is explicitly abstracted in either Riesz's or Fischer's works. Nevertheless, topological relations are essential for the concept of operator, and through the study of linear operator the algebraic structure can be made explicit more easily. Therefore the emphasis on topological properties rather than algebraic ones is perfectly coherent with the geometrical representation.

A standard use of geometrical notions in functional spaces was accomplished in 1908 by Erhard Schmidt. He explicitly built a geometry on l^2, therefore implicitly on L^2, based on the analogy with $\mathbb{R}^n$, of which he shows the power of simplification. It is in this text for instance that one can find a generalization to infinite dimension of the process invented by Jorgen Gram to build an orthogonal normed basis from any given basis.

After Riesz and Schmidt, geometrical vocabulary and notions spread rapidly in analysis, and their use become standardized. Moreover, through the analytical/synthetical duality, this intrusion of geometry into analysis also points out the series/function duality. Therefore, the use of geometry was an essential factor in the formalization of functional space independently of the representations with series, in the same way that the search for a geometrical calculus (since Leibniz and all through the 19th century) had led to the building of an algebra on geometrical entities independent of the coordinates (cf. [Dorier 1995, 237-246]).

At this stage of the historical development, there is still no formal definition of the Hilbert space, but a formalization of the topological relationship between two spaces which are the most fundamental examples of Hilbert spaces. After this first step, Riesz extends his study of Fredholm's equation to more general cases. This leads him, in 1910, to introduce the L^p spaces, and gradually more general spaces, adopting consequently a more unifying point of view. Yet, these spaces are still particular and introduced as such, even if their structural properties (mainly topological) are abstracted and become more explicitly used in proofs. Through the study of the L^p spaces, Riesz uses the notion of duality and of adjoined operator, in a very formal way, he also defines strong and weak convergences, and he establishes the first version of the representation theorem of bounded linear operator which still bears his name and Fischer's. His work is a generalization of his results obtained for L^2 to L^p spaces, but it also gives a more general point of view on the theory for L^2. In a work written in Hungarian in 1916 and translated into German in 1918, he introduces one of the first formal definition of a norm on a functional space and establishes the foundations of what is now known as the Riesz-Fredholm theory of bounded operators. This work is limited to the space of continuous functions on [a,b], but most of the results are obtained using only a general definition, which makes the presentation close to an axiomatic approach of complete normed functional spaces. In the same vein, in 1921, Eduard Helly presented a study of infinite linear systems, where he uses an axiomatic definition of a norm. The algebraic structure is yet not formalized.

Riesz's work is essentially based on Hilbert's methods and results. Yet, the extension to kernels of different types induces a process of generalization which gradually leads to a formalization of the concept of functional space based on topological properties. Still, this process is motivated by internal goals and remains dependent on the types of questions accessible in analysis. Therefore, it is not surprising that the algebraic structure of functional spaces is not abstracted by Riesz. This last step was to be taken independently, at similar dates, by three mathematicians : Norbert Wiener, Hans Hahn and Stefan Banach.

5. Axiomatic definitions of a complete normed vector space

Wiener's work was published in 1920, while Hahn's and Banach's were in 1922. But Banach's publication was based on his doctoral thesis defended in 1920. The whole content of this thesis remains unknown up to now. For Wiener (1920) and Banach (1922), axiomatical approach is a goal in its own, they believe in its importance for the development of mathematics, as suggested by this quotation from Banach's introduction :

> L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici : je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démontre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui. [Banach 1967/79, 2:308]

Banach's position is typical of the use of axiomatic approach well established among Polish mathematicians at the beginning of the 20^{th} century.

Hahn (1922) is, above all, interested in a unification of the methods involved in the solving of several problems in analysis. Consequently, his work presents fewer general results than Wiener's and Banach's, while the latter two works contain no concrete applications to explicit problems in analysis (although in Banach's case, these applications may have been part of the original thesis' work). None of the three gives a specific name to the algebraic structure which is inseparable from the norm. Moreover, even if Banach makes a short reference to Grassmann's forms, it is very likely that the three mathematicians rediscovered the axioms of the linear structure independently of their few predecessors on this matter from Peano to Hermann Weyl (cf. [Dorier 1995, 246-252] and [Moore 1995, 277-284]). Although their choices of axioms are very similar, Wiener's is the less correct, the list being both redundant and incomplete like Banach's. Finally, Wiener is the only one to define an affine structure related to the vectorial structure.

Wiener published two more texts in 1922 on the subject, and one in 1923, in which he recognized Banach's priority and also his better choice of axioms. After that, he changed direction and never returned to this temporary interest of his youth. Hahn published a text in 1927, in which he explored more general results. In particular, he established the first version of the Hahn-Banach theorem :

> Satz III. Sei R_0 ein vollständiger linearer Teilraum von R und $f_0(x)$ eine Linearform in R_0 der Steigung M. Dann gibt es eine Linearform f(x) in R der Steigung M, die auf R_0 mit f_0 übereinstimmt. [Hahn 1927, 217].

It was also in this text, that he gave the first results about topological duality.

But this is by far Banach's contribution which would be the most influential (see below). Yet, not so much through the 1922 text. Indeed, none of the three first presentations of an axiomatic definition of complete normed vector space met with any great success, mostly because they were not followed by substantial applications to concrete problems discussed at the time by analysts. Even if the context was more sophisticated than when Pincherle proposed his approach, it seems that similar reactions prevailed. Nevertheless, in 1925, Maurice Fréchet, who discovered complete normed vector space first in Wiener's work and then in Banach's, published his own contribution, in which he introduces an hybrid definition, which has Banach's rigor and preserves Wiener's distinction between affine and vectorial structure. In relation to his previous work, he also introduces a notion of distance and defines a more general concept of affine topological space (not necessarily normed), for which he distinguishes an algebraic and a geometrical definition. In 1928, he published a monography entitled *les espaces abstraits et leur théorie générale considérée comme introduction à l'analyse générale*, with a well documented historical perspective.

6. Epilogue and conclusion

In 1927, John von Neumann gave the first axiomatical definition of an abstract Hilbert's space. His goal is to give unified and rigorous bases to quantum mechanics. Indeed two very distinct points of view were developed in this field : one based on infinite sequences and matrices and the other based on the wave function and a functional equation. Both methods led to a problem of eigenvalue in two different frameworks. Erwin Schrödinger had shown the mathematical equivalence of the two theory the previous year. Von Neumann's goal was to give an abstract theory which could modelize the two existing approaches. He is therefore led to study the similarities between the two frameworks and the methods attached to them, in order to abstract them. This led him to the definition of a Hilbert space as an infinite dimensional hermitian vector space, separable and complete. The same year, Marshall Stone published his book on linear transformation in Hilbert spaces, which was for long to remain a reference book.

On the other hand, Banach, after seven years dedicated to other fields of interest, published in 1929, two texts on linear functional equations, in which he extends his work of 1922, using a new definition close to Fréchet's. In the second of the texts he gives the second and final version of the Hahn-Banach theorem. In 1932, he published a monography entitled *Théorie des opérateurs linéaires*, in which he presents the whole theory and numerous applications to practically every field of functional analysis. This book definitely imposes the axiomatic approach, as it shows not only that all the existing problems can be solved more easily with it, but also opens new perspectives of research in as yet unexplored fields. It was to remain a classic and to influence all work in functional analysis for many years.

REFERENCES

Abreviations : Acta. Math. (Acta Mathematica), Bull. SMF (Bulletin de la Société Mathématique de France), C.R. Acad. Sc. (Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris), Fund. Math. (Fundamenta Mathematicae), Hist. Math. (Historia Mathematica), J. Crelle (Journal für die reine und angewandte Mathematik), Göttingen (Nachrichten der Königlichen Gesellschafte der Wissenschaft zu Göttingen), Math. Ann. (Mathematische Annalen), Mon. Phys. Math. (Monatshefte für Mathematik und Physik), Stud. Math. (Studia Mathematica), Palermo (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo).

BANACH (Stefan)

[1922] Sur les opérations linéaires dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.* **3**, 133-181.

[1929] Sur les fonctionnelles linéaires, in two parts, *Stud. Math.* **1**, 211-216 and 223-239.

[1932] *Théorie des opérateurs linéaires*, Warsaw: Funduszu Kultury Narodowej.

DORIER (Jean-Luc) [1995] A general outline of the genesis of vector space theory, *Hist. Math.* **22(3)**, 227-261.

FISCHER (Ernst) [1907] Sur la convergence en moyenne. *C.R. Acad. Sc.*, 144 (1907), 1022-1024.

FOURIER (Joseph) [1822] *Théorie analytique de la chaleur*, Paris: Firmin Didot Père et Fils; reed., Paris: J. Gabay, 1988.

FRÉCHET (Maurice)
[1925-26] Les espaces vectoriels abstraits, *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society* **16**(1), 51-62.
[1926] Les espaces abstraits topologiquement affines, *Acta Math.* **47**, 25-52.
[1928] *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'analyse générale*, Gauthiers-Villars; reed, 1951.

FREDHOLM (Ivar) [1903] Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.* **27**, 365-390.

HAHN (Hans)
[1922] Über Folgen linearer Operationen, *Mon. Phys. Math.* **32**, 1-88.
[1927] Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räumen, *J. Crelle* **157**, 214-229.

HELLY (Eduard) [1921] Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Mon. Phys. Math.* **31**, 60-91.

HILBERT (David) [1912] *Grundzüge einer Allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Leipzig/Berlin: Teubner, reed. 1924; New-York: Chelsea, 1953.

HILL (George William) [1877] *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and Moon*, Cambridge, Mass. : Wilson, 1877; reed., *Act. Math.* **15**, 53-63.

KOCH (Helge von)
[1891] Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires, *Acta Math.* **15**, 53-63.
[1892-3] Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires, *Acta Math.* **16**, 217-295.

MOORE (Gregory H.) [1995] The axiomatization of linear algebra, *Hist. Math* **22**(**3**), 262-303.

NEUMANN (John von) [1927] Mathematische Begründung der Quantenmechanik, *Göttingen*, 1-57.

PEANO (Giuseppe)
[1888a] *Calcolo geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann e precedutto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino: Fratelli Bocca Editori.
[1888b] Intégration par séries des équations différentielles linéaires, Math. Ann. **32**, 450-456.

PINCHERLE (Salvatore) et AMALDI (Ugo) [1901] *Le operazioni distributive*, Bologne: Zanichelli.

POINCARÉ (Henri) Sur les déterminants d'ordre infini, *Bull. SMF* **14**, 77-90.

RIESZ (Frédéric)
[1907a] Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, *C.R. Acad. Sc* **144**, 615-619.
[1907b] Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équation de Fredholm, *C.R. Acad. Sc.* **144**, 734-736
[1907c] Sur une espèce de géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables, *C.R. Acad. Sc.* **144**, 1409-1411.
[1907d] Über orthogonale Funktionensystem, *Göttingen*, 116-122.
[1910] Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, *Math. Ann.* **69**, 449-497.
[1913] *Les systèmes d'équations linéaires en une infinité d'inconnues*, Paris: Gauthier-Villars.
[1918] Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.* **41**, 71-98.

SCHMIDT (Erhard)
[1907] Zur theorie der linearer und nichtlinearer Integralgleichungen, 2 parts, *Math. Ann.* **63**, 433-467; **64**, 161-174.
[1908] Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Palermo* **20**, 53-77.

STONE (Marshall Harvey) [1932] *Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis*, New-York: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol.XV; reed., 1958.

TÖPLITZ (Otto) [1909] Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, *Palermo* **28**, 88-96.

WIENER (Norbert)
[1920] On the theory of sets of points in terms of continuous transformations, *Compte-rendu du congrès des mathématiciens*, Strasbourg: 1920, p. 312-315.
[1922a] The group of linear continuum, *Proceedings of the London Mathematical Society* **20**, 329-346.
[1922b] Limit in terms of continuous transformation, *Bull. SMF* **50**, 119-134.
[1923] Note on a paper of M. Banach, *Fund. Math.* **4** , 136-143.

AN INTERNATIONAL MATHEMATICS CURRICULUM CAN SATISFY DIFFERENT NATIONAL CULTURES

April 1996

J-P GINESTIER, Red Cross Nordic United World College, N-6820 Flekke, Norway
Tel (47) 57 73 7077 e-mail: Compuserve 102216,305 Office tel (47) 57 73 7000 fax (47) 57 73 7001

People perceive mathematics in very different ways. Each nation has its own established philosophy of education, its traditional approaches to a subject and its unwillingness to change. Perhaps the strongest detractor is the political anxiety which all our countries and regions feel in allowing any "international" organization to operate next to our home-grown educational authorities, and maybe establish a good reputation.

My mathematics teaching experience has encompassed 14 years working in bilingual institutions in Cameroon, Canada, and Switzerland. I have been involved with curriculum development in these countries, and with the International Baccalaureate. I participated in a symposium on the "Interactions between Linguistics and Mathematics Education" in Kenya; and I helped to train teachers in Mauritius, francophones teaching in the English language. In my present position in a United World College, I am made aware every day of the different ways in which different cultures perceive things, including mathematics.

I have looked at resources from many other countries, and this experience has led me to observe that two extremes in the philosophy of mathematics education could be found with the English and the French. Arguably, the most dissonant period might have been the beginning of "modern mathematics", which was supposed to make us all think again.

The French emphasized, to the point of excluding almost everything else, the logical and structural approach to mathematics; the advent of modern mathematics actually exacerbated this methodology to a point which became unbearable for students, if not for teachers, and there has been , thankfully, some backing off in the last few years. The idea, of course, was to help the students to think more clearly. However, one disadvantage is that the programme then lacks in practicality and direct application.

This "practical learning" process was the cornerstone of the English approach to teaching the subject. The major flaw here is that one often finds fundamental steps lacking in the introduction of a topic. In England too, the coming of modern mathematics made things worse; most authors and publishers perceived this renewal as merely being an addition to the curriculum of a multitude of new, unrelated topics which could be sprinkled randomly around other topics. Here again, the last few years have welcomed a modicum of reorganization.

[SEE CLARKE CONTENTS

To illustrate what I mean, let us look at the contents of an English book, "Ordinary Level Mathematics" , by Clarke and Norton (HEB 1984), designed for students in grade 11 (the end of compulsory secondary education in England) . The book is divided into 7 major sections. There are many points worthy of note:

- MATHEMATICAL STRUCTURE was the 3rd section; if there really is a structure to mathematics, shouldn't this have been 1st?
- Within this section, 'Binary Operations' were studied before 'Functions', although a binary operation is a function ! *(even worse: in the original "Modern Mathematics" by Clarke, 'Groups' were studied before 'Sets'!!)*
- 'Matrices' were introduced before 'Vectors', although one of the major applications of matrices is to transform vectors.
- Some old diehard incongruences remain : the use of logarithms was taught in the 1st section, but not explained until the 2nd section; graphs were presented before (and quite separately from) functions; the very superficial study of calculus nevertheless included integration ; generally very little link was made between 'traditional' and 'modern' topics.

[SEE MATHÉMATIQUES 3e CONTENTS

A comparison with "Mathématiques 3" , by Corrieu et al (Fernand Nathan 1980), designed for French grade 10 students (the last year in which all students followed the same mathematics programme), shows great differences. Indeed, French texts were so often concerned with following a structure that they reduced applications enormously, and forgot that the texts are an instrument for neophytes who needed them as a practical reference to help them learn. One fundamental difference was that the French viewed modern mathematics as a logical foundation for all existing mathematics - leaving very little room for discovery by intuition - and only recently has there been a moderation of this idea. By contrast, the English practically never thought of using modern math as a base for the old. Thus many topics are introduced in a very different way.

In French mathematics, equivalence relations were built up in various sets to introduce new ideas, elements, objects. This was fundamental and done quite thoroughly by grade 8 (which required, of course, the prior study of Sets and

ORDINARY LEVEL MATHEMATICS by L H Clarke (7th Edition by FGJ Norton) Heinemann 1984	**MATHÉMATIQUES 3 par Corrieu et alii** Fernand Nathan 1980
ARITHMETIC (1-8) Numerals and Number Bases, Approximations, Aids for Calculations, Logarithms, Areas and Volumes, Ratio and Percentage, Simple and Compound Interest, Rates and Taxes, Stocks and Shares ALGEBRA (9-17) Factors, Formulae, Expressions, Linear Equations and Inequalities, Quadratic Equations and Inequalities, Graphs, Graphical Inequalities, Linear Programming, Indices and Logarithms, Variation, Arithmetic and Geometric Progressions MATHEMATICAL STRUCTURE (18-21) Set Theory, Binary Operations, Relations, Mappings, Functions, Groups STATISTICS AND PROBABILITY (22-25) Averages; Mean, Mode, Median, Representation of Data, Probability, Conditional Probability GEOMETRY (26-36) Axioms, Parallel Lines, Triangles and Polygons, Congruent Triangles, Quadrilaterals, Inequalities, Ratio, Similar Figures, The Circle, Loci, Constructions, Symmetry, Matrices, Geometrical Applications of Matrices, Vectors, Vector Geometry TRIGONOMETRY (37-43) Ratios of an Acute Angle, Solutions of a Right-Angles Triangle, The General Angle, Graphs, Problems in Three Dimensions, The Circle and the Sphere, The Sine and Cosine Formulae CALCULUS (44-46) The Derived Function, Applications of the Derived Function, Integration	1 Calcul algébrique (révision) 2 Relation d'ordre dans R (révision) 3 Racine carrée: définition - propriétés 4 Racine carrée: applications 5 Propriété de Thalès 6 Addition des vecteurs (révision) 7 Multiplication d'un vecteur par un réel 8 Coordonnées 9 Équations d'une droite 10 Application linéaire 11 Application affine 12 Équations et systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues 13 Inéquations et systèmes d'inéquations du premier degré à deux inconnues 14 Problèmes concrets du premier degré 15 Rapport de projection orthogonale de deux axes 16 Relations métriques dans un triangle rectangle 17 Norme et orthogonalité des vecteurs 18 Compléments sur le cercle 19 Les angles 20 Applications des symétries - Bissectrices 21 Premiers éléments de trigonométrie 22 Applications de la trigonométrie 23 Géométrie dans l'espace

Elements, including sets of sets, Relations, Functions, Bijective Mappings, Product Sets, Ordered Pairs). Thus, whereas the English approach was intuitive for all the following concepts, French students learned about:

- Natural Numbers as classes of sets
- Integers as classes of ordered pairs
- Rationals as classes of ordered pairs
- Vectors as classes of ordered pairs of points
- Angles as classes of ordered pairs of rays

We must also bear in mind that peculiar forces sometimes govern the final aspect of a textbook before it becomes acceptable for use in a particular place. In French publishing, for a long time, it seemed natural for any text on mathematics to be difficult to understand, because it was accepted that only very bright, cultured people could be good at math, so there must have been a natural selection which hindered the proliferation of "simple" books ! Also the contents, although not their order, were always prescribed by the programmes decided by the Ministry of Education, for each grade.

English publishers have never had prescriptions for contents, but they have felt the need to cover syllabuses for a number of different Boards of Examination . Thus, their major concern was to become a handy reference, and a bank of questions - in other words a handbook which the teacher could refer students to readily. Logical development of the material presented did not need to be a priority.

[SEE ENGLISH APPROACH

To highlight the differences between the extreme English and French approaches, we can look at the well-known, traditional topic of "Simultaneous Equations". The English text *("Ordinary Level Mathematics" 1984 edition - this topic unchanged from the 1964 edition)* deals with it in less than half a page, where a French text ("Brédilivre 3e" 1972 edition) treating "Systems of first-degree equations in two unknowns" takes 9 pages ! A glance at subsequent French texts shows that there was a remarkable improvement: for example, the 1980 edition of "Mathématiques 3" (F Nathan). took only 3 pages, using clearer language and taking out a lot of the pedantic overkill.

[SEE FRENCH APPROACH

Almost any other book, from any country in the world, treats the same topic well within these two poles. However, different notions need different approaches : for some areas, such as those pertaining to mathematical structure, or for peculiar

<table>
<tr><td>ENGLISH TEXT - from Clarke's "Ordinary Level Mathematics" 1984 edition - (this topic unchanged from the 1964 edition)
<u>Simultaneous Equations</u></td><td>QUESTIONS & COMMENTS
by a French Mathematics teacher on reading this:</td></tr>
<tr><td>Sometimes it is more convenient if we introduce a second letter to represent another unknown.
One equation in the unknowns is satisfied by as many pairs of values as we wish, but if we have two equations in two unknowns they usually have only one pair of solutions
Example: solve the equations
$3x + 2y = 12, \quad 4x - 3y = -1$
$3x + 2y = 12$ (i)
$4x - 3y = -1$ (ii)
Multiply (i) by 4 and (ii) by 3.

This is to produce equations in which the coefficients of x are equal.
Sometimes it is easier to choose multipliers so that the coefficients of y become equal.
$12x + 8y = 48$ (iii)
$12x - 9y = -3$ (iv)
Subtract (iv) from (iii), so that the term in x disappears</td><td>- Sometimes?? Why, and when? (for solving problems, perhaps?) Explain!
- How? Has this been studied before?
- "Usually"? When is that? And how can two equations be taken "together"?

- What do we mean by "multiplying an equation"? Does it produce an equivalent equation?
- When?
- Mon Dieu ces Anglais!
- What does "subtracting equations" mean? What does it produce, and why?</td></tr>
<tr><td>(There follows another worked example and 40 questions. No mention is made of alternative methods, such as substitution or comparison. The text then deals with problems leading to simultaneous equations.
No mention is made of graphs, which are introduced in a subsequent chapter, and even there little link is made. The chapter on simultaneous equations does not mention functions, nor does it deal with the situations when there is no unique solution)</td><td>The French text answers all of these questions as it explains: however, it is long and painstaking. The topic is best explained by a <u>teacher</u>; just as a good English math teacher would read between the lines of this text and discuss these questions while giving an explanation of the methods involved.

LET US SEE HOW OUR FRENCH COLLEAGUES DO IT ......</td></tr>
</table>

FRENCH TEXT - from Brédilivre 3e 1972 edition - Wattiaux et alii, Hachette *(the beginnings of "modern math")* **Systems of first-degree equations in two unknowns**	***QUESTIONS & COMMENTS*** *by an English Mathematics teacher on reading this:*
1.*General remarks* (i) *Functions of two variables:* Observe the following statements: $f(x,y) = 2x + y - 4$ $g(x,y) = 3x - 4y + 5$ Each one contains two variables, x and y. If these are real, we state: an ordered pair (x,y) is an element of the set RxR. For a given ordered pair (a,b), each expression is associated with a single real number: $f(a,b) = 2a + b - 4$ $g(a,b) = 3a - 4b + 5$ Thus these expressions define two functions f and g with domain RxR and with range R. We write $f:\begin{cases} R\times R \to R \\ (x,y) \to f(x,y) \end{cases}$ $g:\begin{cases} R\times R \to R \\ (x,y) \to g(x,y) \end{cases}$ (ii) *An equation in two variables:* Solving the equation defined by $f(x,y) = g(x,y)$ in RxR is finding the set S (which may be empty) such that: $S = \{(x,y) / (x,y) \in R\times R, f(x,y) = g(x,y)\}$ etc....	- *What is this? A chapter on simultaneous equations, or a study of functions?* - *Don't they already know about ordered pairs?* - *How can an average student understand the intrinsic difference between "a,b" and "x,y"?* - *What do domain and range have to do with the matter at hand?* - *Good grief, the French!* - *Clear to me perhaps. But again, what about the average student?*
(the text goes on lengthily to show how to find an infinite set of ordered pairs satisfying a single equation in two variables. Then, the link is made with the graph of a straight line. Four pages later, two such equations are solved simultaneously by the comparison method. Then other methods are shown. Explanations are thorough, and the impossible case, together with the indeterminate case, are examined in great detail. Problems are only introduced in the next chapter)	Indeed, the English text is much more direct and concise, and is more appealing to the student. However, it does not answer the inherent, basic questions. A good French math teacher must sort out what is important in what the book is trying to say, and put it to the students in a simpler language while emphasizing the methods which must be learned

objects such as vectors, watertight definitions and a high degree of logical explanation are necessary. These could always be present in an appropriate French book.

For other areas, such as how to go about elementary algebraic simplification with brackets, negative quantities, fractions, exponents etc, a lot of practice should follow very simple descriptions of algorithms. This could always be found in an English book.

Essentially, good mathematics teachers anywhere in the world must somehow transmit ideas to their students and get them to master techniques, no matter which book (if any) they are using.

It so happens that good French teachers spent a large part of their energy sifting through the pedantry of the textbook to pull out the essential ingredients, and making up a lot of short drill exercises. Good English teachers, on the other hand, had all the exercises and problems immediately available to them from a vast mine, but they had to be constantly alert to the essence behind the rudimentary explanations in the textbook, to avoid being caught off guard by a perceptive question from a student.

In promoting internationalization, one has to fight "localization". This is very difficult. It does not mean that all local, individual research into improving teaching methods, finding fresh examples of the use of mathematics, adding new topics or giving new directions to a mathematics curriculum, must cease. On the contrary, research must continue, but with the protagonists being more aware of what goes on in the rest of the world. Every educational jurisdiction still seems to think it is one of the best in the world, and of course, the simplest way to ensure continued belief in that position is to dismiss any outside influence or standard.

The International Baccalaureate Diploma programme is a rigorous pre-university course of study. The idea of the IB, that is, of an international university entrance examination that could be taken in any country and recognized in any country, grew out of both practical and educational concerns in the International School setting. Twenty schools took part in the first IB examinations in 1970: since then, the IB has grown to over 600 participating schools in some 80 countries.

I would like to plead for more energy to be put in to the internationalization of mathematics at school. The first subject worked on prior to the creation of the IB was history - surely it is in this area that a consensus was most difficult to reach, yet it was done successfully almost 30 years ago - perhaps precisely because it was recognized as being the major hurdle. Mathematics was tackled subsequently and discussions tended to lead to confrontation, not conciliation, perhaps because mathematicians are too dogmatic (are we?).

But mathematics, in spite of all the differences talked about in this paper, should be the easiest subject to internationalize. First, because mathematics is an international language. Many students who have come to a new country, with a new language, somewhere in the course of their secondary studies, have found that mathematics is the easiest subject to adapt to. Second, because in its pure form, mathematics should be culture-free. This does not mean that it is free of history, of course, but then historians have shown us that it is not only possible, but even relatively easy, and of course beneficial, to discuss and come to agreements on what is a fair approach to the significance of historical facts, and their link to present society. The rapid growth of interest in the History and Pedagogy of Mathematics should ensure that this movement contains discussions on the internationalization of mathematics curricula. At international conferences of mathematics teachers such as this one, and ICME, we should be taking advantage of our training to compare and find common ground among our various approaches, if only to discover what each of our cultures emphasize in the learning of mathematics.

One of the first successes of the IB programme in mathematics was satisfying both the English and the French educators - no mean accomplishment ! In fact, that is its strength. By its very nature, the IB mathematics programme has forced the English to be a little clearer, more 'pure' and it has forced the French to be more practical, more 'applied'. The strength comes from the fact that, although both sides have gained fresh insight, neither side has backed down on anything which they traditionally do well.

To build a more civilized, compassionate future, we should, somewhere along the line, have some common educational goals. This will take maybe centuries to achieve in many subjects; but in the pure sciences, and particularly mathematics, I believe it can be done very soon, and the International Baccalaureate is part of this growth.

-:-:-:-:-

BRICKS, BEAMS, AND WEDGES: A NEO-PYTHAGOREAN APPROACH TO MULTIPLICATION

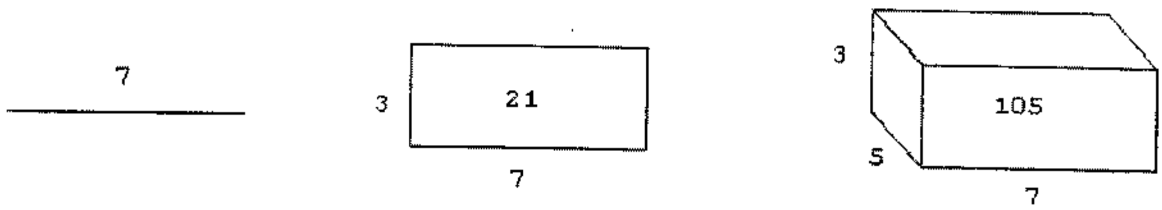
John A. Fossa, Ph.D., UFRN - Natal, RN (Brazil)

One of the most effective ways of teaching mathematics is through a carefully sequenced set of activities that embody the mathematical concepts to be learned. Indeed, activity-based teaching is so effective that even more traditional teaching methods can benefit from the use of activities as a complement to regular classes. But where do we find suitable activities? One very rich source of non-trivial, interesting activities is the history of mathematics. By way of illustration, we will develop some complementary activities for multiplication (and division), based on neo-Pythagorean concepts.

The Pythagoreans are, of course, famous for their development of figurate numbers, which themselves have many classroom applications, the most abused being that of perfect numbers. Herein, however, our basic point of view will shift from the representation of numbers by small symmetrical objects to their representation by different kinds of solid bodies, to wit: cubes, bricks, beams, and wedges. Except, perhaps, for very young children -- who may be encouraged to measure the sides of different embodiments of these solids and then find the number to be associated with each of them by multiplication, or better, to construct their own models -- the present outlook looses something of the former method's affinity for the use of manipulatives. Nevertheless, it will prove to be an interesting way to think about numbers and, consequently, can be used to elaborate motivating drills on the multiplication facts and help develop the student's number sense. Furthermore, the present classificatory scheme will also provoke some questions to exercise the student's critical thinking skills.

Solid Numbers

A number, considered as the length of a line segment, is called a *linear number*; when it is considered as the area of a rectangle, a number is called a *plane number*; finally, a number, considered as the volume of a rectangular parallelepiped, is called a *solid number*:



Equivalently, a number with two factors is a plane number and one with three factors is a solid number. In what follows, we will be concerned with solid numbers.

It may be well to remark that, given the characterizations set out above: (1) all numbers are linear numbers (since a line segment can be of any length); (2) all numbers are plane numbers (since $n=n\times 1$); and (3) all numbers are solid numbers (since $n=n\times 1\times 1$). We can eliminate this result by requiring that all the factors be greater than 1. Then, prime numbers can be neither plane nor solid and, indeed, solid numbers will be those that have at least three (not necessarily distinct) factors.

As a preliminary exercise, the students can determine which numbers in an initial segment of the natural numbers are solid. Since all numbers are linear and every solid number is also a plane number ($n\times m\times r=(n\times m)\times r$), only the most exclusive category will be noted in the following chart:

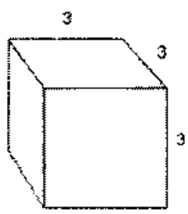
#	Factors	Classification	#	Factors	Classification
1			7	prime	linear
2	prime	linear	8	2x2x2	solid
3	prime	linear	9	3x3	plane
4	2x2	plane	10	2x5	plane
5	prime	linear	11	prime	linear
6	2x3	plane	12	2x2x3	solid

Thus the first solid number is 8, which is clearly also a plane number (8 = 2×4); since this will always occur, as explained above, it is not noted on the chart.

After having identified some solid numbers and having given a general characterization of them, we are now ready to study the classification of solid numbers as given by our ancient authors. Before doing so, however, we wish to make explicit what was perhaps only implicit above: if a number has more than three factors, it certainly has three factors and is therefore a solid number. For example, 16 = 2×2×2×2 = 2×2×4 and is therefore solid.

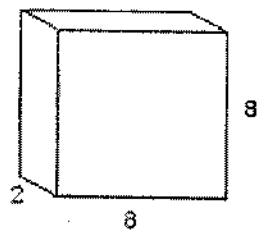
Kinds of Solid Numbers

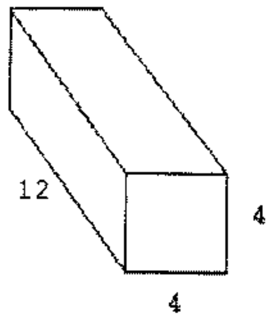
There are four kinds of solid numbers:



The *cube* has three equal factors: n^3.

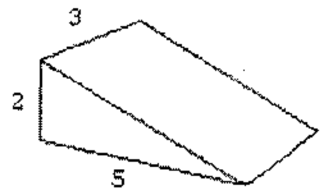
The *brick* has a square face and a short side: $n^2 \times m$, where $m < n$.





The *beam* has a square face and a long side: $n^2 \times m$, where $m > n$.

The *wedge* has three unequal sides: $m \times n \times r$, where $m \neq n \neq r \neq m$.



The cube is self-explicatory, but the brick does not seem to correspond to those entities used in the construction business. In point of fact, however, the ancient Romans did make bricks with the shape indicated above and in many countries today bricks with the indicated shape are still in use. Nevertheless, although we do think that the traditional names are rather evocative, there is no real reason to slavishly adopt outmoded terminology and the teacher should feel free to develop another set of names if that will help the student to relate to the figures more easily. The beam, especially when the length is long in relation to the side of the square, and the wedge seem appropriate to the figures so called. The wedge, however, was also called the "little alter" because many ancient sacrificial alters -- for practical reasons -- were approximately wedge shaped. The wedge, however, brings along with it another problem: a wedge is not a rectangular parallelepiped and, thus, by our earlier definition not a solid number! To resolve this problem we can (1) abandon the "wedge" and use, perhaps, "alter", to signify a generalized rectangular parallelpiped, (2) abandon the characterization of solid numbers as rectangular parallelpipeds, (3) divorce the subclassification from the original classification or (4) let the students discover for themselves that the ancient mathematicians were not supermen.

The students can now classify the solid numbers that they have previously identified or, alternatively, the teacher can give the class a list of numbers from which the solid numbers are to be identified and classified. We will illustrate the former alternative:

#	Factors	Classification	#	Factors	Classification
8	2^3	cube	27	3^3	cube
12	2^2 x 3	beam	28	2^2 x 7	beam
16	2^2 x 4	beam	30	2x3x5	wedge
18	3^2 x 2	brick	32	4^2 x 2 2^2 x 8	brick beam
20	2^2 x 5	beam	36	3^2 x 4 2^2 x 9 2x3x6	beam beam wedge
24	2^2 x 6 2x3x4	beam wedge	40	2^2 x 10 2x4x5	beam wedge

Some Questions about the Classification

The classification that we have been considering provokes certain interesting questions, some of which are easily answered by referring to the table given above. A reflective awareness of the answers to these questions, however, will improve the student's understanding. We mention only the following four:

1. *Is the classification complete?*
That is, can all solid numbers be classified as cubes, bricks, beams, or wedges? If a number has three factors, all of the factors may be equal, two of them may be equal, or they may all be distinct from one another; there are no other possibilities. In the first and last cases we have respectively a cube and a wedge. In the case that two factors are equal, we will have a brick or a beam accordingly as the third factor is smaller or larger than the equal factors. Thus, every solid number is certainly a cube, brick, beam, or wedge and the classification is complete.
2. *Is the classification unique?*
That·is, is every solid number classified in only one way as a cube, brick, beam, or wedge? A quick glance at the table given on the previous page is sufficient to answer this question. Thus, 24, for example, is both a beam and a wedge, while 32 is both brick and beam. Hence, the classification is not unique.
3. *Is any class superfluous?*
That is, can we eliminate one (or more) of the four classes and still have a complete classification? Such a question will always arise when our classification is not unique. In the present case, however, it must be answered in the negative: 8 is only a cube (it is neither a brick, nor a beam, nor a wedge); 18 is only a brick; 12 is only a beam; and 30 is only a wedge. Thus, if we were to eliminate any class, the classification would cease to be complete; if, for example, we were to eliminate the class of cubes, 8 would be a solid number that could not be classified in the remaining categories of bricks, beams, and wedges. Therefore, all four of the classes are necessary.
4. *What is the least number that is a cube, a brick, a beam, and a wedge?*
We have, of course, not yet established that there is any such number, but in giving the smallest one the question of existence is also established. Consider

$$512 = 8^3 = 16^2\times2 = 4^2\times32 = 4\times8\times16.$$

Thus, 512 has all four properties. To show that it is the smallest such number we merely have to check the six cubes below 512 (recall that 1 is not allowed as a factor). But, if p is prime, p^3 can only be a cube. Thus, we are left with 4^3 and 6^3, neither of which can be a brick. Hence, 512 is the smallest number having all four properties.

Once the student has become familiar with the principle of prime factorization (even if she has not yet demonstrated it), questions such as these become relatively easy.

THE "SEMINARIO OROTAVA DE HISTORIA DE LA CIENCIA"

José L. Montesinos Sirera, Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Espanha

The Seminario Orotava de Historia de la Ciencia was born in the 1991-1992 school year on the island of Tenerife (Canaries). It is a product of an agreement among professors at the intermediate level, the University (at La Laguna) and the Canarian government's Ministry of Education, which provides its funding. It is geared toward the training of teachers in the history of science and from an interdisciplinary perspective, with participation primarily from teachers in mathematics, physics and philosophy.

In that first year the initial series of twenty conferences took place, taking the history of Greek geometry as its subject. Geometry served as the focal point for an interdisciplinary study of Greek Culture. During the course, students examined the passage from myth to *logos,* the attempt to explain reality by means of reason and the cracks which soon weakened those mental constructions: the paradoxes of Zeno and the discovery of incommensurable quantities on the part of the Pythagoreans, the infinite processes which upset the Apollonian and harmonious conception of the Greek world and to which reason itself gave way; the colossal efforts by Eudoxus to make them fit with the method of exhaustion and with a treatment of incommensurable magnitudes, that two thousand years later Dedekind would convert into the definition of the real number.

Also studied were Platonic and Aristotelian conceptions leading to the subsequent history of thought in the western world, and the first model of a hypothetical-deductive system: Euclid's *Elements*, the *magnum opus*, a compilation of all Greek mathematical learning up to the third century, B.C. The *Conics* by Apollonius and *The Method* by Archimedes ended that first series.

During the 1992-1993 school year, the Seminario Orotava studied the period from Archimedes to Leibniz in a series of twenty-two conferences. Already deep into the Christian era, we traced the steps toward the concept of the infinite, which, under the protection of the new God, had established itself at the forefront of mathematics and cosmology, physics and theology.

Thomas Aquinas, Nicholas of Cusa, Giordano Bruno, Galileo, Descartes and Newton were the figures studied, among others, figures who shaped the new universe, radically different from the Greek Cosmos, and who laid the foundation of our modern science. Infinitesimal calculus and Newtonian physics, the Cartesian method and the metaphysics of Leibniz, give rise already to the faith in unlimited progress.

The series during the 1993-1994 school year was entitled "From Triumphant Science to the Loss of Certainty," and the period under question was from 1700-1900. The strengthening and subsequent peak of Newtonianism with its influence in the realms of science and thought in general, helped to undermine the foundations of the ancient regime and to push forward, from historical optimism, a new project of civilization: the Enlightenment.

Mathematics puts itself at the service of the natural sciences and they compose a virtual symphony of the infinite at the expert hands of Euler and the Bernoullis, Monge, Lagrange and Laplace. However, some suspicion is caused by these unfounded manipulations of the infinite; the bishop Berkeley, a good mathematician and brilliant theologian, will denounce those mathematicians who do not believe in the mysteries of religion and instead have transferred their faith to infinitesimals and differentials. At the opposite extreme, Voltaire, the caustic freethinker, makes inflamed eulogies to Newton and his scientific work, and accepts with enthusiasm and admiration that strange method of the infinitesimals which obtains such sublime results.

Already into the 19th century, we saw how the discovery of non-Euclidean geometry puts in question an ingenuous "mathematization" of reality and establishes the need to construct a solid logical structure which might avoid the dangers of intuition. In the second half of the 19th century, chemistry acquires the status of science, and physics, whose development was spectacular, contemplates the joining of heat and mechanics, light and electromagnetism. Then we studied the figures of Maxwell, Faraday and Hertz. It is the century of German mathematics: Gauss, Riemann, Dedekind and Weierstrass manage to make infinitesimal analysis more rigorous, and Cantor, with the creation of the theory of sets and transfinite numbers, presents a brilliant and profound theory of the mathematical infinite which for some people, Hilbert among others, opens a paradise of possibilities, while for others (constructivists such as Kronecker and Poincare) it will constitute a virus in the body of mathematics, responsible for the appearance of antinomies. We ended here, with open uncertainty due to the paradoxes of the theory of sets, the period between 1700 and 1900.

During the 1994-1995 school year, the fourth year of our program, we faced the difficult and exciting period in which humanity fully enters the "technological age." The positive sciences, high and lofty from their success in dominating nature, displace metaphysics as the foundation of culture, and create the dream of endless progress; and yet, the word most often heard at the beginning of the 20th century in European intellectual circles, in relation to science, is "crisis."

A crisis of development? Notions that up until then had been apparently clear about the natural world become essentially problematic. On one hand, classic determinism and causation are shattered to make way for complex relationships of indeterminacy and for a new causation in quantum mechanics; on the other hand, space and time--until this point separate--become intertwined in a new entity: the space-time of special and general relativity.

A crisis due to its loss of importance and meaning in relation to life? For Husserl, the exclusivity with which the positive sciences let one determine the entire vision of the world of modern man and let one be dazzled by the prosperity made possible by them, signifies at the same time an indifference to the truly decisive questions for authentic humanity.

By virtue of its technological productivity, science is assumed by western countries to be an intellectual authority on its subjugating interventionism in public life; consequently, philosophy is being oriented toward epistemology that reflects on the foundation, methods and structure of science from the perspective of formal logic and analysis of language. The enormous advances being made in all fields of mathematics are not happening without an intense struggle between the diverse philosophical schools of mathematics concerning its foundations. Logicians, formalists and intuitionists struggle for their diverse ways of understanding mathematics, whose great problem will continue to be that of the continuous and the infinite which constitutes it. The optimism of Hilbert toward the solvability of any mathematical problem crumbles with the results of Godel: in any formal system in which arithmetic can be developed there exist legitimate propositions from the system which are impossible to decide on.

A crisis as a consequence of the beginning of a new historical-cultural cycle? Is this ferocious 20th century, in which ideas are charged with the most destructive powers, put at its service by a blind technology, and in which nature is mortally threatened by man without attributes, by man who quantifies, a century of transition?

Seminario Orotava has recently opened a new activity whose declared purpose is to introduce the History of Science in Secondary School. As a result, two new subjets are now offered to the students in the curriculum: in the first one they study the difference between science and pseudoscience throught the opposition of astrology and astronomy, alchemy and chemistry, etc.; in the second subjet a more conventional approach to the history of science is made and science is studied in its chronological development. Interdiciplinarity, trademark of the Seminario Orotava, is used to compare the old, modern and contemporary ways of observing and studying nature: from a closet Cosmos and a living world to an open Universe in evolution.

The Seminary's philosophy revolves around two aspects which seem fundamental to us nowadays: promoting the study of science history from a humanistic perspective, and using a working method that is interdisciplinary.

We are all familiar with the critiques that have been made of scientific and technological development which have come from different perspectives and ideologies, from Heidegger, Husserl, the Frankfurt School or the counterculture. Today, near the end of the century, we believe that the main challenge facing us is, admitting the inescapable need for science and technology, to diminish its undesirable effects and to channel its power toward beneficial effects which might help improve the quality of life on our planet.

The humanization of scientific and technological developments is, first of all, a social and political problem. It is essential that it penetrate the mentality of society to the point of integrating itself into the very culture. It is necessary to develop as a top priority a cultural and educational policy of promotion which might begin by sponsoring places to meet, to come together, to dialogue and to make an effort at mutual understanding. Only out of understanding will progressive integration come. The role that this seminary has played and wishes to continue playing is that of serving as a meeting place for specialists in the sciences and humanities.

The second identifying note that the Orotava Seminary would like to contribute, related necessarily to the above, involves a working method that is interdisciplinary.

The presence there of teachers in philosophy, physics, mathematics, biology or history sufficiently justifies the objective of breaking away from the "unculture of the specialist" which we all suffer in overabundance. We also believe that this rupture can be better provided by education at the intermediate level than by the university, given the tradition of terminal specialization in the latter. A center of intermediate education is, in itself, a meeting place among specialists--not terminal cases--in different subject matters. That would explain why an experience of this kind has found a more fertile ground here. But what we should point out is that the seminary has also served as a meeting place for professors from the secondary level and from the university. We have opened a path in this sense and initiated a fruitful, permanent collaboration among one another, which can be useful when it comes to looking for team-work formulas.

Beyond the successes and failures, both of which there have been, logically enough, we have the conviction that we are heading in the right direction and that there is still much to be done, as we are moving in almost virgin territory.

José L. Montesinos Sirera
Seminario Orotava de Historia de la Ciencia
(Translated from Spanish to English by Linda Ribera)

A RELAÇÃO ENTRE O LÓGICO E O HISTÓRICO: CATEGORIA SUBSIDIADORA DA INVESTIGAÇÃO HISTÓRICA PARA ELABORAÇÃO DE PROCEDIMENTOS DE ENSINO NA MATEMÁTICA.

José Roberto Boettger Jardinetti, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, S.Paulo, Brasil

O objetivo desta comunicação é apresentar alguns considerações iniciais sobre a categoria do lógico e do histórico enquanto categoria orientadora da função metodológica da investigação histórica para a elaboração e execução de procedimentos de ensino na matemática.

No meio pedagógico da chamada educação matemática no Brasil, tem sido frequente apontar o recurso da investigação histórica como uma alternativa eficaz para a transmissão e apropriação de uma concepção dinâmica dos conteúdos matemáticos. Entretanto, tem-se verificado que os procedimentos de ensino tem sido respaldados numa lógica da justaposição, pois, os conceitos tem sido apreendidos e assimilados de forma desconexa, estanque, aleatória.

A compreensão da importância da investigação histórica para elaboração e execução de procedimentos de ensino tem sido frequentemente concretizada em ações que restringem-se tão somente à um carater meramente ilustrativo e informativo. Assim, tem sido comum verificar livros didáticos em que no início do tópico conceitual a ser desenvolvido, há a apresentação de uma pequena introdução histórica do assunto, ou a mera apresentação de fatos curiosos relativos à vida de um matemático ilustre, à origem de um determinado símbolo ou conceito. Há também casos em que acredita-se que o simples fato de se falar em história da matemática já estaria possibilitando ao aluno a compreensão da lógica dos conceitos como que o fato de percorrer a história da matemática fosse a "solução mágica" para a superação da ausência de relação entre os conceitos.

A posição que defendo nesta comunicação é que a função da investigação histórica na elaboração e execução de procedimentos de ensino não pode se limitar à mera função ilustrativa, mas deve apontar seu carater verdadeiramente instrumental de intervenção na explicitação e compreensão da lógica dos conceitos.

Esse resgate se dá inicialmente pela necessária diferenciação entre a função metodológica desempenhada pela investigação histórica no momento da fundamentação teórica do educador, da função metodológica da investigação histórica no momento da elaboração e execução de procedimentos de ensino.

Cito como exemplo dessa necessária diferenciação, um momento de minha dissertação (Jardinetti,1991) em que me vi obrigado a abordar algumas questões pertinentes ao papel da investigação histórica. Diante da necessária compreensão da relação entre o abstrato e o concreto no ensino de geometria analítica, pude constatar que a evolução histórica da geometria analítica caracterizava-se como um processo de elaboração de abstrações. A geometria analítica surgiu com Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665), com a utilização dos conceitos algébricos desenvolvidos até essa época, na análise dos procedimentos geométricos realizados pelos antigos geômetras gregos. Essa utilização determinou uma unificação entre os processos algébricos e geométricos existentes, propiciando um avanço para a compreensão das próprias especificidades presentes na álgebra e na geometria. Até então, os conceitos algébricos não se constituíam em um instrumento matemático hegemônico de investigação. Os primeiros conceitos algébricos eram aceitos mediante a comprovação geométrica segundo os procedimentos da geometria euclidiana. A trajetória histórica de elaboração da geometria analítica retrata, portanto, dois momentos: o nascimento dos primeiros resultados algébricos aceitos geometricamente (na medida em que a geometria euclidiana era a forma existente mais avançada da produção matemática) e o desenvolvimento posterior de uma linguagem algébrica própria, com Viete (1540-1603) e o próprio Descartes, em que ocorre uma desvinculação da justificativa geométrica, transformando-se num instrumento de investigação dos conceitos geométricos que foram sua origem.

Assim, a essência da lógica dos conceitos da geometria analítica delineava-se nas constantes realizações de suas abstrações ao longo da história. Percebi, naquele momento, a necessidade de utilizar a investigação histórica como um fundamento para a compreensão da lógica de elaboração da geometria analítica.

Entretanto, a compreensão de tais realizações históricas não é o suficiente para a execução de sequências de ensino eficazes para a garantia da assimilação da lógica dos conceitos da geometria analítica.

Para se entender a essência da lógica de elaboração da geometria analítica, isto é, a unificação entre os processos algébricos e geométricos presentes nos trabalhos de Descartes e Fermat, é necessário compreender a dicotomia entre álgebra e geometria até então existente. Tal compreensão inicia-se com a análise da álgebra geométrica grega quanto às limitações do sistema numérico grego (Livro II dos Elementos de Euclides (330 a.C.- 275 a.C), determinando resultados algébricos atrelados à sua representação geométrica (Jardinetti,1991,p.81). Quanto à noção de coordenadas geométricas, a análise histórica se deu nas obras de Apolônio de Perga (aproximadamente 260 a.C.-200 a.C), especificamente as Proposições 11, 12 e 13 do Livro I das Cônicas (Jardinetti,1991,p.114). Mas a sequência de ensino inicia-se com as noções de coordenadas, sistema cartesiano, sequência essa que não se apresenta na mesma ordem histórica de elaboração da geometria analítica.

Em outras palavras, a história dos conceitos da geometria analítica não se realiza na mesma sequência lógica das etapas essenciais de sua evolução presentes nos procedimentos de ensino. A história factual, cronológica, apresenta uma série de informações, elementos, caminhos não só desnecessários para a compreensão, pelo educador, da lógica de elaboração dos conceitos, como até mesmo desviadores em relação aos aspectos fundamentais. O educador, não dispondo de um instrumental metodológico-investigativo (a relação entre o lógico e o histórico) não consegue diferenciar os momentos fundamentais daqueles não fundamentais com vista a elaboração e execução de procedimentos de ensino relacionais e dinâmicos.

Assim, não se trata de reproduzir a história, mas sim, de reproduzir a essência lógica das relações do conhecimento na sua forma atual, os traços essenciais que sintetizam de forma lógica o desenvolvimento histórico desse conteúdo. A investigação histórica necessária para a elaboração de sequências de ensino não se traduz na mera identificação com a história propriamente dita dos conceitos.

Se, por um lado não há essa identificação, por outro lado, trata-se de se promover na investigação histórica, depurações com vista a determinar os aspectos essenciais para a compreensão da lógica dos conceitos e fundamentais para a elaboração e execução de procedimentos de ensino coerentes à essa lógica. Enfim, trata-se de promover mediações.

Uma dessas mediações para se ir à investigação histórica é a dialética da relação entre o lógico e o histórico tal como é concebida no clássico texto de Marx, "O Método da Economia Política" (Marx,1983:218-226).

Marx, após introduzir a discussão sobre o método cientificamente correto de reprodução do concreto no pensamento (do abstrato ao concreto), direciona o leitor a concluir, por meio de inúmeros exemplos tirados da economia política, que a história da realidade objetiva não se identifica necessariamente com o processo de sua apreensão no pensamento. Entretanto, se não há essa identificação imediata entre o processo de desenvolvimento do conhecimento e o próprio desenvolvimento histórico da realidade objetiva, mesmo assim, o estágio mais desenvolvido do objeto permite captar os aspectos essenciais de seu desenvolvimento histórico. O lógico orienta o histórico, isto é, na lógica do conceito pode-se captar os elementos de sua formação, elementos esses que não retratam toda a sua trajetória histórica, mas sim seus traços históricos essenciais.

Da mesma forma a história da matemática não se desenvolve necessariamente na mesma ordem do desenvolvimento lógico de seus conceitos apresentados nos procedimentos de ensino. Entretanto, na lógica de determinado tópico matemático, em seu estágio mais desenvolvido, encontram-se elementos que permitem compreender a própria evolução histórica de seus conceitos.

No caso da geometria analítica, em sua estrutura conceitual hodierna, percebe-se uma etapa histórica da matemática em que os procedimentos algébricos unificaram-se aos procedimentos geométricos já formados. Por exemplo, a elipse evoca, em sua definição, a propriedade de lugar geométrico (o conjunto de pontos do plano que se caracterizam por uma mesma propriedade), propriedade essa, que é quantificada pelo tratamento algébrico. Assim, a investigação histórica é orientada para a análise da geometria euclidiana: a de se entender os procedimentos geométricos de construções de curvas aí desenvolvidos e, então, captar nesse processo já constituído, os gérmens do tratamento algébrico. Nota-se, portanto, que o lógico orienta o histórico, mas o histórico é entendido em seus aspectos essenciais: não se foi analisar toda a história da geometria euclidiana, mas sim, buscar entender a justificativa do tratamento geométrico por construção, por que a álgebra surge nesse processo, em que momento e quais as limitações aí envolvidas.

DUARTE(1987) partindo da análise da obra de Marx, afirma que a lógica do produto, isto é, a fase mais desenvolvida de um conceito, orienta a elaboração de uma sequência lógica de seu desenvolvimento histórico, a chamada sequência lógico-histórica dos traços essenciais. Quer dizer, o lógico orienta a captação dos traços históricos essenciais; entretanto, esses traços não se apresentam numa sequência considerada mais lógica do ponto de vista da própria lógica do processo. A lógica do produto revela e esconde a lógica do processo (o histórico).Mas, mesmo assim, essa lógica do produto acaba sendo a chave para se compreender a lógica do processo e, então, selecionar, depurar os aspectos essenciais mais de acordo com essa sequência lógico do processo.

Daí a importância de procedimentos de ensino orientados segundo uma sequência lógico-histórica, isto é, uma sequência lógica não sobre o ponto de vista cronológico de seu desenvolvimento histórico, mas sim, lógica do ponto de vista da lógica intrínseca aos aspectos essenciais do desenvolvimento histórico dos conceitos, desenvolvimento de aspectos que não se sucedem necessariamente na sequência cronológica de sua história.

A investigação histórica inicia-se a partir da lógica da etapa mais desenvolvida, isto é, a lógica do produto. Essa lógica do produto revela aspectos da história, entretanto, ao se lançar à investigação histórica, isto é, ao se lançar à caracterização dos aspectos essenciais para a compreensão dos conceitos já desenvolvidos, podem-se descobrir aspectos que estão hoje colocados de forma secundária e que por isso, contribuem para uma compreensão parcial, fragmentária da lógica dos conceitos. Assim, se o lógico orienta e esconde o histórico, o histórico acaba determinando um esclarecimento do lógico. A sequência lógico-histórico é o resultado da intervenção da investigação histórica, pois, trata-se da elaboração de uma sequência de ensino coerente à organicidade lógica dos aspectos essenciais do desenvolvimento histórico detectada. A dinâmica da relação dialética entre o lógico e o histórico resgata o caráter interventor da investigação histórica para a compreensão da lógica dos conceitos atuais, pois, orienta a elaboração e execução de procedimentos de ensino segundo uma concepção dinâmica e relacional para apropriação de seus conceitos.

Concluindo: é inegável a importância da investigação histórica dos conceitos matemáticos na elaboração e execução de procedimentos de ensino dinâmicos e relacionais. Entretanto, a real dimensão de sua função investigativa não se limita à seleção de fatos curiosos, ilustrativos, meros enxertos de elementos históricos na apresentação do conteúdo matemático. É muito mais que isso. É necessário que se entenda que a investigação histórica necessária para a elaboração de sequências de ensino não se identifica necessariamente com a história dos conceitos; sendo assim, optar pelo recurso metodológico da escolha de fatos históricos ilustrativos ao conteúdo abordado em nada garante que a lógica desse conteúdo esteja refletindo a lógica intrínseca ao desenvolvimento histórico dos conceitos (desenvolvimento este que não se apresenta na linearidade lógica necessária para a apreensão dos conceitos). Para proceder à investigação histórica necessária para a elaboração de sequências de ensino é necessário que se faça mediações, depurações. Uma dessas mediações é a relação entre o lógico e o histórico. Essa relação fornece elementos para a elaboração de sequências lógicas de ensino, mas de forma que essas sequências reflitam a história não em seu aspecto sequencial-cronológico, mas sim, quanto à lógica intrínseca a essa historicidade.

Referências Bibliográficas

DUARTE, Newton. A relação entre o lógico e o histórico no ensino da matemática elementar. São Carlos: UFSCar, 1987. 198 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, 1987.

JARDINETTI, José Roberto Boettger. A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da geometria analítica a nível do 1. e 2. graus. São Carlos: UFSCar, 1991. 297 p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, 1991.

MARX. Karl. O método da economia política. In:_________. Contribuição à Crítica da Economia Política. 2.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1983. p. 218-26.

Bachelard and the Epistemological Obstacle: a Critique from a Contemporary view of the History of Mathematics.

Leo Rogers, Roehampton Institute London

Introduction

Our problem is to consider how a knowledge of the history of mathematics can inform our practice and help us to develop a critical philosophy which may suggest some alternative and coherent methodological approaches to the teaching of mathematics. Of course, this view does not exclude the development and use of theories of learning as explanatory devices; and the more recent movement towards the socio-cultural view of the learning of mathematics currently found in forms of social constructivism. In fact, there appears to be considerable evidence in the history of mathematics which can support the social constructivist point of view. An important part of many theoretical approaches to the problems of learning mathematics has been the use of the idea of the 'epistemological obstacle'. The origin of this concept is attributed to Gaston Bachelard whose philosophy of Science was developed in a series of books published between 1927 and 1953.[1]

Bachelard proposed three stages in the development of individual intellectual maturity; the **concrete** where we are concerned with initial images of phenomena and concerned with the unity and complexity of nature; the **concrete-abstract** stage where the mind links together physical experience with arithmetical and geometrical models and applies them in a simple philosophy. He admits however that this situation is paradoxical since the abstract ideas are represented by intuitions which arise from the senses. The third stage is that of the **abstract** where the mind is able to detach itself from immediate experience and consider purely theoretical properties and relationships. Parallel to this, there are three stages to scientific investigation; a state where the mind is **child like and materialistic**, aroused by a naive curiosity at phenomena in the world and collecting instances of events without forming any coherent explanations. In the second stage the mind is **pedantic;** wedded to its first abstractions, secure in dogmatism, deductive in procedure and relying on authority to verify its claims. Finally the state where the mind is concerned with the **abstract and essential**, which are the problems of induction from experiment and the formation of coherent theory.(1938 p.8-9)

There is some sense in which he uses these broad descriptions to draw parallels between the development of the mind and the development of science, but there does not seem to be any supporting argument why this should be so, neither is there any basis for accepting that these assumptions would be true in individual cases, always and everywhere.

Bachelard's Model of Scientific Change

In the context of the history and the learning of mathematics, the most widely quoted work is his "La Formation de L'Esprit Scientifique" (1938) where many of his ideas of the progress of science are expressed. The model of

scientific change is described by proposing four principal ideas;
a)Epistemological breaks are used to characterise the way in which scientific knowledge separates from and even contradicts our 'common sense' experiences and beliefs; it places the objects of our ordinary experience into new categories which reveal properties and relations which are not accessible by simple sense experience. This placing of the objects into new categories also shows how science develops not only by breaks with ordinary experience but also by breaks with previous scientific theories.[2]
b)Epistemological obstacles are concepts or methods that prevent an epistemological break. He claims that common sense reliance on images actually produces epistemological obstacles. It is not clear what he means by images, but from the examples given he appears to mean metaphors as well as mathematical procedures; he claims that images have a heuristic use but no explanatory force, and cites as an example the Bohr 'planetary model' of the atom which does not now exist in contemporary accounts of atomic theory, and also how classical mechanics impeded the development of the couterintuitive aspects of quantum mechanics. Experimental methods themselves can be obstacles; as in the case of the method of direct observation which in the seventeenth century led to the break with Aristotelian science; but later reliance on direct observation itself became an obstacle to the nineteenth century development of atomic theory.
c) An epistemological profile is an analysis of a given individual's understanding of a scientific concept. The profile carries a record of the epistemological obstacles hindering the thought of an individual.
d) An epistemological act corresponds to a scientific breakthrough. So an act is not just a change, but it represents a clear advance over the past. In this respect he claims that it is quite appropriate for the historian of science to use the standards and values of the present to judge the past. An epistemological act is not only the rejection of past science, but it can also be the preservation of past science through a reformulation of old ideas in a new and broader context of thought. Past results are replaced by generalisations which reject these results as unconditionally correct, but preserve them as correct under certain restricted conditions.

Bachelard distinguishes between the **story** of science; an account of the past scientific achievements that have contributed to our present body of knowledge, and the **history** of science; which includes the aspects that have no positive place in the origins of current scientific ideas. As examples, he contrasts Black's work on 'caloric' which although superseded did result in a permanent achievement of the concept of specific heat with Phlogiston theory which is outdated because it is based on a fundamental error.

In contrast to the fallibility and incompleteness of science, he claims that mathematics, being an objective body of knowledge does not suffer from the problems outlined above and he says,

"En fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connait des périodes d'arrêt. Elle ne connait pas des périodes d'erreurs. Aucune des thèses que nous soutenons dans ce livre ne vise donc dans la

connaissance mathématique. Elles ne traitent que de la connaissance du monde objectif." (1993 p.22)

So mathematics is a marvel of regularity. Because in his view it is an objective science it does not suffer from wrong ideas, but just pauses in its inexorable progress while a particular concept is redefined. It would seem then, that according to Bachelard, there are no epistemological obstacles in mathematics because the idea of the epistemological obstacle does not apply to the objective world.

A critique of Bachelard's view

For Bachelard, the history of science is seen as a history of concepts, where the ideas themselves are considered to be constantly improving. It is a story of great men and their accomplishments, seen in a context of a science which is rejecting the old, inappropriate and wrong ideas and fashioning new concepts which become ever more abstract and general in their application. The situations which generate the obstacles are our naive interpretations of the physical world which need to be theoretically restructured and redefined before we can improve our explanations. In this sense, errors cannot be avoided; they are part of the initial exploration in any field of science.

This internalist view gives rise to a number of difficulties. It neglects the important social contexts in which science and mathematics arise, and the possibility of alternative interpretations of these situations. It begs questions about the continuity of records by its classification of 'history' of science as being irrelevant to modern science and 'story' of science as being the important part of the data because since Bachelard's time, more detailed research in many areas has shown that other information has come to light about the 'path of progress' of scientific ideas, and that earlier assumptions about the nature of the problems have themselves been rather naive. It also poses problems about the interpretation of the data. Viewing past situations from a contemporary point of view suffers from the danger that the interpretation will be in terms of concepts held by the observer, and not in terms of the concepts contained in the situation being investigated. Finally, history of science and mathematics is neither science nor mathematics, the claims that scientific theory and mathematics are in some sense objective cannot apply to the history of these areas of knowledge, so claiming that the progress of science or mathematics is in some way value free and therefore represents the 'progression of the scientific spirit' is misguided. Unavoidably present day mathematics and science influences the points of view, the choice of interpretations, and the value systems which are applied by people looking at the past.

Methodological Considerations for Social History of Mathematics

The influence of present day mathematics obstructs the attempt to treat history objectively and to do justice to the mathematics of the past. The social history of mathematics recognises the social position of mathematicians in a particular period, their ways of communication, their implicit aims, the ways they justified their activities, and so on. It recognises the concept of mathematics as a cultural activity, and all that the idea of 'cultural activity' entails. White (1947) claimed that "the locus of mathematical reality", is the culture in which the individual exists, and put forward two propositions:

(I) Mathematical truths have an existence and validity independent of the 'human mind'.

(II) Mathematical truths have no existence or validity apart from the 'human mind'.

These meanings of 'human mind' are explained where: (I) refers to an individual person and (II) refers to the human species or cultural group.

White suggests that mathematical truths enter the mind of each individual person from the 'outside'; they have no existence or meaning apart from the cultural tradition in which they are found, and that mathematics (together with all other aspects of human activity), is the cumulative product of ages of endeavour. Wilder (1981) took up these ideas, and elaborated the concept of culture as applied to mathematics, its teaching traditions, historical evolution, and its current development. Later, studies in "ethnomathematics" appeared (for example, Gerdes 1981, D'Ambrisio 1985). Here, researchers looked at 'native' or 'local' mathematical practices; the contexts of mathematics, its uses, its learning and teaching in other cultures, and in contemporary contexts outside the usual recognised institutions. See for example Harris (1991),Nunes (1993).

It would appear that Bachelard is taking White's sense (I) above to refer to the development of science as an objective phenomenon without referring it to sense (II). However, mathematical works must be judged in relation to their contemporary context, and terms like 'mathematician' and 'scientific community' have to be differentiated according to the relevant historical period.[3] Locating the history of mathematics, and mathematics itself in the social domain is immediately problematic for its objectification as understood in the traditional sense. There is no universal truth, and so there are no universal epistemological obstacles.

The consideration of social factors is necessary for a full understanding of events in mathematics since the development of mathematics inevitably consists of social interactions between mathematicians. We have to decide how these social contacts should be valued and what they actually contribute to the explanation of the development of mathematical theories and practices. It will of course, depend on the personal point of view of the historian and the context in which the explanation functions. In this case, the identification of the epistemological obstacle is located in a social complex of cultural dimensions. If the epistemological obstacle is seen as a universal problem, then its nature has to be justified for all cases, not just the most spectacular or the most persistent examples recorded in the history of the sciences. And what do we make of the epistemological profile ? There is no particular reason why the epistemological profiles of individuals studying the same problem should be the same.

The Problem of Identification

If we accept the propositions that mathematics arises from the culture and that it is interpreted and elaborated over generations, we then have to abandon the inductivist interpretation of its history. Mapping the development of mathematics by the achievements of 'great men' or by identifying the precursors of current theories misrepresents the whole process.

One of the significant problems we have to tackle here is that we view other cultures - inevitably - from our own standpoint. We have only relatively recently been made aware of this 'cultural bias', and If we look at much of the popular writing in history of mathematics up to about the early 1970's, for example in Boyer (1968), and Kline (1972) we now see how closed the authors were to the fact that mathematics could be represented by something which was not within the Western European tradition and did not conform to current concepts of proof. [4] This bias has deep roots within Western European thinking; the idea of the 'rational man' being based on the Enlightenment view of cultured male society which viewed 'others' - that is, non-male, non-white, non-christian - as people endowed with lesser capabilities, even as 'savages'.

Joseph (1991) has searched the specialist literature which is difficult to access and produced a book which brings out the very important and often ignored contributions of cultures outside Western Europe.[5] Even so, there are difficulties with this. We recognise other examples of human activity as mathematics because we think it looks like our own, or we interpret what the people of the past have done in terms of our own mathematical ideas. The arguments about Babylonian 'quadratic equations' or Greek 'geometrical algebra' have given us a very different view of what may have been happening. Different interpretations become possible if the sources are investigated by specialists in a particular period. For example, Hoyrup (1991) explains some of the difficulties in the interpretation of cuneiform script ,

"....most cuneiform signs are plurivalent. They may carry one or several logographic meanings (not necessarily related), to which come one or more groups of phonologically related symbolic readings...... To this comes, secondly, the terminology itself. (which) was ultimately derived form daily language - but often technical meanings cannot be guessed from general meanings....they have to be derived from the mathematical procedure used - which itself is hard to get at, if one does not understand the terminology."

(see also Robson 1996).[6] We may think this only happens with episodes of history which are well in the past, but even the not so distant past can be interpreted in a number of different ways as I have pointed out in my review (Rogers, 1990)[7] of Fauvel's (1988) collection of the 'non - mathematical' aspects of Newton's work. Here, Rattansi (1988) suggests that Newton's metaphysical beliefs were partly responsible for his formulation of the concept of 'force'. This puts 'force' (and its formulation in the symbolic relationship '$F = ma$') into the realms of mysticism. It is not too difficult to find other examples of influences from outside mathematics shaping the concepts and processes of even recent mathematics. Van Stigt's (1991) detailed account of the development of Brouwer's Intuitionism is another good example.

Bos (1984) provides a number of examples to show us how the social issues in history can influence mathematics and contribute to curriculum and pedagogy, anticipating and supporting Bishop's (1988) views on the social construction of meaning. The more that the evidence for this kind of approach to historical problems accumulates, the harder it is to ignore and to explain.

How do we characterise mathematics? As mathematics develops to deal with even wider generalisations, more complex relations, and more abstract concepts, we have another problem. While a broad characterisation is open to a variety of interpretations and able to adapt itself to new and unforeseen circumstances, we may at the same time be claiming that some aspects of all human activity are "mathematical". What criteria do we have for deciding where, say, "basket - weaving" stops and "mathematics" begins?

Interpreting the History of Mathematics for the Teaching of Mathematics

While I believe that Bachelard's conception of the epistemological obstacle is at best a misguided and at worst an inappropriate tool for the analysis of the history of mathematics, we still have many questions to answer. Even if we regard mathematics as objective and outside the application of this concept, we still have to explain the 'pauses' in the history of mathematics and their relation if any, to the teaching of mathematics in the classroom. Many historical examples are given where it took a long time for a particular concept to be accepted and recognised as useful; fractions, decimals, negative numbers, complex numbers, etc. and many more; and it is claimed that these problems are the same as those that students meet today. But this is not true. If we subscribe to the social context view then we must admit that today's classrooms are different from the places where these ideas first arose, and that the individuals involved in their first formulation and refinement are not like today's students in any way.

I do not discard entirely the idea of the epistemological obstacle. I do however claim that it will not work when we come to examine the history of mathematics and then try to apply the obstacles discovered there to today's students in today's classrooms.

Brousseau's (1983) approach from the psychological point of view locates the problem in the classroom and seems to be much more productive and immediately applicable. It places the problems within a theory of teaching and learning mathematics and in Bachelard's sense it is looking at individual epistemological profiles of students and trying to make generalisations out of the data. This of course assumes that such generalisations can be made.

In a seminal paper, Bos and Mehrtens (1977) provide us with justifications for studying the social history of mathematics when they say that the responsibility for the study of the history of mathematics is to;

"...provide terminology, concepts and clear points of view that can serve in a discussion on mathematics in modern society. ...if there is no language, no conceptual apparatus, to discuss the connections of mathematics and society,we are hardly in a position to observe the phenomena....As mathematics is a rather esoteric science, history of mathematics at universities has a special

educational responsibility. Basically this is the responsibility for an aspect of the language and the ways of thinking with which we approach the present (and thus also the future).... These considerations clearly imply that history of mathematics should encompass the social context." (pp 11-12)

It seems to me that there is a scarcity of good material on the history of teaching mathematics. It is here that the epistemological obstacles relevant to the classroom are formed.

Notes

1. For a list of these works (including Bachelard 1938, below) see Gutting(1989) page 12

2. These properties and relations are theoretical constructs derived from a particular way of interpreting the objects and phenomena in question.

3. It should be noted that until about the latter part of the eighteenth century the majority of mathematics was not produced by people who worked exclusively on mathematics. Most 'mathematicians' were part of a wider community which provided them with other interests, artistic, practical and scientific. Professionalisation of mathematics in terms of the provision of university posts for example, is a rather late development.

4. I quote without comment Kline (1972 pages 22-23) on the mathematical achievements of ancient civilisations: *"...mathematics in the two civilisations was not a distinct discipline, nor was it pursued for its own sake. It was a tool in the form of disconnected simple rules which answered questions arising in the daily life of the people. Certainly nothing was done in mathematics which altered or affected the way of life. Although Babylonian mathematics was more advanced than the Egyptian, About the best one can say for both is that they showed some vigour, if not rigour, and more perseverance than brilliance......it is natural to compare the two civilisations with the Greek, which succeeded them. By this standard the Egyptians and Babylonians were crude carpenters, whereas the Greeks were magnificent architects....."*

5. Joseph (1991) has nine pages of references to bibliography on non-European mathematics, most of which is very difficult to find outside specialist university collections.

6. Similar problems arise in the contextual interpretation of the Pythagorean techniques of the 'application' and 'transformation' of areas. (Unguru 1975).

7. These problems were recognised much earlier by Burtt (1924) who states (p. 20); *"...Newton...not only found a precise mathematical use for concepts like force, mass, inertia; he gave new meanings to the old terms space, time, and motion, which had hitherto been unimportant but were now becoming the fundamental categories of men's thinking. In his treatment of such ultimate concepts, together with his doctrine of primary and secondary qualities, his notion of the nature of the universe and of its relation to human knowledge....He was presenting a metaphysical groundwork for the mathematical march of mind...."*

Bibliography

Bachelard, G. (1993) (1938)
La Formation de L'Esprit Scientifique: contribution a une psychanalyse de la connaissance. Paris J. Vrin

Bishop, A.J. (1988) Mathematical Enculturation Dordrecht Kluwer

Bos,H.J.M. and Mehrtens,H.(1977)
"The Interactions of Mathematics and Society in History: Some Explanatory Remarks."
Historia Mathematica 4 (1) 1977 (7-30)

Bos, H.J.M. (1984)
"Mathematics in its Social Context: A Dialogue in the Staffroom, with Historical Episodes."
For the Learning of Mathematics 4, (3) 1984 (2 - 9)

Brousseau, G. (1983)
"Les Obstacles Epistemologiques et les Problemes en Mathematiques"
Recherches en Didactiques des Mathematiques 4 (2) 1983 (165 - 198)
(This is the rewriting of an earlier paper of 1973.)

Boyer,C. (1968)
A History of Mathematics N.Y. Wiley

Burtt, E.A. (1925) (and repr.)
The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science. London Routledge

Fauvel, J. et.al. (Eds.) (1988) Let Newton Be! Oxford O.U.P.

Gerdes, P. (1981)
"Changing mathematics education in Mozambique"
Educational Studies in Mathematics 12 (4) 1981 (455 - 477)

Gutting,G.(1989)
Michel Foucault's Archaeology of Scientific Reason Cambridge C.U.P.

Harris, M. (1991) Schools, Mathematics and Work Basingstoke Falmer

Nunes, T. et.al.(1993)Street Mathematics and School Mathematics N.Y. C.U.P.

Hersh, R. (1979)
"Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics."
in Advances in Mathematics 31 (1) 1979 (31 - 50)

Hoyrup, J. (1991)
"Changing Trends in the Historiography of Mathematics"
Contribution to the conference on *Changing Trends in the Historiography of Science*,
Corfu 27 May to 1 June 1991. Preprint: University of Roskilde, Denmark

Robson, E. (1996)
"Learning Arithmetic in Ancient Mesopotamian Schools" (24 February 1996)
Research report given at the meeting of the British Society for the History of Mathematics.

Unguru, S. (1975)
"On the need to Rewrite the History of Greek Mathematics" in
Archive for the History of the Exact Sciences 15 (1) 1975 (67 - 114)

van Stigt, W. (1991) Brouwer's Intuitionism Elsevir North Holland

White, L.A. (1947)
"The Locus of Mathematical Reality: an Anthropological Footnote."
Philosophy of Science 14, October 1947, (289 - 303)

Wilder,R.L. (1981) Mathematics as a Cultural System New York Pergamon

SOME ASPECTS OF BELTRAMI'S SCIENTIFIC RESEARCH IN HIS LETTERS TO HOÜEL

Livia Giacardi, University of Turin

"Nella scienza matematica il trionfo di concetti nuovi non può mai infirmare le verità già acquisite: esso può soltanto mutarne il posto o la ragion logica, e crescerne o scemarne il pregio e l'uso. Nè la critica profonda dei principi può mai nuocere alla solidità dell'edificio scientifico, quando pure non conduca a scoprirne e riconoscerne meglio le basi vere e proprie".[1] These are the words with which, in 1868, Eugenio Beltrami opened his *Attempt at an the interpretation of non-Euclidean geometry*, which provides an interpretation of Lobachevskian planimetry by means of surfaces of constant negative curvature or pseudospherical surfaces, thus finding a *real substratum* for hyperbolic geometry.

This was the period during which non-Euclidean geometries were just beginning to be known in Europe. One of the most active propagators of the new geometries in France was Jules Hoüel, as can be seen both from his tireless work in translating, reviewing and commenting on books and articles, and from his extensive correspondence. In Italy a similar role was played by Giuseppe Battaglini,[2] who had transformed the *Giornale di Matematiche*, of which he was editor, into an effective organ for the spread of Lobachevsky's hyperbolic geometry. The attitude in both France and Italy was, however, characterised by diffidence and at times flat rejection of non-Euclidean geometries: Joseph Bertrand called them *une débauche de logique*,[3] for Eugène Catalan the *non-euclidiens* were *inoffensifs et peut-être très utiles rêveurs*[4] and the Paris Académie des Sciences was inundated with supposed proofs of the postulate of the parallels. Beltrami outlined the situation in Italy in a letter to Placido Tardy: "Non so se Ella abbia accordato alcuna attenzione a quel sistema di idee che ora si va divulgando col nome di geometria non-euclidea. So che il Prof. Chelini gli è decisamente avverso, e che il Bellavitis la chiama geometria da manicomio: mentre il Cremona lo crede discutibile ed il Battaglini lo abbraccia senza reticenze".[5]

1. The 65 letters[6] which Beltrami wrote to Hoüel between 1868 and 1881 are a valuable document both for the clarification of the main doubts and misunderstandings which dominated the attitude of the scientific world to non-Euclidean geometries, and especially for the reconstruction of the genesis of Beltrami's research in this field. They

[1] E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Giornale di Matematiche 6 (1868), 284-312, quotation on p. 284; *Opere Matematiche*, 4 vols., 1902-1920, Milano Hoepli, I, 374-405.

[2] Apropos of this cf. P. Calleri, L. Giacardi, *Le lettere di Giuseppe Battaglini e Jules Hoüel (1867-1878). La diffusione delle geometrie non euclidee in Italia*, Rivista di Storia della Scienza (2) 3(1) (1995), 127-209.

[3] J. Bertrand, *Sur la somme des angles d'un triangle*, Comptes Rendus Hebd. des Séances de l'Académie des Sciences 69 (1869) 1265-1269, quotation on p.1266.

[4] Cf. P. Barbarin, *La correspondance entre Hoüel et de Tilly*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 50 (1926), 50-64 e 74-88, quotation on p. 78.

[5] Letter from Beltrami to Tardy, 14 November 1867, *Cassetta Loria*, Genoa University Library

[6] These letters are all preserved in the Archives of the Académie des Sciences, with the exception of one which is in the Bibliothèque of the Institut de France. A critical edition of the letters, edited by L. Boi, L. Giacardi and R. Tazzioli is printing at Blanchard publishers, Paris.

also bring out lesser-known aspects of Beltrami the mathematician, for example his interest in the problems of teaching mathematics in schools.

The main sources of inspiration lying behind the *Attempt* are to be found in Gauss's theory of surfaces as expounded in the *General investigations of curved surfaces*,[7] in Lobachevsky's work on non-Euclidean geometry and in some of the results obtained by Ferdinand Minding on surfaces of constant negative curvature in 1839-1840. Certain of Beltrami's own research work must be added to these: he had been prompted by reading a paper by Lagrange on geographical maps to try to discover whether there were surfaces which could be represented on a plane in such a way that their geodesic lines were represented by straight lines. In an 1865 paper,[8] he shows that these surfaces must necessarily have constant curvature. The *Attempt* was not, however, in the least influenced by the innovative and fruitful ideas Riemann had expounded in his famous 1854 lecture *On the hypotheses which lie at the foundations of geometry*,[9] although Riemann had spent two years in Pisa at the very time when Beltrami was teaching geodesy there. As he wrote to Genocchi: "L'anno scorso, quando nessuno sapeva di questo lavoro fondamentale di Riemann, io aveva comunicato all'ottimo Cremona un mio scritto nel quale davo un'interpretazione della planimetria non-euclidea, che mi sembrava soddisfacente",[10] and again, in a letter to Hoüel, he said: "Ce qui m'etonne c'est qu'ayant eu bon nombre d'entretiens avec Riemann (dans les deux années qu'il a passé à Pise, peu avant sa fin regrettable) il ne m'ait jamais parlé de ces idées, qui ont dû cependant l'occuper assez longtemps, car une belle esquisse ne peut pas être l'oeuvre d'un seul jour, même pour un aussi beau genie".[11]

Gauss's research on surfaces was basic for Beltrami: "L'ensemble de mes déductions repose - he wrote to Hoüel - sur la représentation des surfaces par la formule de Gauss $ds^2 = E\, du^2 + 2\, F\, du\, dv + G\, dv^2$. Or, dans cette méthode, les rapports de la surface et de l'espace environnant échappent entièrement: la surface est considérée en elle-même, telle qu'elle le serait par un être qui ne eût pas le sens de la troisième dimension".[12] Indeed, as is well known, in Gauss's *Investigations* he regards a surface "non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cuius dimensio una pro evanescente habetur, flexibile quidem, sed non extensibile"[13] and he formulates the

[7] K.F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores 6 (1828). 99-147; *Werke*. 12 vols., 1863-1933. Göttingen Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. IV. 217-258.

[8] E. Beltrami. *Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le lineee geodetiche vengano rappresentate da linee rette*. Annali di Matematica Pura e Applicata 7 (1865). 185-204; *Opere* I. 262-280.

[9] B. Riemann. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen*. Habilitationsvortrag (1854). Göttingen. published for the first time in Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1868). 133-152; cf. also *Bernhard Riemann gesammelte Werke. wissenschaftlicher Nachlass und Nachträg* (ed. da R.Narasimhan) 1990 Leipzig Teubner. 304-319 (first ed.1876. second ed. 1892).

[10] Letter from Beltrami to Genocchi. Bologna. 23 July 1868. *Fondo Genocchi. Busta M*. Municipal Library of Piacenza.

[11] Letter from Beltrami to Hoüel. Bologna. 4 December 1868. For all Beltrami's letters to Hoüel. see Boi. Giacardi. Tazzioli quoted in note 6.

[12] Letter from Beltrami to Hoüel. Bologna 19 December 1869.

[13] Gauss. *Werke* IV, quoted in note 7. Art. 13. p.238.

general theory of intrinsic geometry of a surface. He introduces the curvilinear coordinates of points of the surface and expresses in function of these the square of an element of length of an arc of a curve on the surface: $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ (the so-called first fundamental form). The geometrical properties of a surface, which are independent of deformations caused by bending, i.e. which can be expressed by means of the functions E, F and G alone, which appear in the expression of the linear element, and of their derivatives, constitute the intrinsic geometry of surfaces. Gauss particularly proves that the total curvature of a surface is a property that belongs to intrinsic geometry (*theorema egregium*). Two surfaces such that the expressions of their linear elements can be to transformed as to be identical, have the same intrinsic geometry and can be applied to each other (only locally). This is one of the points which Hoüel did not grasp and which Beltrami explained to him again and again.[14]

It is also important that Beltrami stressed that Gauss's theory of surfaces does not depend on the postulate of the parallels: "Il me semble que cette doctrine - he writes to Hoüel - n'a pas trouvé généralement sa complète *Würdigung*, à tel point que personne n'a encore remarqué ce fait capital, savoir qu'*elle est entièrement indépendante du postulat d'Euclide*".[15]

Gauss's studies were continued by Minding, who was particularly interested in surfaces of constant negative curvature and, in an article in 1839[16], found the three surfaces of revolution to which they can be applied, among them the surface generated by the revolution of the tractrix around its own asymptote, i.e. Beltrami's pseudosphere. In a later article (1840),[17] Minding arrived at another interesting result, though without perceiving its important implications. He observed that the trigonometric relations in geodesic triangles of a surface of constant negative curvature could be obtained from the corresponding formulas of spherical geometry on a sphere of radius R by multiplying R by $\sqrt{-1}$. While Minding failed to notice that these formulas agree with those for the hyperbolic plane, established by Lobachevsky in his *Imaginary Geometry* (1837), Beltrami was aware of this fact, which he developped in his *Attempt*.

He starts from the following specific expression of the square of the linear element of a surface of constant negative curvature equal to $-1/R^2$:

$$ds^2 = R^2\frac{(a^2-v^2)du^2+2uvdudv+(a^2-v^2)dv^2}{(a^2-u^2-v^2)^2},$$

where a^2 is an arbitrary constant.[18]

He chooses this particular expression because it has the advantage that every linear equation involving u and v represents a geodesic and vice versa. From the expressions

[14] Cf. for example Beltrami's letters to Hoüel, Pordenone 12 October 1869 and Bologna 19 December 1869.

[15] Letter from Beltrami to Hoüel, Bologna 19 December 1869.

[16] F. Minding, *Wie sich entscheiden lässt ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungmasse*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **19** (1839), 370-387.

[17] F. Minding, *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **20** (1840), 323-327.

[18] Cf. Beltrami *Saggio*, quoted in note 1, p.287ff.

which supply the angle of the two coordinate lines at the point (u, v) it can be seen that we have the admissible real values of u and v for $u^2 + v^2 \leq a^2$.
Regarding the coordinates u and v as rectangular coordinates x and y of an auxiliary plane, Beltrami shows that the surface of constant negative curvature, or rather the totality of its real points, is represented biunivocally in the interior of the circle $u^2 + v^2 = a^2$ (*limit circle*). In this representation the geodesics of the surface are represented by the chords of the circle, and the limit circle corresponds to the line of the points at infinity of the surface. Furthermore, two points in interior of the circle identify a unique chord, and hence any two real points of the surface identify a unique geodesic.

It must be noted that the surface here appears only as a two-dimensional manifold and the formula of ds^2 gives the law for measuring the distance between two infinitely close points, independently of the existence of an isometrical embedding of this manifold in the Euclidean three-space.

Studying the relation between the angle of the two geodesics and the angle of the chords representing them, Beltrami finds that (Fig. 1):

1. Two chords which intersect in the interior of the limit circle correspond to two geodesics of the surface which intersect at a point at a finite distance, forming an angle different from 0° and from 180°;
2. Two chords which intersect on the circumference of the limit circle correspond to two geodesics which intersect at a point at infiny, forming a zero angle;
3. Two chords which intersect outside the limit circle, or are parallel, correspond to two geodesics which have no point in common on the whole real extension of the surface.

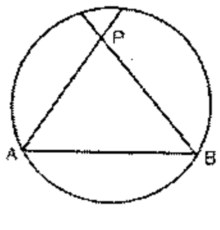


Fig. 1

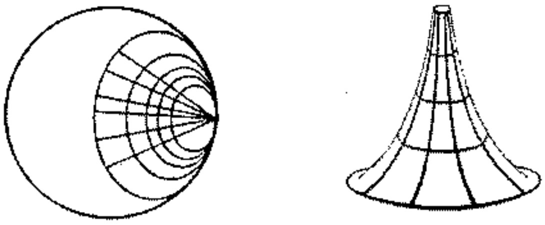


Fig. 2

Beltrami calls the point 2. geodesics *parallel* because they mark the passage from the ensemble of the secants to the non-secants. Thus, given a geodesic (represented by the chord AB), from every real point on the surface, which does not belong to it, it is always possible to draw two geodesics parallel to the given one (represented by PA and PB). Hence the fifth Euclidean postulate is not valid.

Thus Beltrami shows that Lobachevsky's non-Euclidean plane geometry can be interpreted on surfaces of constant negative curvature, replacing the word "straight line" with "geodesic". This model provided the first proof of the consistency of Lobachevskian plane geometry, representing as it did the non-Euclidean plane in the Euclidean plane. This result also removed all doubt regarding the impossibility of proving the axiom of parallels by deducing it from the others relating to the straight line and the plane.

Beltrami then goes on to geodesic circumferences with a real centre, an ideal centre (i.e. represented by a point outside the limit circle) and an infinite-distance centre. For each of these three cases he considers a specific region of the pseudospherical surface which can be applied on a surface of revolution. In the third case, the surface of revolution is of the so-called parabolic type (Fig. 2). If we take as coordinate lines $\sigma = cost$ and $\rho = cost$ a family of parallel geodesics and their orthogonal trajectories, the linear element takes the form

$$ds^2 = d\rho^2 + e^{-2\rho/R} d\sigma^2,$$

which is the linear element of the pseudosphere or tractroid, i.e. of that surface of revolution whose meridian curve is the tractrix. Since the geodesic circumferences with the centre at an infinite distance correspond to Lobachevsky's horocycles, it may be said that a system of concentric horocycles is transformed, with an appropriate flexion of the surface, into the system of parallels of the pseudosphere, and the geodesics $\sigma = cost$ then form the meridians. Beltrami says that the region of the pseudospherical surface situated on a well determined side with respect to the line $\rho = 0$ (if the radius of the parallel is chosen equal to R) is "wrapped around" the tractroid an infinite number of times.[19]

The first explicit criticisms of the interpretation of Lobachevskian planimetry described in the *Attempt* came from Helmholtz and from Klein in the years 1870-1871, and were taken up again in more detail by Genocchi in 1877. They raised doubts as to the existence in the Euclidean space of an infinitely extended pseudospherical surface: "Mais nous - writes Helmholtz - ne pouvons pas, dans notre espace, construire une surface pseudosphérique indéfiniment étendue dans la direction de l'axe de révolution: nous arrivons toujours, soit à une limite comme dans le cas du verre à champagne, soit à deux limites comme dans le cas de l'anneau"[20] (Fig. 3). Similarly, Klein holds that the interpretation of hyperbolic geometry on surfaces of constant negative curvature cannot "fournir l'intuition du plan tout entier, les surfaces de courbure negative constante étant toujours limitées par des arêtes de rebroussement".[21] Genocchi especially thinks that "il faudrait démontrer que l'équation aux dérivées partielles qui exprime les surfaces à courbure constante admet au moins une intégrale satisfaisant à toutes les conditions requises pour la pseudosphére".[22]

The emphasis here is on a problem which Beltrami had left open, but of which, as his correspondence suggests, he seems to have been aware:[23] whether there is or is not, in the Euclidean space, a surface which represents the whole manifold of constant negative curvature and whose geometry coincides with that of Lobachevsky's whole plane. This problem was solved in 1901 by Hilbert, who proved that there is no regular analytical surface in three-dimensional Euclidean space (i.e. no surface completely free

[19] Cf. Beltrami *Saggio*, p.303.

[20] H. Helmholtz, *Les axiomes de la géométrie*, Revue des Cours Scientifiques de la France et de l'Étranger 7 (1870), 498-501, quotation on p.499.

[21] F. Klein, *Sur la géometrie dite non-euclidienne*, Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques 2 (1871), 341-351, quotation on p.345.

[22] A. Genocchi, *Sur un mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géométries non euclidiennes*, Memorie della R.Accademia delle Scienze di Torino (2) **29** (1877), 365-404, cf. *Appendice*, p.395.

[23] Cf. for example Beltrami's letters to Helmholtz, Bologna 24 April 1869, and to Hoüel, Bologna 2 January 1870.

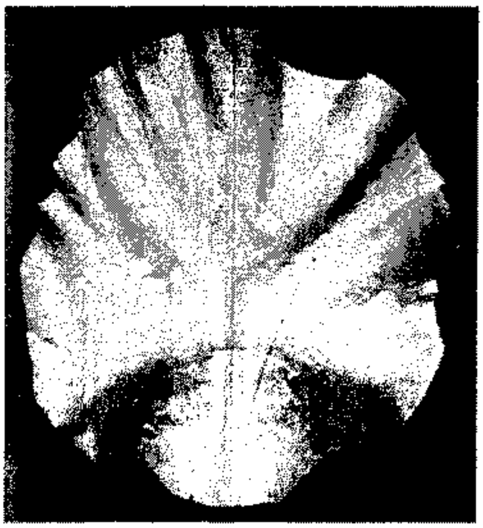


Fig. 4a

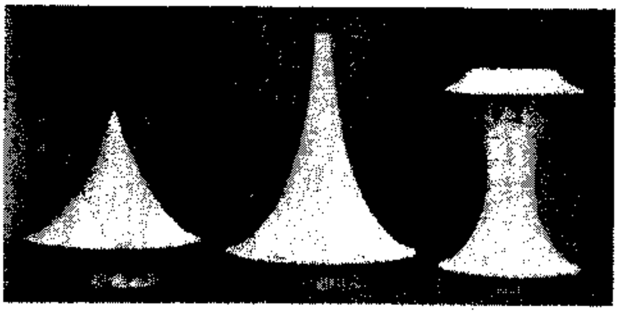


Fig. 3

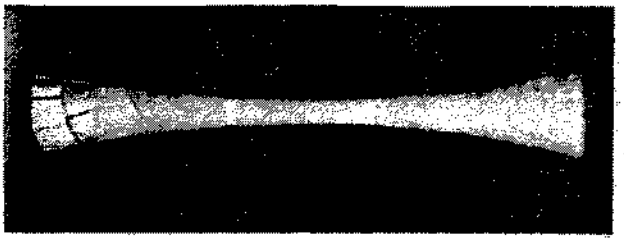


Fig. 4b

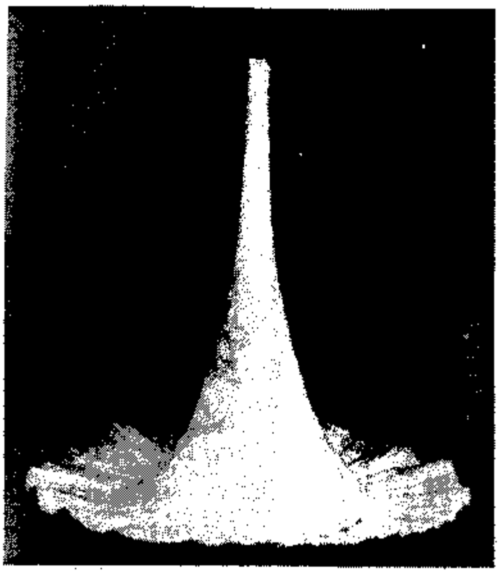


Fig. 4c

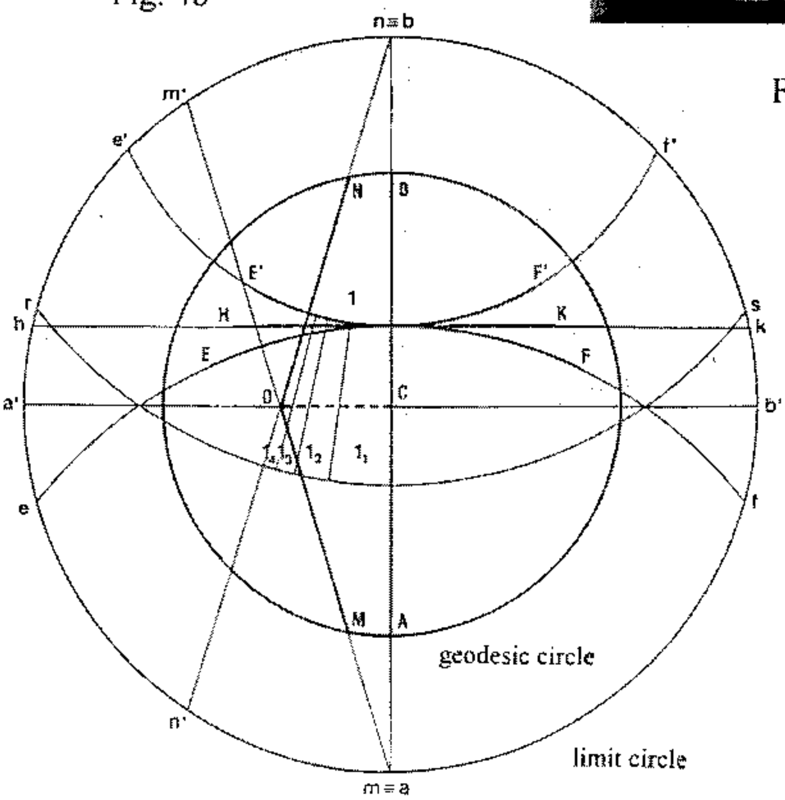


Fig. 5

of singularities) on which Lobachevsky's plane geometry is valid in its entirety.[24] In fact the pseudosphere has a cuspidal edge .

2. In 1872 Beltrami devoted a brief paper to the study of the pseudosphere, *On the surface of revolution which serves as a model for pseudospherical surfaces*; his aim here was, as he himself said, "di preparare gli elementi geometrici di una costruzione materiale, possibilmente facile ed esatta della superficie stessa".[25] Beltrami had actually been interested in the material construction of the pseudospherical surface since 1869, when he had written to Hoüel: "J'ai eu, dans cet intervalle, une idée bizarre, que je vous communique ... J'ai voulu tenter de construire matériellement la surface pséudosphérique, sur la quelle se réalisent les theorèmes de la géométrie non-euclidienne".[26] In the same letter he gave a detailed description of two models of pseudospherical surfaces which he had produced by cutting out and then glueing together curvilinear paper trapeziums: si ... on considère, - he wrote - la surface comprise entre deux méridiens, assez rapprochés pour qu'on puisse la remplacer, sur une certaine longueur, par un plan, on peut, par de morceaux de papier, convenablement decoupés, reproduire les trapèzes curvilignes dont la surface véritable peut être censée se composer". We know that Beltrami made at least four cardboard models, one of which is still preserved in the Mathematical Institute of the University of Pavia. This is the one[27] he sent as a gift to his friend Luigi Cremona on 25 April 1869, with a covering letter which hints, among other things, at the possibility of an industrial production of the model, the idea which prompted Beltrami to write the already-mentioned paper of 1872.

The model (Fig. 4a) consists of curvilinear trapeziums made of thick paper, cut out and glued together as required, each of them approximating to a portion of pseudospherical surface lying between two meridians and two parallels. Since overall the model approximates to a geodesic circle, it can be described by means of the auxiliary plane, where it is represented by the circle of diameter AB, while the circle of diameter *ab* represents the limit circle (Fig. 5). In this figure the lines which correspond to those drawn by Beltrami on his model are identified by a heavier stroke. These are the diameter AB, 1.029 metres long, the geodesic segment OC perpendicular to the diameter AB at its mid-point, the geodesic OM, symmetrical to ON with respect to OC (OM and ON are two geodesics parallel to AB), the horocycle arcs EF and E'F', tangent to each other and having their centres at infinity, at *a* and *b* respectively and the geodesic HK, perpendicular to AB and tangent to both the horocycles EF and E'F'.

The model can be folded according to the pseudospherical surface of the hyperbolic type (Fig. 4b), or according to the parabolic type, i.e. the pseudosphere (Fig. 4c), whose linear element is given by the formula which we have seen, whereas it is not

---

[24] D. Hilbert, *Über Flächen von konstanter Gausscher Krümmung*, Transactions of the American Mathematical Society **2** (1901), 87-99.

[25] E. Beltrami, *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche*, Giornale di Matematiche **10** (1872), 147-159, quotation on p.147; *Opere* II, 394-409.

[26] Letter from Beltrami to Hoüel, Bologna 13 March 1869.

[27] This model is described in Beltrami's letter to Hoüel, Bologna 22 April 1869.

possible to fold the model according to the pseudospherical surface of the elliptical type without making a cut.[28]

Beltrami was almost afraid that his interest in the material construction of the pseudosphere might be regarded as an eccentricity, and never missed an opportunity to insist, in his letters, on the importance of these material constructions, both as a tool for checking the results obtained and as a means of discovering new properties or theorems. One new and elegant result which he obtained is this: "Que l'on trace une droite AB et qu'en chacun de ses points M on tire la droite MT qui marque la direction de la parallèle à AE, suivant Lobatcheffsky, par rapport à la distance AM. *L'enveloppe de ces droites est le méridien de la surface pseudosphérique.* Par suite la distance MN au point de contact est constante".[29]

3. A particularly interesting, but less well-known, aspect of Beltrami which emerges from his correspondence with Hoüel is the attention he gave to the problems of teaching at both secondary school and university level. He deeply regretted the attitude of teachers in Italy at that time, reluctant as they were to open their minds: "Le nombre des professeurs des lycées qui s'occupent de leur science est très petit chez nous: et même ceux qui s'en occupent n'ont pas le sentiment de cette solidarité didactique et scientifique qu'il y a en Allemagne et qui procure des lecteurs attentifs à tout article un peu sérieux".[30] This interest not only led him often to join examining boards or committees for school inspection, but also to collaborate with the Ministry of Education in 1884 in the modification of the secondary-school mathematics syllabus.[31]

In addition, though indirectly, he took part in the heated debate over the problem of the teaching of elementary geometry provoked by the introduction of the Act of Parliament by the Minister Michele Coppino on 10 October 1867. This Act, which introduced Euclid's *Elements* as a textbook in classical secondary schools, was really the brainchild of Cremona, who was at that time a member of a special committee whose task was to formulate new syllabuses. Cremona was convinced that the study of mathematics ought to be "un mezzo di coltura generale, una ginnastica del pensiero diretta a svolgere la facoltà del raziocinio e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza",[32] and that no text was better suited than the *Elements* to lead to the achievemnet of this aim. It was also at Cremona's prompting that in 1867, in Florence, the famous text was issued which is known simply as *Betti-Brioschi*[33] (the names of its authors), which offered a new translation of Euclid's *Elements* with notes and additions for secondary schools.

---

[28] Cf. on p.298 of the *Saggio*.

[29] Letter from Beltrami to Hoüel, Bologna 13 March 1869: cf. also E. Beltrami, *Teorema di geometria pseudosferica*, Giornale di Matematiche **10** (1872), 53: *Opere* II, 392-393.

[30] Letter from Beltrami to Hoüel, Rome 5 January 1875.

[31] Cf. *Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, 11 November 1884.

[32] Cf. the Supplement to the *Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, 24 October 1867. Apropos the debate arising from the Coppino Act, cf. L. Giacardi, *Gli Elementi di Euclide come libro di testo. Il dibattito italiano di metà Ottocento*, in *Conferenze e Seminari 1994-1995*, Mathesis Subalpina e Seminario T.Viola, Turin 1995, pp.175-188.

[33] E. Betti, F. Brioschi, *Gli Elementi d'Euclide con Note, Aggiunte ed Esercizi ad uso de' Ginnasi e de' Licei*, Florence, Successori Le Monnier, 1867.

Hoüel also took part in the debate on the publication in the *Giornale di Matematiche* of the Italian translation of J.M.Wilson's paper, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, published in the *Educational Times* in 1868.[34] Wilson pointed out the deficiencies of the Elements in both scientific and didactic terms, concluding peremptorily that "Euclid is antiquated, artificial, unscientific and ill-adapted for a text-book".[35] Understandably, Cremona and Brioschi reacted rather violently to this article, writing a joint letter[36] to the editor, Giuseppe Battaglini, which appeared in the next issue of the *Giornale*. But Hoüel himself, who had been concerned with this subject for some time[37] and who was both a friend and a collaborator of Battaglini's, considered it his duty to intervene in defence of Euclid, and sent a letter to the *Giornale* in which he stated: "J'aurais beaucoup de choses à relever dans les preuves que donne M. Wilson de ce qu'Euclide est *antiquato, artifizioso, illogico (!!!) e inadatto come libro d'istituzione. Antiquato*, soit: je l'ait dit moi-même à l'occasion. *Artifizioso*, pas plus que les trois quarts des ouvrages modernes. Mais *illogico*, je le nie, et je prétends qu'il ne le paraît qu'à ceux qui ne l'ont pas compris entièrement. [...] Quant à être *inadatto come libro d'istituzione*, oui et non" and he goes on to say that the *Elements* is unsuitable as a text-book "si l'on suit le système anglais consistant à faire apprendre Euclide par coeur sans l'expliquer".[38]

In the course of his correspondence with Hoüel, Beltrami often mentions this debate, and his own opinion is clear from the following passage:[39] "En fait de mathématiques, sur la question à l'ordre du jour, c'est-à-dire sur l'utilité de la méthode euclidienne (prescrite depuis quelques années), les avis sont partagés. Quelques professeurs s'en trouvent bien, et la croient bonne et utile; d'autres lui préfèrent les méthodes antérieures, qui se résument en définitive dans la Géométrie de Legendre. J'ai cru cependant pouvoir remarquer que ces derniers appartiennent à la classe des routiniers, c'est à dire de ceux qui ne demandent mieux que de stéreotyper l'enseignement. Il y a eu du reste le phénomène ordinaire des *traités élémentaires* compilés par des gens qui auraient bien besoin d'étudier les traités classiques, et auxquels j'ai eu souvent envie de rappeler le formidable epigramme de notre Giusti:

Il fare un libro è meno che niente
se il libro fatto non rifà la gente".

---

[34] J.M. Wilson, *Euclide come testo di Geometria Elementare*, Giornale di Matematiche 6 (1868), 361-368.

[35] J.M. Wilson, *Euclid as a text-book of elementary geometry*, Educational Times (1868), 125-128, quotation on p.128.

[36] F. Brioschi, L. Cremona, *Al Direttore del Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane. Napoli*, Giornale di Matematiche, 7 (1869), 51-54. Part of this letter was translated by Hoüel into French, and published in the *Nouvelles Annales de Mathématique*, (2) 7 (1869), 278-283. under the title *L'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie.*

[37] Cf. J. Hoüel, *Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Archiv der Mathematik und Physik **40** (1863), 171-211 e *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Eléments d'Euclide*, 1867, Paris Gauthier-Villars, second ed.1883.

[38] Cf. J.Hoüel, *Estratto di una lettera del Prof. Hoüel al redattore*, Giornale di Matematiche, 7 (1869), 50; cf. also Hoüel's letter to Cremona, Bordeaux 3 February 1869, in L.Giacardi, *La corrispondenza fra Jules Hoüel e Luigi Cremona (1867-1878)*, Quaderni della Rivista di Storia della Scienza, n.1 (1992),77-94, see pp. 81-84 and Battaglini's letter to Hoüel, Naples, 2 February 1869, in Calleri, Giacardi, *Le lettere di Giuseppe Battaglini...*, quoted in note 2.

[39] Letter from Beltrami to Hoüel, Bologna 12 June 1870.

Algèbre vulgaire et algèbre spécieuse : Vers une unification de l'algèbre au milieu du XVII[e] siècle

Louis Charbonneau, Université du Québec à Montréal

À bien des égards, Viète est un révolutionnaire qui modifie complètement le paysage du domaine algébrique de la fin du XVI[e] siècle et marque tout le XVII[e] siècle. Cette influence révolutionnaire de Viète est manifeste dès le début de l'article «Algèbre» du *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques* d'Ozanam publié en 1691.[1] L'article commence ainsi: *L'Algèbre est une science, par le moyen de laquelle on peut resoudre tout Problème possible dans les Mathématiques.* Cette première phrase se réfère à la dernière phrase du *In Artem Analyticem Isagoge*, le livre programme de Viète publié un siècle plus tôt: *Denique fastuosum problema problematum ars Analitice, (...) jure sibi adrogat, Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.* Ozanam continue en distinguant entre deux algèbres:

> *L'**Algebre vulgaire** ou **nombreuse** qui est celle des Anciens, est celle qui se pratique par nombres. Elle sert seulement à trouver les solutions des Problèmes d'Arithmétique sans démonstrations, comme l'on peut voir dans **Diophante**: c'est pourquoy nous n'en parlerons pas davantage.*
>
> *L'**Algèbre Specieuse**, ou **Nouvelle**, que l'on nomme aussi **Logistique Specieuse**, ou simplement **Specieuse**, est celle qui exerce ses raisonnemens par les especes ou formes des choses designées par les lettres de l'Alphabet, qui soulagent extrémement l'imagination de ceux qui s'apliquent à cette belle science : car sans cela il faudroit retenir dans son esprit toutes les choses dont on aurait besoin pour découvrir la verité de ce que l'on cherche, ce qui ne se pourroit faire que par une forte imagination, & par un grand travail de la mémoire.*

Cette algèbre vulgaire correspond à l'algèbre des praticiens qui, un peu comme les scribes égyptiens et babyloniens, apprenaient des règles par coeur et développaient une habileté à les appliquer adéquatement. L'algèbre des abaquistes italiens de la fin du Moyen Âge et du début de la Renaissance semble correspondre partiellement à cette algèbre vulgaire.

L'algèbre vulgaire se caractérise par une approche algorithmique basée sur la résolution numérique cas par cas de problèmes essentiellement numériques.[2] Les

1 Publié chez Estienne Michalet, Paris, voir p. 61.

2 De fait, les problèmes pouvaient être géométriques mais devenaient numériques car ils se

algorithmes, nous dit Ozanam, se font sans démonstration, et dès lors ne sauraient susciter l'intérêt du mathématicien. Cette affirmation d'Ozanam montre bien jusqu'à quel point l'algèbre a changé depuis le début du siècle. A-t-on oublié toutes ces algèbres, de celle d'al-Khwarizmi à celle de Bombelli et Cardan, qui, tout en n'étant pas spécieuses, n'en reposent pas moins sur un certain style démonstratif? Certes ces démonstrations s'articulent autour de traductions géométriques, mais elles n'en perdent pas pour autant leur valeur démonstrative. Toutefois, elles ont pour principal défaut de ne pas appartenir au domaine auquel elles apportent un support démonstratif. Pourquoi la classification d'Ozanam ne prévoit-elle pas une catégorie pour ces algèbres ? Il faut sans doute y voir les conséquences de l'absorption de celles-ci par l'algèbre spécieuse. Mais cette absorption ne s'est pas faite sans que la nature même de l'algèbre, telle que Viète la conçoit à la fin du XVIe siècle, soit elle-même affectée.

Nous allons, dans cette communication, nous intéresser à un moment de cette absorption progressive de l'ensemble du domaine théorique de l'algèbre par l'algèbre spécieuse inventée par Viète. Nous verrons comment l'algèbre vulgaire se prépare à sortir du domaine mathématique tout en insufflant un caractère plus «numérique» à l'algèbre spécieuse telle que conçue par Viète.

L'algèbre nouvelle de Viète

Viète se propose d'aborder globalement la question de la résolution des problèmes. Il va donc bien au-delà de ses prédécesseurs. Son programme repose sur une approche analytique qui s'actualise dans ce que Viète appelle la logistique spécieuse (ou spécifique, selon le traducteur) c'est-à-dire un *calcul sur les espèces*, autrement dit un calcul sur les lettres (des symboles *a priori* dénués de poids ontologique). Cette logistique spécieuse est analogue par ses règles à une arithmétique des grandeurs mais ne va pas au-delà vers une théorie de la mesure des grandeurs. Cette analogie est dans la forme, et non dans le sens : les opérations sur les espèces ne sont pas définies chez Viète, seules leurs propriétés sont précisées.[3] La logistique spécieuse n'est donc ni arithmétique ni géométrique. Elle a une existence autonome.

Cette logistique spécieuse n'est toutefois qu'un outil mis au service du programme analytique. Or ce programme analytique est façonné par deux

---

ramenaient à déterminer numériquement la mesure de segments, surfaces ou volumes.

3 Bos, H.J.M., Tradition and Modernity in Early Modern Mathematics _ Viète, Descartes and Fermat, Prerpint Nr. 806, Juni 1993, Department of Mathematics, University Utrech, p. 7.

mouvements qui marquèrent les XVI^{e} et XVII^{e} siècles. Un premier mouvement s'articule autour de la recherche d'un langage universel pour diriger la pensée. La logistique spécieuse s'inscrit dans ce courant. La notion même de méthode s'inscrit dans cette mouvance. Mais la logistique spécieuse appartient encore plus profondément à ce mouvement d'ordre pédagogique dont Ramus est l'un des instigateurs. Cette méthode prend racine dans le souci didactique d'organiser les connaissances du général au particulier Par la mise en évidence des structures générales, les actions à faire dans une situation particulière s'expliquent en référence à ces structures globales. L'idée d'application d'une théorie est centrale.

L'influence de Ramus et de sa méthode dans l'histoire de l'algèbre ont été notées par Klein, Mahoney et d'autres. Je ne retiendrai ici que l'idée d'homogénéité. Pour Ramus, (et ici je simplifie peut-être indûment), un champ de connaissance doit être homogène, c'est-à-dire qu'il doit porter sur des objets de même nature. Viète a repris cette exigence et l'a imposé à sa Nouvelle algèbre. Je crois qu'on trouve là l'une des raisons de l'organisation en trois parties de l'analyse de Viète: Le Zététique, le Poristique et l'Exégétique. Selon ce que je comprends de Viète, on peut définir ces trois parties (en fait quatre) de la façon suivante :

Zététique	Mise en équation du problème et manipulation de cette équation pour la mettre sous la forme $P(x)Q(x) = CD$ où P et Q sont des polynômes et C et D sont composés uniquement de grandeurs connues. Une telle équation est dite ordonnée et la proportion qui lui correspond est elle-même dite ordonnée. À cette équation doit pouvoir correspondre une proportion qui est dite la constitution de l'équation.
Poristique	Pour le cheminement synthétique, étude de certains passages délicats du cheminement analytique dont la réversibilité n'est pas assurée de façon immédiatement convaincante. (Le sens à donner au Poristique fait l'objet de nombreuses discussions)
Exégétique ou Rhétique	Détermination, sous une forme cohérente avec la nature du problème, de la ou des racines de l'équation ordonnée issue du Zététique.

Chacune de ces parties est homogène. Le Zététique cherche à mettre en évidence une relation ordonnée entre espèces. Le Poristique étudie les ambiguïtés pouvant invalider la réversibilité des raisonnements analytiques. L'Exégétique est formée de deux exégétiques, l'Exégétique numérique et l'Exégétique géométrique. Chacune de ces quatre parties se distingue des autres par le langage qu'elle utilise. Celui du Zététique est la logistique spécieuse. Celui de l'Exégétique géométrique est le langage de la géométrie. Celui de l'Exégétique numérique est de fait similaire à celui de l'algèbre vulgaire, avec son usage de N, Q, C,... pour désigner les diverses puissances de l'inconnue, en contradiction, à bien des égards, avec l'usage des lettres dans la logistique spécieuse. L'usage discriminatoire du mot problème, qui se retrouve sous la plume de Viète presque uniquement dans le contexte de l'Exégétique numérique, souligne encore cette recherche d'homogénéité de chacune de ces parties.

La Nouvelle algèbre de Viète repose sur un canevas serré, presque axiomatique. Le but n'étant pas la résolution immédiate d'un problème mais plutôt d'une famille de problèmes, les différents livres, leur structure interne et leurs relations les uns avec les autres ne sont pas évidentes *a priori* pour un lecteur habitué aux livres d'algèbre vulgaire. Ce dernier est nécessairement dépaysé ici. Les préoccupations de Viète tirent leur origine d'un souci d'organisation conforme à la méthode selon Ramus. La grille de lecture doit en tenir compte. Le "praticien" de l'algèbre vulgaire se trouve à cent lieux d'une telle grille. De ce fait, Viète a dû lui sembler fort étranger à ses propres préoccupations, pour ne rien dire de la langue utilisée (en l'occurrence le latin) et du vocabulaire abondant et nouveau. À ces difficultés d'ordre conceptuel s'ajoute le fait que les livres composant l'algèbre nouvelle ne furent pas publiés simultanément. L'on remarque en effet que la publication se fait en 4 phases: la première en 1591-1593 par Viète lui-même; la seconde en 1600 par Ghetaldi, en 1615 par Alexander Anderson; 1624 par Jean de Beaugrand. Comment alors l'algèbre de Viète aurait-elle pu se répandre efficacement dans ces conditions ?

Au fond, Viète précède ses lecteurs. Il est en avant de son temps. Il faudra un peu de maturation pour qu'on commence à le comprendre et l'apprécier. L'éclosion se fait à partir principalement de 1630. Nous analyserons deux traités qui illustrent la perception qu'on avait de l'algèbre de Viète à la fin du premier tiers du XVII[e] siècle.

James Hume

James HUME:
***ALGEBRE DE VIETE, d'une methode nouvelle, claire, et facile Par laquelle toute obscurité de l'Inventeur est ostée, & ses termes pour la pluspart inusités, changez es termes ordinaires des Artists,* A Paris, Chez Louys Boulanger, rue Sainst Jacques, à l'image sainst Louis. M.DC.XXXVI. Avec privilège du Roy.**

Ritter, à la fin de son analyse des oeuvres de Viète, qualifie ce livre de Hume de *paraphrase des oeuvres de Viète et non une traduction* .[4] Certes, nous sommes d'accord avec Ritter en ce qui a trait à la traduction. Le livre de Hume n'est pas du tout une traduction. Toutefois, elle se veut plus qu'une paraphrase. Hume est à bien des égards original dans son approche de l'algèbre de Viète. Il en garde l'essentiel, mais ne se gêne pas pour laisser tomber des éléments pourtant fondamentaux pour Viète. La notation de la logistique spécieuse est différente de celle de Viète. Les divisions de la *nouvelle algèbre* ne sont plus explicitées. La *sublime loi des homogènes* n'est pas retenue, même si dans les faits l'homogénéité est habituellement respectée. Les traités à la base de l'Exégétique géométrique (*Efficionum Geometricarum Canonica Recension* et *Supplementum Geometria*) ne sont pas repris par Hume. Des comparaisons explicites sont faites avec ce que Hume appelle l'*Algèbre commune* ou *algèbre cossique.*

Le rapport entre l'algébrique, le numérique et le géométrique est différent chez Hume de ce qu'il est chez Viète. D'une part, le choix le plus surprenant de Hume est celui d'avoir mis presque complètement de côté l'analyse comme source méthodologique explicite du raisonnement algébrique. De fait, le mot analyse n'apparaît pour ainsi dire jamais dans le texte.[5] On peut probablement y voir une conséquence du souci de faire le pont avec l'algèbre commune. Dès lors, les trois parties de l'analyse, telles que conçues par Viète, sont aussi absentes. Le mot Exégétique ne s'y trouve pas. Eut-il été là, Hume n'aurait pu parler vraiment que de l'Exégétique numérique. Le mot Zététique n'apparaît que dans le titre du livre VIII (numérotation du texte), dans le texte et non dans la table des matières : *Des lois du Zetetique, ou la règle de l'algèbre*. Hume parle ailleurs tout simplement d'algèbre.

D'autre part, contrairement à Viète, Hume ne manifeste pas d'intérêt particulier pour la géométrie. Non pas que la géométrie soit absente de son livre, mais la géométrie qu'on y retrouve est une géométrie au service de raisonnements numériques. Elle joue un rôle similaire à celui qu'elle joue chez al-Khwarizmi, avec ses démonstrations qui font penser à des puzzles. La géométrie n'est plus une discipline devant conserver son autonomie face au numérique. Il n'y a donc pas lieu de faire une algèbre qui soit apte à des résolutions à la fois géométriques et numériques, la résolution numérique suffit. Dès lors, l'homogénéité des équations n'a plus à être respectée. Elle est superflue. Aussi, dans son premier livre, qui reprend en gros le *In Artes Analyticem Isagoge*, Hume ne conserve pas cette

4 Ritter, F., Analyse des oeuvres de Viète, *Revue occidentale philosophique, sociale et politique*, 2ièm série, 10 (1895), pp. 354-415, voir p. 414.

5 J'ai l'impression (je n'ai pas fait un relevé systématique) que le mot analyse n'apparaît pas dans le texte. Toutefois, on trouve le mot «analytique» dans le titre d'une section du livre sixième (p. 362): *De l'usage des Analytiques.*

sublime loi. Il donne même, dans ses commentaires et explications, plusieurs exemples d'équations non homogènes.

Enfin, le numérique domine l'ensemble du traité. L'omniprésence du numérique se manifeste de diverses façons qui vont bien au-delà de la simple présence, pour ne pas dire d'omniprésence, d'exemples numériques, présence qui dépasse de loin ce que l'on trouve dans Viète. Par exemple, les démonstrations de Hume ont toujours une composante purement numérique. Ainsi, même lorsqu'une figure géométrique vient supporter un raisonnement, à chaque partie significative de la figure est associée un nombre. Cette prépondérance du numérique a une autre conséquence: la place centrale du *De Numerosa* au détriment du *Zeteticorum Libri Quinque*. Cette place est clairement manifestée par Hume lorsque, dans sa section *De l'usage des Analytiques*, il dit (Livre sixième, p. 362 et suivantes), après avoir discuté d'un problème et obtenu l'équation correspondante, qu'on résout une équation en utilisant les techniques d'approximation du *De Numerosa*. de Viète.

Hume s'adresse à un public différent de celui de Viète. Son souci pédagogique oriente dès lors fortement son approche. Hume écrit une quarantaine d'année après Viète. Celles-ci participent à la distance que prend Hume par rapport au mathématicien de Fontenay.

Le tableau de correspondance entre le livre de Hume et ceux de Viète montre exactement les choix faits par Hume :

Hume	Viète
Livre I	*Isagoge* (des parties longuement commentées)
Livre II	*Notæ Priores* (en entier, dans l'ordre) *Zeteticorum* (4 prob.)
Livre III	*De Numerosa* (puissances pures, prob. I à VI)
Livre IV	*De Numerosa* (puissances affectées affirmativement, Prob. I à IX))
Livre V	*De Numerosa* (puissances affectées négativement, Prob. X à XV)
Livre VI	*De Numerosa* (puissances arrachées, Prob. XVI à XX) *Recognitione* (dans cet ordre: chap. XVII, III.1à3, IV.1 et 2, V.1, IV.3, V.2 et 3, XVIII.2 à 15, XIX.2 à 5, XX.1 à 6,XXI.1 et 2. [et après un long texte de Hume sur sa controverse avec Morin], VI 1 à 3).
Livre VII	*Emendatione* (chap. I, II, III.1 à 8, IV, VIII et V, VII, VI.1 et 2.) .

Pierre Hérigone

Le titre du volumineux traité du livre d'Hérigone me semble suffisamment révélateur du programme que l'auteur s'est fixé pour le reprendre ici :

Cursus mathematicus nova, brevi, et clara methodo demonstratus, Per Notas reales et universales, citra usum cuiuscunque idiomatis intellectu faciles // Cours mathématique, démonstré d'une nouvelle, claire et brève méthode, - par Notes reelles & universelles, qui peuvent estre entendues facilement sans l'usage d'aucune langue

Ce traité se compose de cinq tomes, les quatre premiers publiés en 1634 et le cinquième en 1637, et d'un supplément, publié en 1642.[6] Il s'agit d'une véritable somme des connaissances mathématiques de l'époque. En ce qui a trait à l'algèbre, on la trouve dans le second tome, qui a pour sous-titre : *Contenant l'Arithmetique practique : le Calcul Ecclesiastique: & l'Algèbre, tant vulgaire que specieuse, avec la methode de composer & faire les demonstrations par le retour ou repetition des vestiges de l'Analyse.*, et dans le *Supplement* .

Hérigone se révèle clairement un disciple de Viète. L'importance qu'il attribue à l'analyse dans son sous-titre le laisse déjà deviner. Toutefois, comme il est dit dans le titre global de son traité, le langage qu'il utilise se veut un langage universel. De fait, il s'agit d'un système de notations très concises dans lequel il réécrit par exemple, au tome I, les *Éléments* d'Euclide. En utilisant ce langage symbolique, Hérigone s'éloigne très volontairement du lourd symbolisme de Viète. Toutefois, il reste proche de l'esprit de la Nouvelle algèbre. Ainsi, le vocabulaire employé demeure celui de Viète. Contrairement à ce que nous avons vu chez Hume, Hérigone donne à la géométrie une grande importance. Aussi, la loi des homogènes continue-t-elle à jouer un rôle central dans son algèbre.

Ce qui démarque principalement Hérigone de Viète me semble être l'organisation des résultats. Sa séquence dans le tome II se résume ainsi : 1) étude de la manipulation des expressions algébriques (symboliques), 2) étude de la manipulation des équations et des proportions, 3) étude des relations entre les équations, les proportions et les constructions géométriques, 4) la résolutions de nombreuses «questions» aussi bien géométriques que numériques, ces dernières souvent dans un contexte appartenant à l'algèbre vulgaire. Tout au long de cette

6 J'ai consulté la seconde édition, celle de 1644.

séquence, qui s'étale sur 296 pages, Hérigone va chercher dans divers livres de Viète les éléments nécessaires à son dessein pédagogique. Alors que Viète recherchait à établir une homogénéité à l'intérieur des différentes parties de son algèbre, Hérigone , au contraire, cherche plutôt à donner un portrait complet de la résolution d'une situation problématique, depuis l'analyse jusqu'au *retour ou repetition des vestiges de l'Analyse* , autrement dit jusqu'à la démonstration ou la synthèse.

Pour un néophyte, la marche est plutôt haute. Aussi n'est-il pas surprenant de voir Hérigone reprendre dans son *Supplement* (pp. 79 à 98) ce qu'il appelle l'Isagoge de l'algèbre. Cette Isagoge n'a rien à voir avec le livre programme de Viète *In Artem Analyticem Isagoge*. Il s'agit plutôt d'une véritable introduction qui aurait dû précéder le tome II. Les 59 premières pages de ce *Supplement* contiennent par ailleurs une étude des problèmes correspondant aux équations du troisième degré, comme par exemple la question de la section d'un angle. Cette étude est complétée par une section (pp. 59 à 69) sur les «maximis & minimis», à la manière de Fermat, et une autre (pp. 69 à 73) sur les coniques, à la manière des jardiniers de Descartes.

Hume et Hérigone poursuivent des objectifs qui diffèrent de ceux de Viète. Ils cherchent à insérer l'algèbre vulgaire dans le giron de l'algèbre spécieuse. Mais ce désir de donner à l'algèbre vulgaire des fondements plus solides oblige à introduire dans l'algèbre spécieuse un besoin d'une cohérence théorique plus immédiate et locale que ce que les divers travaux de Viète pouvaient offrir. De là sortira une algèbre unifiée qu'on associe souvent au nom de Descartes.

CALCULUS: HISTORY AND COGNITION[1]

Luis Moreno-Armella, Cinvestav-IPN, Mexico

Local Organizations

The history of Calculus allows us to see that during its evolution, conceptual nuclei are formed around which mathematical activity is carried out. Given their nature, we will call these nuclei *local organizations*. Let us look at an example. The problems of maxima and minima (in the context provided by analytical geometry) were identified as problems of drawing tangents, at special points, to curves that could be *represented* by equations. These (Analytical) representations permitted the widening of the universe of curves to which tangents could be drawn. When constructing the concept of function, the graph of the function, the table of values, the formula, are different kinds of representations (semiotic tools) which we use to cope with the concept. These are examples of *external* representations. There seems to be a strong interaction between *mental* representations---forms taken by the cognitive structures of the subject--and *external* representations. We could say that besides the mental representation on its own, what is of interest is the action supported by the external representations. In one way or another, this is the case with every mathematical concept. The decimal representation of numbers is, perhaps, one of the best examples of how an adequate symbolic representation becomes an instrument with which to explore. The visual representations of elementary geometry plays the same role. Reasoning is not carried out only *on* the figures but *from* the figures. In both cases, the reasoning is almost impossible without these external representations. We can now describe fully what a local organization is. Let us do it by means of an example taken from the History of Mathematics: to explore the notion of tangent line according to Differential Calculus it was needed a *local organization* including,

- a curve *represented* by an equation
- an *operational field* that consists essentially of "deriving" (i.e.: finding the tangent line at a particular point) the equation and making this "derivative" equal to zero.

This local organization is anchored to the context provided by analytical geometry; it generalizes the problem of drawing the tangent, using as a tool the *new representation* of the geometric object which is to be manipulated. In this way, the operational field permits the exploration of the "tangent object". Although we don't yet have a rigorous definition of derivative, such as we are used to seeing in contemporary text books, this is not an obstacle to begin the exploration of the tangent in very general terms. We like to think of the local organizations as a kind of intermediate structure between a *conception* and the logical structure known as a formal *concept*.

We have said that in the case of Differential Calculus, evolution (in the early stages) began with an organization anchored in the context of geometry. The operations we

[1] Supported by CONACYT, México, Grant 1623-S9208

can carry out from the associated operational field (associated to the local organization, of course) generate an increasingly clear conception of the tangent line. It is worth mentioning that students do not have problems accepting the prediction that can be made about the tangent line when drawing it through a convex point; the problems appear when the tangent is drawn through an inflexion point. How is it that the tangent line crosses the curve? the contradiction students perceive between what the local organizations predicts and their geometric notion of tangent, is solved when they finally change their former restrictive conception. Now the analytic apparatus takes command of the more general situation. The tension between conception and operation within a local organization, is reinforced by the independence that the operational field eventually acquires from the conception which originally accompanied it.

The process by which a local organization is refined can be described, in principle, in terms of *assimilations and accommodations* (see Piaget, 1970). For instance, when one tries to calculate the tangent at a point of inflexion, there is a contradiction between what the operational field predicts, and the original conception of the tangent, at a convex point. Then, in order that the local organization (a cognitive structure) can *assimilate* the new situation, the conception of tangent has to be modified; that is, an *accommodation* of the cognitive structure is produced. Here we can see that assimilation consists of incorporating an object of knowledge into the knower; accommodation consists of the modification undergone by the subject (i.e. his/her cognitive structures). The result is a new, more equilibrated cognitive structure.

Concepts constitute a logical starting point. In cognitive terms, conceptions are the starting point. History illustrates the transition from conceptions to concepts. From the psychogenetic point of view (Piaget, 1970) there are also transitions from conceptions to concepts. Genetic epistemology assumes that abstraction (empirical and reflective) and generalization (extensional and completive) are the mechanisms for passing from a less organized level to one of greater organization. These mechanism are found at both the psychogenetic and phylogenetic levels. For example, the awareness that different problematical situations in Calculus (tangents, areas, approximations, etc.) can be conceived of as *infinite processes* eventually leads to a global organization which has the concept of *limit* as an organizing principle.

On Constructivism

Constructivism sustains that the knowledge possessed by a student (the knower) at each moment of his intellectual development, is the result of a construction--not the result of a transmission. For Piaget (and, in essence, for all constructivists), the subject approaches the object of knowledge endowed with certain cognitive structures which allow him "to see" the object in a certain way and to extract certain information from it, which is then assimilated by these structures. The new information produces modifications in the cognitive structures, such that when the subject approaches the object once again, he "sees" it differently from the way he saw it originally and the information relevant to him is also different. His observations modify successively as his cognitive structures modify. Thus he constructs knowledge about the object.

Traditional teaching has given a major importance to the object of knowledge and a passive role to the subject. Within the constructivist perspective we must take into account the activity of the subject: *there is not only an "object of teaching", but also (and most importantly) an interaction with the learner.*

Historical Development and Personal Knowledge

We are going to introduce an example, taken from our own work, to show some relationships between the historical development of mathematical knowledge, and the corresponding construction by the student. In a questionnaire whose purpose was to explore the conception of *limit*, the students were asked to answer the question:

Is 0.999... equal to or less than 1?

(This kind of questions have been asked many times, nevertheless they continue to be useful!).

With significant frequency we obtained responses such as these:

- equal to 1 because the difference is *infinitely small*
- equal because in the infinite, they are so close that they can be considered equal
- Less than 1, although the difference between them is infinitely small
- Less than 1, but it is the closest you can get to 1 without being 1

Infinitesimal elements seem to underlie the conceptions of these students, which were, perhaps, brought forth by the question.

Bearing in mind the thesis of genetic epistemology with respect to the pertinence of the comparison between psychogenetic development and the interpretations of historical analysis, we can look at the 1696 text of L'Hôpital on differential calculus, one of whose organizing principles is the following:

> *A quantity which increases or decreases by an infinitely small quantity can be considered to remain the same.*

In other words, given a quantity A and an infinitesimal quantity b, the following can be written:

$$A + b = A$$

This " = " is a *criterion of substitution*, not equality in the ordinary sense.

In these terms, the comparison forced us to modify our first evaluation of the students responses as "incorrect". So, genetic epistemology claims that the process of *discovery* and that of *justification* cannot be separated.

In the didactic field, this principle tells us, following Freudenthal, that there is a sort of "*antididactic inversion*" when the formalized presentation of a discipline precedes the constructive process which occurs on the basis of the local organizations.

A New Concept of Number

There is no notion of continuity associated with the Greek concept of number, as introduced in Euclid's Elements. Continuous magnitudes are instrumental for the historical construction of Calculus. It is because of these features, that we have long considered as a relevant problem, *to try to find when number and (continuous) magnitude became integrated into the same concept.* (See Moreno, 1993). This happened in Stevin's work.

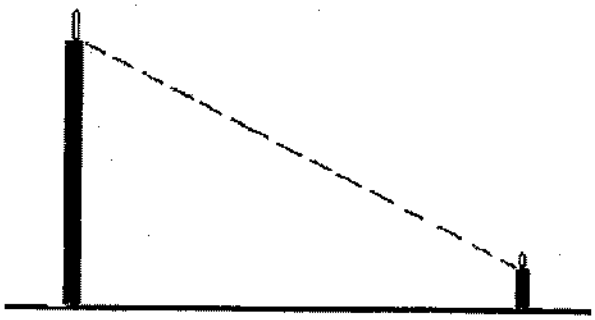
The geometric continuum appears (in Greek mathematics) as an abstraction of physical continuum. Because of the characterization of continuity, as never ending divisibility, it is possible to conclude that the continuum is not made of indivisibles. On the other hand, number is the prototype of discreteness; number is a collection of units. Euclidean conceptions were so deeply rooted, that it was necessary for Stevin (1585) to argue against this tradition --which results cleared the path to Calculus-- both from a practical viewpoint and from what we consider to be an epistemological viewpoint (Moreno, 1993). In his work, he identified number and magnitude, attributing numerical properties to continuous quantities and continuity to numbers. From this point on, it is not possible to separate the concept and its symbolic representation (decimal notation). For example, the infinite divisibility of number corresponds to the operation of division made possible by the decimal notation. This should make clear that the new concept of number was possible through a reflective abstraction. it was understood as *"that through which the quantitative aspects of each thing are revealed"*. Therefore, arithmetic operations are sustained by the actions that are carried out on quantities. A very important step towards the widening of the numerical domain is to consider that *results of algebraic operations, carried out with numbers, are numbers.* This must be a property of the operational field pertaining to the corresponding local organization.

Some Experimental Results

In a questionnaire, applied to a hundred students (half of them from high-school level and the other half from first year college level), *after* a calculus course, we included the following question:

> *A candle of 40 cms of length is lit and so it goes for five hours until it puts out. Final length is 8 cms. Suppose that length decreases slowly at the beginning and rapidly at the end.*
>
> *Make a representation of the variation of the candle length during the time it remains lit.*

In other words, we asked the students to take into account some initial and final conditions when representing the variation of the candle's length. In general, students used different approaches through visual and symbolic representations. About 40 per cent of the total population gave a satisfactory answer (i.e.: it was clear they had understood the question). Interestingly, we often found those who represented the phenomenon like this:



This is an iconic representation, showing the first and last states connected by a dotted line. The dotted line refers to the absent intermediate states. They are interpolated using a proportional variation scheme (PVS). The students whose answer was given using the PVS attributed no meaning to the expressions "slowly at the beginning" and "rapidly at the end" which were part of the question. But students are able to represent the whole situation as one evolving in time. There is a kind of unfolding of the successive states of the candle through time, showing the evolving phenomenon as resulting from a reflective abstraction.

Among university students the geometric answers diminished (compared to those from high-school students). Only 13 per cent gave a satisfactory answer in visual terms. The complete analysis of those answers, which we can only sketch here, showed a decreasing tendency to the use of visual representations, as the algebraic techniques begin to inhabit the Calculus curriculum. Nevertheless, the abandonment of visual tools is not followed by a better control of other ways of representing. For instance, it was usual to obtain this answer:

40	19	18	16	13	9	8	Candle's lentgh In cms
1 hr	2 hr	3 hr	4 hr	5 hr	6 hr	7 hr	Elapsed time

(Observe that at the beginning the time elapsed is already one hour!)

Calculus deals with change and infinite processes. So we think it is important to try to help students so they become aware of the kind of modeling involved when resolving a problem. We presented a teaching sequence based on Oresme's and Galileo's work on mean speed and variation. Then we decided to explore some qualitative settings. Students were presented with this question:

While driving a car at 50 kms/hr, I begin to increase the speed, slowly, until it reaches 60 kms/hr. This takes one hour. What is the distance traveled?.

Students from high-school did not use graphical representations to answer this question. perhaps this is a consequence of the scarce experience developed in transferring a problem from a symbolic to a visual setting. The question obviously resembles a question from algebra; however many students answered that 10 kms was the distance traveled, an answer insensible to contradiction.

Among college students it was clear the choice of an analytic approach; they tried to compute a derivative and so on. They seemed to be "forgetting" the visual tools. We found of interest the tendency to continue using linear representations when dealing with variation. according to Thompson (1994) students are "anchored" (our terms) to the PVS. Perhaps it is valid to conclude that certain instances of school knowledge (acquired through a particular kind of instruction) do not modify certain cognitive schemes already rooted in the student's cognitive system. Let us make more precise what we understand as a cognitive scheme. A scheme consists of:

a) recognition of certain situation;
b) association of a specific activity with that kind of item; and
c) expectation of certain result (von Glasersfeld, 1991, p.121).

In epistemological terms this could be understood as a resistance to novelties. When confronted with a (cognitive) disturbance the subject tries to neutralize it by ignoring it, by regarding it as anomalous or by deforming it so it is no longer experienced as a disturbance (Rowell, 1989). This is a conservative response, a resistance of the system to change. This was the case, during the development of Mathematical Analysis, when some mathematicians (Weierstrass et al) first constructed an example of a continuous non-differentiable function. These class of →functions was regarded as "pathological". Today, they belong to "normal" knowledge, thanks to the theory of fractals.

Dealing with scenarios of change means that sooner or later it will be necessary to introduce the notion of instantaneous speed. This can be constructed only through a reflective abstraction. Instantaneous speed is a notion without an empirical correlate. Then, the PVS works as an epistemological obstacle: as a local organization within which we can solve problems related to change and wherein we try to assimilate new situations to older ones we have already experienced and solved adequately. The PVS makes it possible to talk about change without variables as everything is determined by a kind of interpolation, between the first and last states. Only later will the student be able to overcome the obstacle embodied by the model of proportional variation. Here is where the reflective abstraction process is needed.

References

1. Piaget, J. (1970) *Genetic Epistemology*, W.W. Norton and Company, New York.
2. Moreno, L. (1993) *Continuity and variation: The transfer from a graphical to an analytic representation*, Proceedings of the First European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education. Montpellier, France.
3. Thompson, P. *Images of rate and operational understanding of the Fundamental Theorem of calculus*, Educational Studies in Mathematics, vol. 26, 229-274, 1994.

4. von Glasersfeld, E. (1991) *Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching*, History, Philosophy and Science Teaching, Matthews, M (Ed), Ontario Institute Studies in Education.
5. Rowell, J. (1989) *Piagetian Epistemology: Equilibration and the Teaching of Science*, Synthese, vol. 80, pp. 141-162.

Quadratic Equations: Reinventing the formula. A Teaching Sequence Based on the Historical Development of Algebra[1]

Luis Radford
Université Laurentienne, Canada.

Georges Guérette
Conseil de l'éducation de Sudbury, Canada.

The true direction of the development of thinking is not from the individual to the socialised, but from the social to the individual
L. Vygotsky

Abstract: *In this paper, we present a teaching sequence dealing with quadratic equations. Our teaching sequence is based upon a careful epistemological study of the history of Algebra that takes into account J. Høyrup's modern reconstruction of Babylonian Geometric Algebra as well as the development of the semiotics of algebra. This study led us to structure the teaching sequence according to two different (albeit related) axes: (1) in the first axis, a particular attention is paid to the social context of the mathematical activity in the classroom; (2) in the second axis, the students are led to reinvent the formula that solves the general quadratic equation. This goal is achieved through a progressive itinerary, starting from manipulatives, that requires students to use different semiotic categories in order to express and solve problems. The teaching sequence was experimented successfully in a High School classroom.*

§1. Introduction

En plaçant le problème du développement de la pensée mathématique dans une perspective d'interaction sociale en salle de classe, la séquence d'enseignement que nous reportons ici a pour objet celui de permettre aux élèves de réinventer la formule qui résout les équations de deuxième degré. Une caractéristique importante de la séquence est la conceptualisation géométrique qui la sous-tend, conceptualisation qui tient en ligne de compte le développement historique de l'algèbre. La séquence est faite en sorte de permettre aux élèves d'accéder graduellement à des niveaux d'abstraction sémiotique différents sur lesquels les méthodes de résolution de problèmes sont formulées.

1.1 L'apprentissage comme activité sociale en salle de classe:

Il n'est probablement pas exageré de dire que la plupart des paradigmes prédominants en éducation mathématique relèvent du constructivisme, dont le principe fondamental est –comme on le sait– celui de supposer que l'individu construit ses propres connaissances. Bien que le socio-constructivisme, en opposition au constructivisme radical, porte quelque attention aux facteurs sociaux à la construction des connaissances par l'individu, il n'en reste pas moins que le social y apparaît plutôt comme une concession: celui-ci y est vu comme un agent externe (et en quelque sorte inevitable, car présent) à la connaissance qui demeure en fin de compte une affaire privée. C'est pourquoi, dans les approches constructivistes, la

[1]Ce travail fait partie d'une recherche en cours subventionée par FCAR No. 95ER0716, Québec, et les Fonds de Recherche de l'Université Laurentienne, FRUL, Ontario.

connaissance est vue comme une structure qui tend à se détacher du concret pour arriver à son niveau le plus achevé qui est caractérisé par des opérations sur des objets *formels* («empty shells»). À cette conception de la connaissance qui, comme l'a montré O'Loughlin. (1992) est loin d'être non problématique dès qu'on regarde de plus près la question «qu'est-ce que cela veut dire exactement que l'individu construit ses propres connaissances?»), a été opposée une conception d'après laquelle le savoir est toujours un savoir socio-contextualisé (cf. e.g. Lerman, 1996). «Kowlege -écrit Otte (1994)- is necessarily social knowledge». Dans cette perspective, la compréhension des dynamiques d'acculturation qui débouchent sur des processus d'interiorisation et la formation des «plan de conscience» chez l'individu prennent une importance capitale pour l'épistémologie en général et pour l'éducation matématique en particulier. À notre avis, cette compréhension est encore loin d'être claire aujourd'hui, d'autant plus que le problème ne peut plus être posé en termes behavioristes. Comme Leont'ev l'a signalé:

> «the process of internalization is not the transferal of an external to a pre-existing, internal "plan of consciousness"; it is the process in which this plane is formed» (quoted by Lerman, 1996, p. 136).

Un élément fondamental dans les processus d'acculturation est le langage (Wertsch et Stone. 1985). Il n'est pas seulement la voie d'expression de l'individu vers son entourage; il n'est pas non plus un outil médiatique à deux voies: il permet aussi à l'individu l'élaboration des plans conceptuels de conscience de représentations complexes et différenciées du monde. Dans le cas des mathématiques, le langage acquiert une importance particulière, car il se voit mobilisé à travers plusieurs catégories sémiotiques, chacune avec ses propres niveaux d'abstraction.

1.2 Catégories sémiotiques

Les catégories sémiotiques apparaissent au niveau social et individuel. Au niveau social, en salle de classe et en ce qui concerne les mathématiques, elles permettent la discussion de problèmes et leur solution à l'intérieur de groupes d'élèves. Le sens des concepts est élaboré à travers la communication qui s'établi au sein du groupe. Au niveau individuel, les catégories sémiotiques apparaissent comme moyens auto-régulatifs des actions entreprises.

Dans notre séquence didactique, les deux groupes de catégories mentionnées ont varié quant au niveau de généralisation véhiculée (que nous avons appelés *niveaux d'abstraction sémiotique*): on a proposé aux élèves de vivre et de partager certaines expériences géométrico-numériques (inspirées du dévelopement conceptuel des idées algébriques) qui, à la fin, ont débouché sur l'utilisation d'un langage symbolique et la re-invention de la formule de deuxième degré.

Étant donné le rôle de l'histoire dans la structure de notre séquence, il convient de faire un court survol sur l'historique l'équation de deuxième degré[2].

§2. La géométrie du collage

Quand, suite aux excavations archéologiques entreprises au début du siècle, on a commencé à déchiffrer les tablettes babyloniennes, on a découvert qu'un certain nombre de ces tablettes portaient sur des questions de calcul métrologique (qui impliquait des calculs numériques aussi bien que géométriques), alors que d'autres tablettes portaient sur des problèmes à résoudre. Certains des problèmes posés concernent des rectangles dont la dimension des côtés doit être trouvée, étant donnée –par exemple– l'aire et la relation entre les côtés. Au-delà de la difficulté que posait la traduction de ces tablettes, il y avait la difficulté à comprendre comment les scribes avaient pu faire pour résoudre ces problèmes. Cela d'autant plus que, souvent, les tablettes contiennent seulement l'énoncé du problème et sa réponse. Dans d'autres cas, quelques tablettes exhibent les calculs numériques qui permettaient d'aboutir à la réponse cherchée à un niveau descriptif qui n'est pas «auto-explicatif» (ce qui demande, pour essayer de comprendre le fil de la pensée sous-jacent à la procédure de résolution, de reconstruire la procédure elle-même).
Cependant, ces calculs deviennent clairs dès qu'ils sont traduits en utilisant le langage algébrique d'aujourd'hui. Cela a amené à penser que les scribes babyloniens connaissait la formule de l'équation de deuxième degré mais que, faute de symboles, ils ne l'avaient pas écrite. Il y a à peine une dizaine d'années, J. Høyrup, suite à une minutieuse étude linguistique, a proposé une autre interpretation (qui a fait d'ailleurs l'objet d'une des conférences présentées à la «Première Université européenne d'été, histoire et épistémologie ...»: voir Høyrup, 1995; cependant, l'exposé le plus complet se trouve dans son article monumental de 1990. Voir bibliographie). D'après la reconstruction de Høyrup, les procédures de résolution liées à ces problèmes reposent sur des configurations géométriques qui sont transformées grâce à des déplacements (de type «cut-and-paste») de figures ou parties de figures, comme celle qu'on trouve chez Al-Khwarizmi, dans le chapitre des «démonstrations» (cf. Hughes, éd. 1986, pp. 236-241) de son *Traité concis sur les règles d'al-gabr et d'al-muqabala* . Ce serait ce même type de transformations qui serait à la base de la résolution de maints problèmes contenus dans un livre médiéval, le *Liber Mensurationum* d'Abû Bekr (probablement 9e siècle), dont le manuscrit arabe a été perdu et qui nous est parvenu dans une traduction du 12 siècle due a Gerardo de Cremona (éd. Busard, 1968). En effet, beaucoup de ces

[2] On trouvera une analyse plus détaillée de l'aspect historique dans: Radford, L. La ecuación de segundo grado: una propuesta de enseñanza basada en su desarrollo histórico-conceptual, *Memorias de la IX Reunion centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*, La Habana, Cuba (accepté pour publication).

problèmes sont formulés dans le langage de la «Géométrie du Coupage et du Collage» (G.C.C.). Voici, pour fixer les idées, le problème 41 (Busard, 1981, p. 95):

> «Et si quelqu'un te dit: ajoute le petit côté et l'aire [d'un rectangle] et le résultat fût 54, et le petit côté plus deux est égal au grand côté, quels sont chacun des côtés ?»

La résolution est donnée comme suit:

> «La façon de trouver ceci est que tu ajoutes deux [à un], de sorte que tu as 3. Prends maintenant la moitié qui est un et demi et multiplie-la par elle-même et tu obtiendras deux et un quart. Alors ajoute 54 à cela et tu auras 56 et un quart; prend la racine et enlève un et demi; il te reste 6 et cela est le petit côté; ajoute-lui deux et tu auras le grand côté, c'est-à-dire 8. Cependant, il y a une méthode pour trouver cela d'après les gens de l'al-gabr ...»

La procédure de résolution que, comme on le voit, indique les opérations entre les nombres qu'on doit suivre, est vraisamblablement sous-tendue par la configuration géométrique ci-jointe (figs. 1 à 4). Le petit côté, x, est muni d'une «projection» de base égale à 1 (fig. 1), de sorte que la mesure du segment apparaît tantôt comme étant la mesure de la longueur du segment tantôt comme étant la mesure de l'aire du rectangle «projété». Ensuite, l'excédent du grand côté sur le petit côté donne lieu à deux petits rectangles de base égale à 1. La fig. 1 est donc décomposée en un carré (dont le côté est indiqué par x dans la fig. 2) et trois rectangles de dimensions $1 \times x$ (fig. 2). L'idée clé dans la résolution de ce type de problèmes (et qui apparaît de façon explicite dans l'oeuvre d'Al-Khwarizmi) est de se ramener à un carré. Pour ce faire, ici, Abû Bekr dit «prend maintenant la moitié [de 3]», ce qui voudrait dire, si on se refère à la figure, «prend la moitié des trois rectangles». Cela donne un couple de «rectangle et demi» Le rectangle et demi à droite serait ensuite coupé et collé au bas de la figure (voir fig. 3). La figure qui en résulte est presque un carré: il lui manque un petit carré de côté égal à $1\frac{1}{2}$. La complétion du grand carré se fait donc en lui ajoutant un carré d'aire égale à $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$. Le carré final a donc une aire égale à $54 + 2\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$, de sorte que son côté est $\sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$. Le petit côté, x, du rectangle original est alors égal à $7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 6$, d'où l'on obtient que le grand côté est 8.

Nous n'allons pas discuter ici les arguments historiques qui soutiennent la reconstruction des procédures de résolution des problèmes comme le précédent en termes de la G.C.C.(voir Høyrup, 1986). Nous nous contenterons d'indiquer que l'apparition explicite de ces procédures dans l'oeuvre d'Al-khwarizmi ne laisse aucun doute que ces procédures étaient bien connues au 9e siècle dans certains milieux arabes. D'autre part, Abû Bekr offre souvent une autre solution à ses problèmes: une solution qu'il attribue «aux gens de l'al-gabr». C'est bien le cas du problème précédent (où le petit côté est désigé par la chose (*res* en latin) et son carré par le mot *census* qui, littéralement, veut dire fortune, bien). Cela a amené

Høyrup (1986) à suggérer la coexistence de deux traditions mathématiques, l'une étant celle de la G.C.C., l'autre celle des algébristes que Al-Khwarizmi serait en train de fusioner

§3. La séquence didactique

La séquence a duré 5 périodes de 80 minutes chacune et a été expérimentée auprès des éléves d'une classe de 11e année (16 ans) d'une école de Sudbury. Les problèmes ont été introduits comme des puzzles. Les élèves, réunis en groupes de travail, devaient proposer et discuter des procédures de résolution.

Étape 1:

Dans l'étape 1, on a présenté aux élèves le problème suivant:

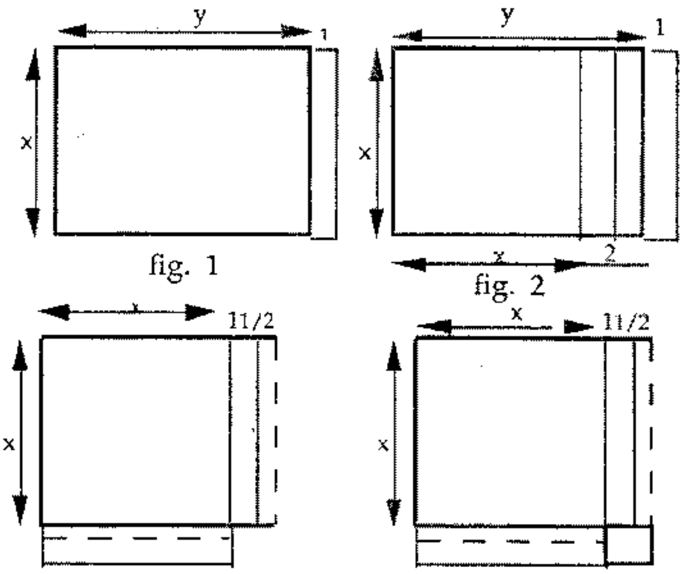


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4

Problème 1:

Que devraient-être les dimensions d'un rectangle dont le demi-périmètre est 20 et dont l'aire devrait mesurer 96 unités carrées?

La réponse spontanée la plus fréquente donnée par les élèves est 10 par 10 (le nombre 10 provient de prendre la moitié de 20). Quand la vérification est entreprise, ils constatent que la réponse n'est pas correcte. Le professeur donne alors la signification géométrique au problème, en utilisant des grandes figures en carton collées au tableau: si on prend un carré de côté 10, son aire est de 100. On doit donc retrancher 4 unités carrées du carré de côté 10 (fig. 5) pour obtenir une figure d'aire 96. Cela peut s'obtenir (et c'est cela l'idée clé de la résolution) en retranchant du grand carré un petit carré de côté 2 (voir fig. 6). Pour obtenir un rectangle on coupe le rectangle montré en pointillé dans la fig. 7 et on le déplace verticalement vers la droite (fig. 8). Les côtés cherchés mesurent donc 12 et 8 unités.

La résolution de ce problème, qui se trouve en fait sous une formulation numérique dans l'*Arithmétique* de Diophante (*ca.* 250 ap. J.-C) (Livre I, problème 27) et dont l'origine remontrait aux babyloniens, est loin d'être évidente pour les élèves et il serait peu sensé, croyons-nous, de prétendre qu'ils la redecouvrent par «eux-mêmes». Cependant, la particularité géométrique de cette résolution a pu déclencher un vif intérêt chez les élèves qui, en essayant de l'utiliser devant d'autres problèmes similaires, ont

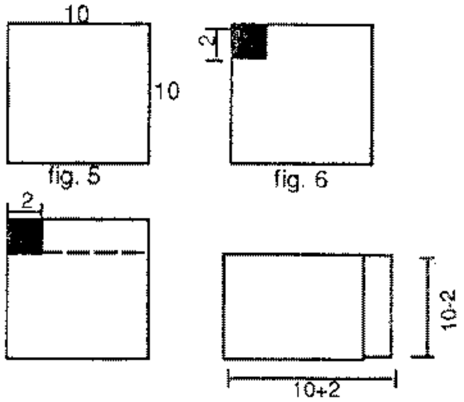


fig. 5 fig. 6 fig. 7 fig. 8

commencé le processus d'intériorisation conceptuelle mentionné au §1. Afin déviter une simple «répétition» (qui en fait n'est que l'utilisation d'un même concept au même niveau conceptuel, ou pour le dire en d'autres mots, l'utilisation du même référant sans changement de sens), nous avons inclus des problèmes dont l'aire du petit carré à enlever (fig. 6) n'a pas de racine carré exacte (par exemple, aire=30 et semi-périmètre =12).
Par ailleurs, on a demandé aux élèves de ramener le jour suivant par écrit une description des étapes à suivre pour résoudre ce type de problème.

Étape 2:

Cette étape a commencé avec une discussion des descriptions des étapes de résolution des problèmes vus à l'étape 1. Les élèves ont dû discuter avec une autre personne et se mettre d'accord sur les points qui auraient donné lieu à un conflit ou à une amélioration.
En plénière, une méthode développée par un des élèves est présentée et discutée au tableau. Cela a permis à certains élèves de mieux comprendre.
Suite à cela, on a demandé aux élèves de composer des problèmes eux-mêmes en respectant la restriction suivante: les côtés du rectangle cherché doivent s'exprimer en nombre entiers; puis, dans un deuxième temps, les côtés du rectangle cherché ne doivent pas s'exprimer en nombres entiers.
On a même demandé aux élèves de trouver des réponses s'exprimant en fractions. Certains de ces problèmes seraient utilisés pour le test à la fin de l'unité.

Étape 3:

La recherche de problèmes ayant de réponses dans N^c avait pour but de faire en sorte que les élèves comprennent les détails de la démarche de résolution à un niveau de profondeur qui assure l'intériorisation des actions. À l'étape 3, on leur a présenté un problème qui demande une organisation conceptuelle différente de la précédente. Le problème, inspiré de celui d'Abû Bekr vu au §2, était le suivant (fig. 9)

Problème 2:

> Un rectangle mesure 10 unités de largeur. On construit un carré sur sa longueur. Ensemble, les deux figures ont une aire de 39 unités carrées. Quelle est la longueur du rectangle?

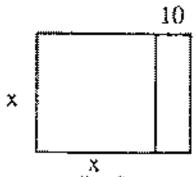


fig. 9

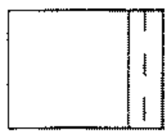


fig. 10

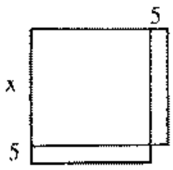


fig. 11

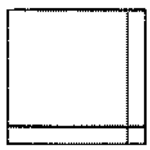


fig. 12

Après avoir reconnu que la procédure précedente ne s'applique pas au problème en question (fig. 10), des éleves ont proposé des solutions au tableau. Avec la participation des élèves, le professeur coupe le rectangle en deux sur sa longueur (fig. 10), puis prend un des morceaux pour le coller sur un autre côté du carré (fig. 11).Quand les élèves essayent d'identifier la figure, ils s'aperçoivent que «c'est presque un carré» (fig. 11). Le professeur indique alors qu'on pourrait le compléter . Pour ce faire, il ajoute, au tableau, un petit carré de côté 5 (fig. 12). On donne d'autres problèmes similaires aux élèves qu'ils dovent faire en groupe. Comme à l'étape précédente, ils doivent revenir le lendemain avec une description écrite des étapes à suivre pour résoudre ce type de problème.

Étapes 4 et 5:
On discute les productions des élèves comme à l'étape 2. Suite à cela, les élèves doivent trouver les dimensions du carré, comme au problème 2, sauf que maintenant on passe à une nouvelle catégorie sémiotique: on ne donne pas de nombres concrets pour la largeur (ou base) et pour l'aire que les deux figures forment ensemble. On leur suggère d'utiliser des lettres à la place des mots et de réécrire la procédure de résolution qu'ils ont amenée le matin mais, maintenant, en utilisant les lettres choisies. Cela les amène à trouver une formule pour l'équation $x^2 + bx = c$. Après, on discute les équations $ax^2 + bx = c$ (voir fig. 13 contenant un extrait du travail fait par une élève) et $ax^2 + bx + c = 0$ (cette dernière donnant lieu à une discussion sur les nombres négatifs impossibles à modéliser dans le contexte géométrique utilisé). Le passage au symbolique ne consiste pas en une simple transcription, comme nous avons pu le noter. En effet, le symbole doit résumer maintenant l'expérience passée. Cela inclut une étape de généralisation et de réorganisation des actions qui débouche sur une description plus ample des objets mathématiques. En contre partie, les objets mathématiques se voient conférés d'une nouvelle dimension. Désormais, ils appartiennent à une catégorie conceptuelle (ou «plan de conscience») plus riche. Cela est particulièrement visible quand les élèves abordent, après avoir ré-inventé la formule de deuxième degré, des équations formulées en langage algébrique (par exemple, $2x^2 + 12x - 64 = 0$). Pour quelques équations, ils choisissent la démarche géométrique et pour d'autres ils choisissent la substitution de nombres dans les paramètres de la formule. La préférence pour une ou l'autre des méthodes semble être sous-tendue par l'existence de *tendances généralisantes* chez les élèves qu'il conviendrait d'étudier et de caractériser d'avantage dans l'avenir.

§4. Le parcours des catégories sémiotiques: un exemple

Pour trouver la formule qui permet de résoudre l'équation générale $ax^2 + bx = c$, l'élève utilise d'abord la méthode babylonienne (voir les deux dessins ci-contre). La méthode de résolution est exprimée dans une catégorie sémiotique plus générale que la catégorie sémiotique numérico-géométrique utilisée pour résoudre des problèmes où l'aire «c» et la base «b» étaient données (comme dans le problème 1 ou 2 vu ci-dessus). La stratégie de résolution suit cependant les mêmes actions que dans le cas de la catégorie sémiotique précédente. Au niveau de l'écriture, la résolution n'est pas, comme les résolutions babyloniennes, «autosuffisante» du point de vue de l'explication (c'est-à-dire du social). Certains mouvements de la pensée restent confinés au plan de la conscience.

Pour trouver la formule, l'élève s'engage dans une troisième catégorie sémantique: celle qui rendra explicite ces mouvements de pensée demeurés jusqu'alors silencieux (il y a, en particulier, une linéarité des actions au niveau de l'écriture qu'on a pas dans la catégorie sémiotique précédente). Elle commence par réécrire l'aire du grand carré (2e dessin) de deux façons différentes: d'abord en termes de l'aire d'un carré dont on connaît le côté, puis comme somme de deux aires disjointes, le «gnomon», comme disaient les grecs, et le petit carré. C'est dans cette dernière catégorie sémiotique que le détachement au contexte aura lieu: il y a des opérations qui n'ont plus d'équivalent dans la catégorie précédente: c'est le cas de la ligne 4 et suivantes.

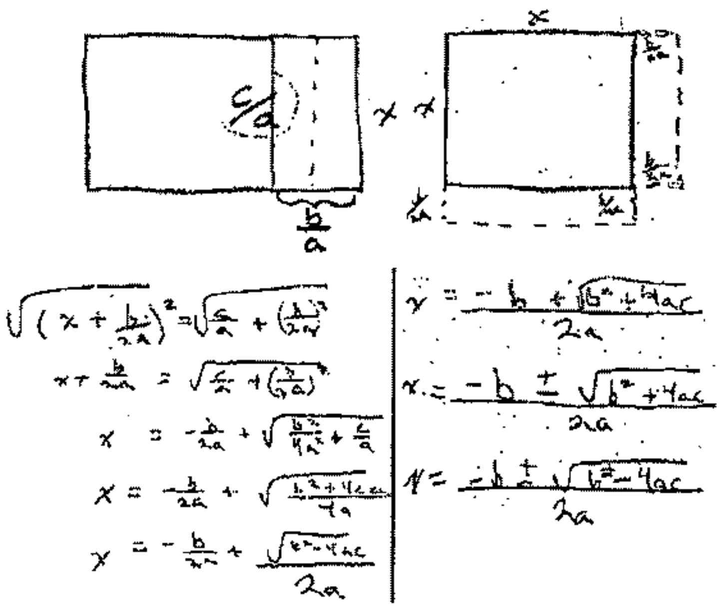


fig. 13
Une élève ré-invente la formule pour résoudre l'équation $ax^2+bx=c$

Références

Busard, H. (1968) L'Algèbre au Moyen Âge: Le «Liber Mensurationum» d'Abû Bekr, *Journal des savants*, Avril-juin, 65-124.

Høyrup, J. (1986) Al-Khwarizmi, Ibn-Turk, and the Liber Mensurationum: on the Origins of Islamic Algebra, *Erdem* 2 (Ankara), 445-484.

Høyrup, J. (1990) Algebra and Naive Geometry. An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought, *Altorientalische Forschungen*,17, 27-69, 262-354.

Høyrup, J. (1995) «Les quatre côtés et l'aire» - sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes mathématiques savantes, *Actes de la 1ère Université d'été européenne* Histoire *et épistémologie dans l'éducation mathématique*, F. Lalande, F. Jaboeuf et Y. Nouazé (éds.), IREM de Montpellier, pp. 507-531.

Hughes, B. (1986) Gerard of Cremona's Translation of Al-Khwarizmi's *Al-Jabr*: A Critical Edition, *Mediaeval Studies*, No. 48, 211-263.

Lerman, S. (1996) Intersubjectivity in Mathematics Learning: A Challenge to the Radical Constructivist Paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2) 133-150.

O'Loughlin, M. (1992) Rethinking Science Education: Beyond Piagetian Constructivism Towards a Sociocultural model of Teaching and Learning, *Journal of research in science teaching*, 29 (8), pp. 791-820.

Otte, M. (1994) Historiographical Trends in the Social History of Mathematics and Science, in: *Trends in the Historiography of Sciences*, K. Gavroglu et al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, pp. 295-315.

Wertsch, J. et Stone, C. A. (1985) The concept of internalization in Vygotsky's account of the genesis of higher mental functions, in: *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspectives*, J. V. Wertsch (éd.), Cambridge University Press, pp. 162-179.

ATIVIDADES PARA O ENSINO DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

[1] Silmara Epifânia de Castro Carvalho, Universidade Federal de Goiás-UFG
Elisabeth Cristina de Faria, Universidade Federal de Goiás-UFG

Introdução

Este trabalho originou-se de um projeto de parceria entre a Universidade Federal de Goiás e a Secretaria Municipal de Educação de Goiânia-Goiás, composto de uma equipe formada por duas professoras da Rede Pública de Ensino, duas alunas bolsistas da 3ª e 4ª série de Licenciatura em Matemática, pela técnica em assuntos educacionais e pela coordenadora/professora de didática e prática de ensino de matemática do Instituto de Matemática e Física da Universidade Federal de Goiás.

O conteúdo partiu da preocupação das professoras da Rede Pública Municipal que lecionavam na 8ª série do Ensino Fundamental e afirmavam ser este um dos tópicos daquela série em que os alunos apresentavam maior dificuldade de aprendizagem.

Neste documento procuramos dar uma idéia das origens da questão pedagógica, os princípios e concepções sobre os quais apoiamos a nossa proposta de ensino e uma amostra das atividades que foram aplicadas.

Histórico

A maior preocupação das professoras da escola pública era com o ensino de equação do 2° grau, por considerarem este conteúdo como pré-requisito importante para a compreensão da maioria dos outros conteúdos de matemática de 8ª série e do 2° grau.

Geralmente esse conteúdo é ministrado pela maioria dos professores, de forma mecânica, estanque, sem nenhum significado para o aluno. Não é feita nenhuma ligação com situações-problema do cotidiano do aluno, por isso não representa nada, é apenas mais um conteúdo da matemática a ser decorado.

A fórmula de Bháskara, por exemplo, torna-se apenas mais uma técnica para resolver equação do 2° grau, e é tradicionalmente uma das prioridades do professor ao ensinar a equação do 2° grau

Em função disso propomo-nos buscar estratégias que subsidiassem uma mudança na forma de abordagem desse conteúdo tão importante, tornando-o significativo para o aluno.

Fundamentação Pedagógica

A proposta pedagógica está apoiada numa perspectiva construtivista resgatando o conhecimento de funções quadráticas a partir da experiência anterior do aluno.

---

[1] Outros integrantes: Profa. Zaíra da Cunha Melo Varizo/UFG, Profas Ivone M. Gomes e Maria dos Santos Pereira/Secretaria Municipal de Educaçao de Goiânia

Buscamos resgatar os aspectos históricos de formação do conceito de função, para isso foi preciso inverter a apresentação usual do ensino desta parte da álgebra, iniciando da quantificação de uma relação em situações nas quais se destacam variáveis independentes e dependentes.

As atividades de aprendizagem foram elaboradas a partir de situações que gerassem a compreensão do conhecimento algébrico. Introduzindo os alunos em um estudo de forma intuitiva procurando resgatar as fases de evolução da notação algébrica, o que vem de encontro com os nossos objetivos de construir o conhecimento a partir da experiência do aluno.

Buscando mostrar que o conhecimento algébrico está constantemente presente em nossas vidas e que eles representam fenômenos de natureza distintas, aplicamos aí as bases da álgebra sincopada, a qual é evidenciada apenas por serem feitas abreviações de letras que estavam diretamente relacionadas com a natureza do fenômeno em estudo por exemplo: para a variável tempo, utilizamos a letra T, para a variável lucro, utilizamos a letra L e assim por diante. Só após ter sido trabalhado uma quantidade razoável de situações-problemas e só quando o aluno foi capaz de generalizar, é que passamos a utilizar as letras X e Y para designar as variáveis, aplicando neste momento a álgebra simbólica, verificando assim a necessidade de uma simbologia única e simplificada.

Com relação aos parâmetros da função quadrática, geralmente designados por a, b e c, fez-se um estudo sobre sua variação e o comportamento do gráfico da função, de modo que o aluno pela expressão analítica já tenha uma idéia do gráfico no plano cartesiano e através do gráfico já tenha uma idéia da expressão analítica.

Escolheu-se uma abordagem da álgebra como estudo de relações e quantidades, na qual não cabe o sentido de incógnita, a variável pode assumir valores diferentes descrevendo fenômenos variados, como já foi dito. O aluno ficará frente a situações do tipo: O que acontecerá com a parábola caso o parâmetro da equação $ax^2 + bx + c$ se aproximar de zero ? Outras questões também são consideradas tais como: f(x) para x=a; x tal que f(x)=a; x para valores máximos e mínimos de f(x); como varia f num ponto próximo de a; o valor médio de f num intervalo próximo de (a,b).

Primeiramente, o estudo foi realizado de forma intuitiva através de relações, variações e dependência, de maneira a conduzir os alunos à abstração num primeiro contato com tais conceitos estudando as relações de proporcionalidade através da análise de tabelas, bem como de dependência entre as variáveis envolvidas no comportamento de fenômeno, deixando que a noção de relação e dependência surja naturalmente.

Em seguida, passa-se à construção do gráfico cartesiano e da lei de formação que descreve matematicamente o fenômeno que está sendo estudado. A partir de funções lineares chega-se às funções quadráticas e daí aprofunda-se a compreensão do gráfico da parábola detalhando seus elementos, vértice, raízes e pontos máximo e mínimo. Sempre partindo de situações-problema.

A equação do 2° grau aparece no momento de se analisar o caso particular em que a função se anula, quando surge a fórmula de Bháskara, a qual foi deduzida através da complementação de quadrados. A fórmula surge com sentido, pois decorreu da necessidade de se encontrar o valor de X para os quais Y é nulo e também, como uma necessidade de se agilizar o processo de cálculo.

Ao serem elaboradas as atividades tentou-se apresentar um número de fenômenos que permitisse ao aluno generalizar a noção de função, representando as funções de diferentes formas: tabelas, gráficos cartesianos e expressões analíticas.

A preocupação do grupo era que o aluno entendesse o papel da matemática na compreensão do mundo e na sua transformação, e que isto se dá através da capacidade do homem de explicar, prever, fazer e repetir fenômenos.

A vantagem de se estudar função quadrática deste modo é que, diferentes formas de representação contribuem na construção do conceito, pois além de permitir a reversibilidade de pensamento, cada uma delas terá um papel importante na compreensão do conceito. Tabelas e gráficos permitem perceber os pontos máximo e mínimo, intervalos de crescimento e declínio, sendo que o gráfico conduz a compreensão de continuidade quando os alunos ligam os pontos. A representação algébrica oferece oportunidade do desenvolvimento da noção de uma "regra" ou "lei de formação", esta ao condensar muita informação destaca a importância da simbologia.

Partiu-se de um estudo de tabelas, as quais representam fenômenos naturais ou sociais de nosso mundo que tenham algum significado para a vida dos alunos.

O professor deverá buscar tabelas que representem fenômenos familiares do seu aluno e se necessário, isto é, quando perceber dificuldade de generalização, apresentar mais fenômenos do que os sugeridos neste trabalho.

As atividades de ensino foram elaboradas com a intenção de oferecer uma forma de organização de situações de aprendizagem que permita o aluno construir o conhecimento algébrico referente às funções quadráticas que não se esgotam neste trabalho. O professor poderá enriquecê-lo e complementá-lo.

Objetivos Gerais

Fazer com que os alunos explorem os conceitos e processos algébricos de modo que : compreendam o conceito de variável dependente e independente; estabeleçam relações entre tabelas, gráficos e expressão analítica de um mesmo fenômeno; apliquem métodos algébricos; analisem o gráfico da função.

Conteúdo

- Estudo de tabelas: Fenômeno; elementos da tabela; relação entre os elementos da tabela; construção e interpretação de tabelas; gráficos das tabelas.
- Construção de expressão analítica partindo da tabela
- Representação gráfica de funções
- Estudo do gráfico da função quadrática: Concavidade da parábola; coordenadas do vértice; eixo de simetria; zeros da fun-ção; sinal da função; máximo e mínimo.
- Equação do 2° grau: Fatoração do quadrado perfeito; forma geral da equação: $ax^2 + bx + c = 0$; fórmula de Bháskara; situações-problema envolvendo equação do 2° grau.

Características das atividades

As atividades são compostas de objetivos, procedimentos, sugestões, algumas incluem observações. Poderá ser utilizado todas as atividades ou não assim como relacionar o número de atividades com a hora/aula, uma atividade poderá durar de uma ou mais horas/aula.

As aulas foram conjugadas, através de discussões em grupo, algumas vezes utilizou-se de aulas expositivas .

Trata-se de um trabalho em conclusão, não acabado, pois deverá haver reformulações nas atividades de ensino, após a aplicação por outros professores.

Nas atividades a abordagem do conteúdo de matemática é distinta dos livros didático usualmente adotados pelos professores, para não ocasionar muitos transtornos, as últimas atividades foram compostas de problemas frequentemente encontrados em seus livros afim de que não se sentissem fora de sua realidade escolar.

Atividade I

Objetivos: Familiarizar os alunos com tabelas; identificar os elementos da tabela; identificar os fenômenos que a tabela representa; identificar a distribuição dos elementos da tabela; Identificar relações entre elementos tanto na horizontal quanto na vertical.

Procedimentos: a) Atividade deve ser desenvolvida em grupos de três alunos; b) O professor deve distribuir todas as tabelas para cada grupo de alunos; c) Os alunos devem discutir em grupo durante uns vinte minutos; d) Cada grupo apresenta seus resultados escrevendo no quadro, começando pelos grupos que terminarem primeiro a discussão; e) Depois dos resultados apresentados o professor vai analisar destacando o fenômeno representado, os elementos e sua variação; f) Para a próxima aula pedir que o componente de cada grupo traga uma tabela; g) Orientar o aluno a ir formando o caderno, colando as tabelas e escrevendo o fenômeno e as relações entre os elementos da tabela.

Sugestão: Conforme as características do grupo de professores da série é possível trabalhar tabelas relacionadas com geografia, história, educação física, ciências e português, neste caso o conteúdo torna-se bem mais significativo para os alunos. O professor poderá encontrar tabelas em jornais, revistas, órgãos públicos ou outros locais que ofereçam dados de fenômenos naturais ou sociais.

Observações: *Antes de desenvolver esta atividade, o professor deverá discutir com os alunos o que é um fenômeno natural, este pode ser representado por tabela deixando o aluno descobrir as relações através da própria observação. Só intervir através de perguntas para instigar o pensamento do aluno. No texto são sugeridas questões para explorar os objetivos propostos.*

Tabelas

Tabela 1 : Porcentagem De Gols

1° Tempo

Minutos Jogados	5	10	15	20	25	30	35	40	45
% Gols feitos	3,4	4,1	4,4	4,8	5,9	6,1	5,9	5,2	4,0

2° Tempo

Minutos Jogados	5	10	15	20	25	30	35	40	45
% Gols feitos	5,4	6,0	5,3	4,9	6,0	7,8	7,0	5,9	2,5

1. Existe uma relação de dependência entre os elementos dessa tabela? Por quê? 2. A variação do índice de gols é crescente ou decrescente?

Tabela 2 : PESO/IDADE

Idade (mês)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Peso (kg)	2,7	3,0	3,5	4,0	4,6	5,4	6,0	6,5	7.0	7,4	7,8	8,0	8,4

1. O que ocorre com os elementos da tabela? 2. O peso é proporcional à idade?. 3. O que ocorre com o peso se dobrarmos esta idade? 4. Qual a variação de um peso de um mês para outro? É constante ?

Atividade II

Objetivos: Representar as tabelas e os gráficos através da expressão analítica; definir função quadrática.

Procedimentos: a) Os alunos a partir das respectivas tabelas deverão chegar à lei de formação. b) Após as diversas expressões analíticas das funções, os alunos junto com o professor, definem função quadrática. c) Identificar os zeros da função, o vértice e o eixo de simetria. d) Pedir aos alunos para representar as tabelas graficamente.

Problema 1 - Quando se disputa um torneio de futebol, basquete ou voleibol, em turno e returno, o n° total de jogos do torneio, que indicamos por J, é dado em função do número E de equipes que disputam o torneio, conforme podemos observar na tabela seguinte.

Procedimentos: a)Neste problema deverá ser dada a tabela e instigar o aluno para chegar a lei de formação. Conforme a necessidade deverão ser elaboradas questões para orientar o raciocínio do aluno.

N° de equipes (E)	2	3	4	5	...	E
N° de Jogos (J)	2	6	12	20	...	J

Pela tabela temos: $J = E(E-1)$ então $J = E^2 - E$

Problema 2- A seguinte tabela nos mostra dados referentes ao cálculo da área do círculo, onde R é o raio , A a área do círculo e π é o número irracional: $\pi = 3,14...$

Raio	1	2	3	4	5
Area	1π	4π	9π	16π	25π

1. O que podemos concluir desta tabela? 2. Vamos analisar o que ocorre com a área ? Como se faz o seu cálculo? 3.Podemos chegar a uma lei de formação, ou seja, podemos achar uma função para se calcular a área da circunferência com um raio qualquer? 4. O parâmetro vária?

Obs.: O objetivo desse problema é trabalhar com o conceito de parâmetro, que no caso é o π, e dependência.

Atividade III

Objetivos: Interpretar os gráficos comparando com a expressão analítica; dada a expressão analítica o aluno deve fazer um esboço do gráfico; determinar a concavidade da parábola.

Procedimentos: a) Dar a expressão analítica $y = x^2$ e variar os parâmetro de x^2, atribuindo-lhe valores maiores e menores que 1 e pedir aos alunos que construam os respectivos gráficos, conforme figura abaixo. Esse procedimento permitirá ao aluno perceber que quanto maior for o valor de a, a parábola será mais fechada e quanto mais se aproximar de zero será mais aberta e que quando for igual a zero ela se confunde com o eixo das abscissas. No momento em que o parâmetro de x^2 se tornar negativo a concavidade se inverterá veja abaixo figura 1 .b) Conduzir o aluno à formação da tabela. c) Fazer o gráfico através da tabela. d) Comparar a expressão analítica com o gráfico.

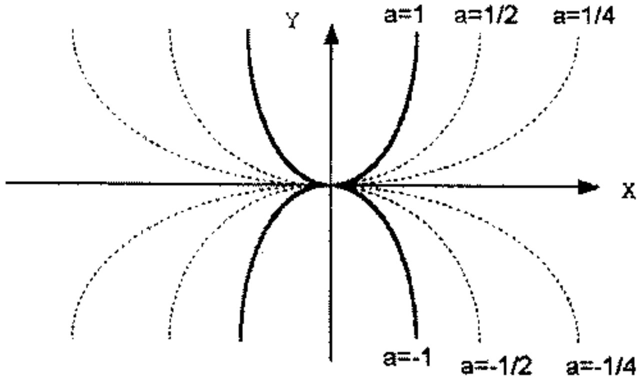


Figura 1

***Observação:** O objetivo dessa atividade é que o aluno faça neste momento uma inversão de procedimento: tabela-gráfico-expressão analítica para expressão analítica-tabela-gráfico.*

Atividade IV

Objetivos: Desenvolver a habilidade de encontrar a expressão analítica; determinar os zeros da função e as coordenadas do vértice; identificar o eixo de simetria; identificar o ponto de inflexão; identificar o intervalo onde a função é crescente e onde é decrescente; estudar a variação do sinal da função.

Procedimentos: a) Distribuir uma folha com os problemas ou escrevê-los no quadro giz; b) Fazer a leitura do mesmo com sua respectiva interpretação; c) Conduzir o aluno à construção da tabela e em seguida o gráfico; d) Através do gráfico explorar todos os objetivos.

Problema 1: Os alunos das 8^as^ séries produziram camisetas ao custo de R$6,00 por unidade. Estima-se que se cada camiseta for vendida por X reais, os alunos comprarão 70 - X camisetas. Expresse o lucro dos alunos em função do preço da camiseta e calcule o preço com o qual o lucro dos alunos será maior (preço ótimo).

Observação: *Não há necessidade de ser o problema apresentado, pode ser um outro semelhante e que esteja sendo vivenciado pelos alunos.*

Atividade V

Objetivos: Identificar uma equação do 2ª grau a partir da função quadrática; identificar um trinômio quadrado perfeito; completar um trinômio quadrado perfeito; escrever a expressão analítica da função quadrática $Y = a^2 + bx + c$

Procedimentos: a) Retomar todas as expressões analíticas estudadas em situações-problema fazendo y=0. b) Através da análise das observações, identificar o trinômio quadrado perfeito, fazendo a complementação. c) Analisar os parâmetros nas diferentes situações-problemas e verificar se o aluno é capaz de generalizar, isto é, abstrair das situações e perceber que os parâmetros podem ser representados por letras, neste caso pelas letras a, b e c.

Atividade VI

Objetivos: Determinar a expressão analítica de função quadrática a partir de um problema; determinar a equação do 2° grau a partir de um problema; determinar algebricamente as raízes de uma função quadrática; determinar as raízes da função geometricamente; determinar os pontos de máximo e de mínimo;

Procedimentos: a) Explorar vértices, raízes, eixo de simetria, concavidade e o sinal da parábola; b) Partindo do gráfico da parábola determinar as raízes e escrever a equação do 2° grau; c) Explorar situações problemas com aplicação da equação do 2° grau. d) Partindo da expressão geral $Y = ax^2 + bx + c$, retomar fatoração e completar quadrado.

Obs.: Você poderá selecionar problemas que encontrar em qualquer livro didático de 8ª série.

Conclusão

A nossa forma de trabalho está contida dentro das características da pesquisa-ação a qual "é concebida e realizada em estreita associação com a ação ou com a resolução de um problema coletivo, e na qual pesquisadores e participantes representativos da situação problema estão envolvidos de modo cooperatibo ou participativo" (Thiolent, 1985).

Considerando que o trabalho seria aplicado com alunos que vem de uma escola tradicional e que seria impróprio causar uma ruptura no seu aprendizado, procuramos manter uma certa relação com o seu livro didático aproveitando exercícios em nossas atividades.

Através dos depoimentos das professoras que participaram do projeto e de seus alunos podemos dizer que os nossos objetivos foram alcançados. Uma das professoras com experiência de 25 anos de trabalho na 8ª série fez a seguinte declaração: "com a expectativa no estudo de tabelas, uma matemática diferente, os alunos foram ficando mais interessados pelas aulas, mais motivados, aumentanto assim a frequência às aulas. Alunos que sempre matavam a primeira aula do dia, começaram a não mata-la mais, vindo direto do trabalho para a escola mesmo sem jantar."

Para nós, a mais importante constatação da validade do nosso trabalho porém, veio dos depoimentos dos alunos, dos quais transcreveremos alguns a seguir. "Porque nos ajuda até mesmo muna compreensão lógica da vida". "Porque fez eu enxergar coisas novas que nunca imaginei estudar, eu só pensava que íamos ficar sempre com aquelas contas.

Bibliografia

DOLLE, Jean-Marie. *Para compreender Jean Piaget*. São Paulo, Zahar, 1981.

MIORIM, Maria A.; MIGUEL, Antônio e FIORENTINI, Dário. Ressonâncias e dissonâncias do movimento pendular entre álgebra e geometria no currículo escolar brasileiro. In: *Zetetiké*. UNICAMP 1(1): 19-39. 1993.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS MATHEMATICS. *Standarts*. Reston VA. 1991.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. *Matemática*. 1.ed. São Paulo, Edart, 1966.

THIOLENT, Michel. *Metodologia da pesquisa-ação*. São Paulo, Cortez. 1985

VARIZO, Zaíra da Cunha Melo. *A reformulação do ensino da álgebra escolar*. UFG. Mimeografado 1994.

WHITEHEAD, A.N. *Introdução à matemática*. Coimbra-Portugal, Armênio Amado. 1948.

O ENSINO DA MATEMÁTICA E ALGUMAS PERSONALIDADES RELEVANTES DA HISTÓRIA POLÍTICA E CULTURAL DO PAÍS

Maria Guilhermina Nogueira, Esc. Sec. Almeida Garrett / Univ. Lusíada - Porto

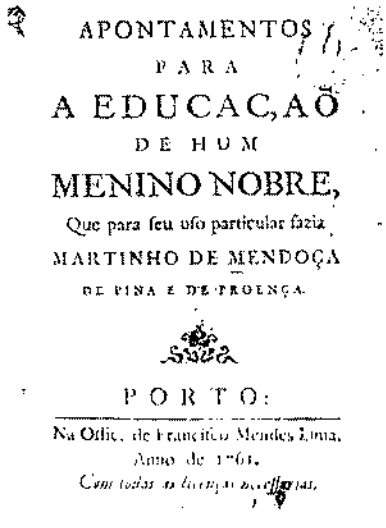
Será que o ensino da matemática é importante (imprescindível?) para a formação de cidadãos livres, responsáveis e construtores de uma sociedade melhor? ou, pelo contrário, ele é absolutamente dispensável e o facto de as épocas mais marcantes da humanidade, não apenas da civilização ocidental, serem as mesmas em que a matemática e o seu ensino beneficiarem de mais atenção, é pura coincidência? Perguntas cujas respostas procuramos na esperança de que validem aquilo com que preenchemos grande parte dos nossos dias. E o recurso ao passado surge da convicção, há muito formada, de que a compreensão do presente e a construção do futuro que quisermos, é impossível com o desconhecimento das utopias, dos erros e das traições que encheram o nosso passado colectivo, fazendo aquilo que somos como povo. E será, mais uma vez apenas por coincidência, que somos tão pouco, quão pouca tem sido a atenção dada pelo poder ao ensino da matemática, quando a sua importância é afirmada, mesmo por personalidades cuja formação literária poderia, naturalmente, desculpá-los pelo desconhecimento das potencialidades daquele ensino? Efectivamente, foi com bastante surpresa - pois não temos verificado nada semelhante na actualidade - que encontrámos no passado tanta preocupação publicamente manifestada, por pessoas que marcaram a Literatura do país, acerca da necessidade de um ensino da matemática com qualidade, para a formação base dos cidadãos.

1. MARTINHO DE MENDONÇA PROENÇA (1693-1743) foi um dos muitos portugueses que, para satisfazer a curiosidade e ânsia de saber, tiveram que abandonar o país onde o ambiente de intolerância, mesquinhez e perseguição atingia todos os que ousavam pôr em causa as ideias da Igreja e do Estado que no campo do ensino há muito tinham sido abandonadas nos países mais evoluídos, mesmo por essa mesma Igreja. Na Europa era o tempo da Física Experimental e da interpretação matemática dos fenómenos físicos com Newton e Leibnitz a iluminarem os caminhos da Ciência e na educação vingavam as ideias de Locke e Comenius.

Depois de abandonar o Colégio das Artes em Coimbra e ter feito vários estudos que incluíram a Matemática e a filosofia de Pierre Cassendi, retirado na sua residência na Guarda, empreende uma prolongada viagem pela Europa, onde diz ter obtido alguma luz sobre os complexos sistemas de Newton e Leibniz [11]. Na Alemanha foi mestre de D. Manuel, irmão de D. João V, que reinava na data, tendo também com ele participado, na Hungria, na guerra contra os Turcos.

Regressa ao país com 27 anos e depois de ingressar na Academia Real de História e na Academia Portuguesa e de uma viagem oficial à América entrega-se a uma vasta produção literária. Nos últimos anos de vida foi ainda Guarda-Mor da Torre do Tombo e bibliotecário da Livraria Real.

Das suas obras literárias vamos destacar aquela em que dá grande relevo ao ensino da Matemática, mostrando uma tal crença na eficácia dos raciocínios matemáticos que até preconiza a sua utilização nos problemas da Moral e da Ética!
Chama-se ***Apontamentos para a Educaçaõ de hum Menino Nobre*** (1734) e foi escrito para a educação dos seus filhos, revelando preocupações pedagógicas muito próximas das ideias expostas pelo filósofo inglês Locke. Esta obra é considerada como representando o último estádio da pedagogia nacional (não oficial) antes da lufada de ar fresco trazida por Verney transportando as ideias inovadoras que fervilhavam por toda a Europa.
Da 2ª edição (1761) vamos apresentar algumas passagens que mostram o valor que o autor atribui à matemática na educação dos jovens.


APONTAMENTOS
PARA
A EDUCAÇAÕ
DE HUM
MENINO NOBRE,
Que para ſeu uſo particular fazia
MARTINHO DE MENDOÇA
DE PINA E DE PROENÇA.

PORTO:
Na Offic. de Franciſco Mendes Lima.
Anno de 1761.
Com todas as licenças neceſſarias.

res, e as vidas dos Varoens illuſtres.
De todas as ſciencias abſtractas, a Arithmetica he a mais clara, e mais facil, por iſſo ſe coſtumaõ aprender as ſuas primeiras regras no meſmo tempo, que ſe enſina a ler, e eſcrever: ſem o ſoccorro deſta ſciencia, nem haveria juſtiça, nem providencia. O Cavalhei-

em fim todo o comercio, que dà vigor ao eſtado, e toda a economia ſoberana, ou governo dos Imperios ſe funda na calculaçaõ das repetidas experiencias; da meſma ſorte he a Arithmetica a melhor Logica para dirigir, e aperfeiçoar a imaginaçaõ, e entẽdimento, e o melhor orgaõ, e inſtrumento, de que elle uſa para deſcubrir a verdade, o q̃ melhor ſe conhecerà reparando no methodo das regras da Arithmetica.

quem franquear eſte paſſo, terà a porta aberta para a Geometria ſublime, e poderá eſtender os olhos pelo delicioſo Paiz da Mathematica, que lhe fica inferior, e colher amenas flores, e utiliſſimos frutos nos jardins da Mecanica, Optica, e Aſtronomia.

Os elementos da Geometria, cujas demonſtraçoẽs ſe fazem ſenſiveis com as figuras, devem immediatamente ſeguir aos preceitos da Arithmetica; porque os primeiros livros de Euclides naõ tem difficuldade, que naõ poſſa vencer a applicaçaõ de hum menino, e tanto, que eſtes ſe tem ſabido fica facil paſſar adiante; mas he neceſſario, que do eſtudo Geometrico ſe tire, como ſuccede, hum ardente amor da verdade, e evidencia, e huma preſpicaz induſtria para a indagar, e conſeguir por meyo do methodo Geometrico, naõ uſando de termo nenhum, ou noçaõ, que claramente ſe naõ perceba, e naõ ſuppondo verdadeira propoſiçaõ alguma, ſenaõ aquellas, que pela ſimples

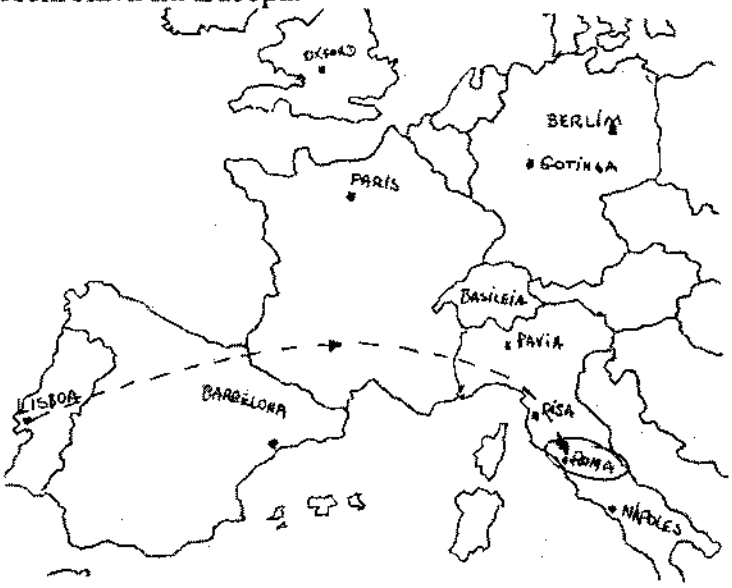
percepçaõ dos termos, ſaõ evidentes, ou com antecedente demonſtraçaõ ficaõ jà indubitaveis; e reparando na artificioſa induſtria das conſtrucçoẽs, que ſaõ os meyos preliminares neceſſarios para ſe fazer a demonſtraçaõ, depois de ſe ter algum uſo dos elementos, e praxe da Geometria vulgar, ſe deve eſtudar a Trigonometria, cujo uſo he

2. LUÍS ANTÓNIO VERNEY (1713-1792) é considerado o principal introdutor das novas ideias do "Iluminismo" em Portugal, apesar de ter abandonado, definitivamene, o país com 23 anos. Pertencia a uma família ilustre, com nove irmãos e pai francês, tendo frequentado o colégio de Santo Antão, da Companhia de Jesus e a Universidade de Évora onde se licenciou em Filosofia. Parte depois para Roma onde adquire o grau de doutor em Filosofia e mestre em Teologia. Procurava, assim, os horizontes abertos e a liberdade de expressão e criação que a Pátria lhe não permitia, transformando-se num dos intelectuais de posição racionalista que as descobertas científicas do séc. anterior fizeram nascer - os chamados iluministas.
Rómulo de Carvalho avaliando a sua acção, através das obras que adiante refiriremos, diz que Verney foi *«o mais notável dos iluministas portugueses, aquele que teve participação mais excitante na transformação da vida mental portuguesa»* [1].
Para Verney o passo mais importante a dar para a necessária transformação da mentalidade portuguesa era a reforma de todo o ensino, que não poderia ser feita sem o derrube do poder de quem detinha o seu monopólio - a Companhia de Jesus - tarefa a que dedicou a sua vida. Com esse intuito escreveu aquela que é considerada a sua obra fundamental e *«monumento pedagógico dentro da bibliografia portuguesa da especialidade»*[1] e tem por título **Verdadeiro Método de Estudar**. A 1ª edição data de 1746 e foi publicada, segundo A. Alberto de Andrade, anónima, em Nápoles e não Valensa como é indicado na capa, justificando-se estes cuidados pelo receio das perseguições do Santo Ofício, contra quem ousava criticar tão ferozmente os métodos de ensino dos Jesuítas. Como era de prever, os primeiros exemplares que chegaram a Portugal foram apreendidos pelo Santo Ofício, mas mais tarde começou a circular uma edição clandestina, que, "santa" ironia, foi impressa num convento e editada por um frade que acabou preso pela Inquisição.
A obra é escrita em forma de cartas, uso da época, e nela Verney analisa e critica todo o ensino desde o elementar ao superior, propondo os seus métodos fundamentados em citações bibliográficas, revelando conhecimentos em todos os ramos do saber. Aí são focados aspectos pedagógicos inovadores, como o ensino pela motivação e não pela obrigação, a prioridade da língua portuguesa sobre a latina, o uso de livros com figuras e, o mais provocatório e reservado para o fim, ou não conhecesse ele o espírito latino, o ensino para as mulheres em igualdade com os homens, pois as considerava tão ou mais capazes do que eles.
Acompanhou a obra metodológica com a publicação, em Roma, Barcelona e, mais tarde, Coimbra e Lisboa, de obras didácticas exemplificativas sobretudo no campo da Língua Portuguesa, Filosofia, Lógica e Metafísica.
A importância dessas obras foi, acima de tudo, o terem gerado grande polémica no país, com a publicação de textos pró e contra e a consequente circulação de ideias inovadoras no campo da educação, que viriam a dar os seus frutos nas mudanças efectuadas durante e após a Época Pombalina de que se salienta a criação do Colégio Real dos Nobres com um forte ensino científico, embora com poucos resultados, devido à falta de professores.

Vejamos agora o que afirma Verney no **Verdadeiro Método de Estudar** acerca da Matemática e do seu estudo a que não é alheio, por certo, o conhecimento da actividade matemática que se desenrolava na Europa.

VERDADEIRO
METODO
DE ESTUDAR,
PARA
Ser util à Republica, e à Igreja:
PROPORCIONADO
Ao estilo, e necesidade de Portugal
EXPOSTO
Em cartas escritas, pelo R. P. . . . Barbadinho
da Congregasam de Italia, ao R. P. . . .
Doutor na Universidade de Coimbra.
TOMO I.

VALENSA



observam na natureza; como mostrarei: e como as tais forsas, se-deduzam da figura, e movimento; deve o Filozofo saber conhecer uma, e outra: saber as suas propriedades, mostralas &c. o que requer totalmente a Geometria. Desta é inseparavel a Aritmetica: em que, na era prezente, necesariamente se-comprende a Algebra: que é uma Aritmetica literal, mediante a qual se-facilitam as demonstrasoens, e se-descobrem muitas coizas que antigamente se-ignoravam; e algumas nam se-sabiam provar. Com estas preparasoens, é

Quando a Matematica, nam fose totalmente necesaria, para a Fizica; seria necesaria, na prezente providencia: pois, sem ela, nam é posivel, intender os livros, dos-melhores Filosofos modernos, e os seus raciocinios, que se-fundam na Geometria: mediante a qual, provam o que propoem; ou mediante a Algebra, que é um metodo ainda mais curto. Onde; como estas

duas ciencias sam as que deram, e vam dando, luz à Filozofia, sem elas, é superfluo entrar na Fizica. Tem alem disto a Geometria a propriedade de acostumar o intendimento, a nam admitir senam aquilo, que é evidente. &c.

Sei, que a maior parte dos-Profesores deste Reino, consideram a Matematica, como alheia da-Fizica: e quando ouvem falar em Matematico, logo lhe-proguntam, se-áde chover, ou fazer bom tempo: confundindo loucamente, as conjecturas de alguns maos Fizicos, e piores Astrologos, com a verdadeira Matematica. E ja asisti a umas concluzoens de Matematica, em que, vendo-se o defendente obrigado, a mostrar o que dizia, com uma figura; gritou o arguente: *Que bixaroco é esse? tire para la isso.* O auditorio aplaudio muito este dito: mas eu tive compaixam de-uns, e outros. tal é a ignorancia destes paizes! Os mesmo Jezuitas, que conhecem a ignorancia deste Reino, quando fazem conclusoens de Matematica, sempre lhe-introduzem, questoens de *Materia prima*, e outras da-sua Fizica: porque, sem isto, nam tem arguentes. E finalmente, nunca vi concluzoens de Matematica, em que nam ouvesem rizadas. desorteque vam às ditas concluzoens, como quem vai à comedia: porque intendem, que sam ridicularias, que só servem para divertir.

Naverdade nam sei, se á coiza mais vergonhoza, doque um omem, que sobe à cadeira, e tem nome de Mestre em Artes, nam saber, que coiza é um Angulo, ou Retangulo; nem poder explicar dificuldade alguma, que da-Matematica se-tire. Muito diferentemente o-intendia um douto Jezuita, que era

3. Depois do período turbulento provocado pelas medidas do Marquês de Pombal algumas bastante influenciadas pelos "estrangeirados", como a retirada do monopólio do ensino aos Jesuítas e a importância atribuída a quem tivesse formação matemática, e no qual Anastásio da Cunha ensinou na recém-nascida Faculdade de Matemática, o país atavessa de novo um período pouco propício ao desenvolvimento cultural, marcado pelas invasões francesas e pelo Absolutismo.

ALMEIDA GARRETT (1799-1854) é um dos expoentes máximos da Literatura nacional, autor de obras primas de importância universal como FREI LUÍS DE SOUSA, e uma personalidade cujos interesses diversificados fizeram com que se destacasse, neste período, na luta por uma sociedade mais justa, contra a intolerância e o obscurantismo. Foi o introdutor do Romantismo em Portugal - de que o matemático Anastásio da Cunha é considerado precursor - consequência, em parte, das sementes lançadas por Verney desbravando preconceitos filosóficos, educativos e literários e dando a conhecer as correntes culturais da Europa do final do século. Garrett é considerado o responsável pela criação de um novo "clima literário" que permitiu a eclosão de uma brilhantíssima época literária como foi a da segunda metade do séc. XIX com nomes como Eça de Queirós, Antero de Quental, Júlio Dinis, Camilo Castelo Branco, etc..

Poeta, dramaturgo, ensaísta, pedagogo e político foi obrigado, pelas condições políticas do país e tal como muitos outros intelectuais, a exilar-se em países da Europa onde a liberdade de criação e expressão era já um direito dos povos. Foi em Londres, aquando do segundo exílio, em 1829, que escreveu a obra **Da Educação**, em forma de cartas, dedicada à educação da princesa Maria da Glória, futura Rainha D. Maria II e onde nos revela a sua pedagogia aplicada a todos os aspectos da formação da pessoa, desde o físico ao moral e intelecual. Nela mostra a influência dos ideais oriundos da Revolução Francesa e sobretudo da pedagogia defendida por Jean Jaques Rousseau.

Garrett participou activamente nas lutas entre liberais e absolutistas e após o triunfo do liberalismo desempenhou vários cargos ajindo sempre com o intuito de renovar mentalidades e construir uma sociedade mais livre e democrata que aquela herdada do Antigo Regime em que imperava o poder da Nobreza e da Igreja, fazendo, muitas vezes, alertas nos seus discursos para que a sua classe - a Burguesia - não cometesse os mesmos erros que aquela que tinha derrubado, nomeadamente na exploração e desprezo pelas classes inferores. Dizia ***« este é um século democrático: tudo o que se fizer há-de ser pelo povo e com o povo ... ou não se fará ».***

Como era de esperar, quando Passos Manuel - o político que mais seriamente quis desenvolver a cultura e a educação para todos os cidadãos «educai o povo e ele será livre» dizia, e que se retirou da cena política ao concluir que eram os seus próprios correligionários a emperrar a sua acção, impedindo a concretização dos ideais do liberalismo - assumiu o poder encarregou-o de elaborar, com o vice-reitor da Universidade, Alexandre de Campos, a reforma do ensino de onde saiu a criação dos liceus ou seja do ensino secundário oficial em que era atribuída grande importância ao ensino da Matemática. Dizia-se no preâmbulo do respectivo decreto que o sistema vigente constava de alguns ramos de erudição estéril, inútil para a cultura das ciências e para o progresso do país e ainda que «*não pode haver ilustração geral e proveitosa, sem que as grandes massas de Cidadãos, que não aspiram a estudos superiores, possuam os elementos científicos e técnicos indispensáveis aos usos da vida na sociedade actual*» [7]. De facto pretendeu-se, mais que mudar um sistema de ensino, efectuar uma verdadeira mudança de mentalidades, pois era notório o atraso do país relativamente ao resto da Europa. Infelizmente, como muitos constataram e escreveram, foi sempre enorme a distância entre as intenções e as práticas no que à educação e ao ensino diz respeito, e a reforma de **Passos Manuel** só foi retomada quase no fim do século tal a inutilidade de todas as intermédias. Alberto Ferreira [5] dá-nos conta do «*desnível entre o que a inteligência criadora dos intelectuais e pedagogos propunha, e aquilo que a mesquinha prática social permitiu*», concluindo que «*a burguesia recusou-se a aplicar, no domínio da instrução, o princípio da igualdade de oportunidade para todos, independentemente do seu poder económico e social*»

Almeida Garrett foi também encarregue por Passos Manuel de fundar e organizar o Teatro Nacional, e como Inspector dos Espectáculos procurou levar a cultura ao povo, interpretando ele mesmo um dos personagens na 1ª representação de **Frei Luís de Sousa.** Foi em governos posteriores deputado e ministro dos Negócios Estrangeiros sendo, por todo o seu percurso, comparado ao poeta alemão **Goethe**.

Prestando agora um pouco de atenção às ideias pedagógicas de **Garrett** expostas em **Da Educação,** considerámo-las em alguns aspectos mais conservadoras que, por exemplo, as de Rousseau ou as de **Verney** quase um século antes, sobretudo no que respeita à educação das mulheres e à adequação das matérias de ensino à classe social do pupilo. Tem no entanto, aspectos bastante inovadores, por exemplo no papel que atribui ao pai na educação da criança, na importância que dá à Educação Física e nos métodos que preconiza para o ensino em geral e para o de Matemática em particular, métodos que, ainda hoje, continuamos a tentar (apenas) implantar. Sendo muito útil e interessante a análise desta obra vamos apenas apresentar os aspectos ligados ao ensino da Matemática para avaliarmos a importância que também Garrett lhe atribui [6].

A arithmetica é o rudimento immediato da educação elementar. A arithmetica é mais vasta sciencia do que vulgarmente se cuida. Todas as mathematicas puras estão n'ella. A extenção

Euclides. A geometria está para todos os conhecimentos physicos como a logica para todos os intellectuaes e moraes. E além d'isso, nenhum estudo exercita, fórma, rectifica a razão como este.

A mais sabia lei da universidade de Coimbra é a que obriga os estudantes de todas as faculdades, quer positivas quer naturaes, a frequentar e fazer acto do primeiro anno mathematico (os de algumas tambem do segundo e até do terceiro, esta lei peca por defeito, porque as mathematicas [illegible] deviam ser preparatorio indispensavel sem o qual nenhum candidato devia ser admittido a grau em nenhuma faculdade. Mas como esta era a melhor lei do estatuto, e a que se [illegible] sempre geralmente é que em parte foi derrogada

DA EDUCAÇÃO

CARTAS DIRIGIDAS A UMA SENHORA ILLUSTRE ENCARREGADA
DA INSTITUIÇÃO DE UMA JOVEN PRINCEZA

PELO

VISCONDE D'ALMEIDA GARRETT.

2.ª EDIÇÃO

PORTO
EM CASA DA VIUVA MORÉ — EDITORA
PRAÇA DE D. PEDRO
1867

do a reflexão, tractemos de affazer o espirito á exacção e recta deducção das ideas, que em verdade é mais um hábito que de tenros contrahem os que o teem, do que fructo de longo estudo para os que mais duros o desejam adquirir, — o que rara vez conseguem. [1] Para isto nada ha como os rudimentos mathematicos. Chamemos pois ja a arithmetica em nosso auxilio; e sejam as primeiras noções que d'ella lhe dermos adquiridas pelo methodo que eu a tudo quizera applicar, o de ser quem apprende o artifice de suas proprias ideas, o mestre de si mesmo.

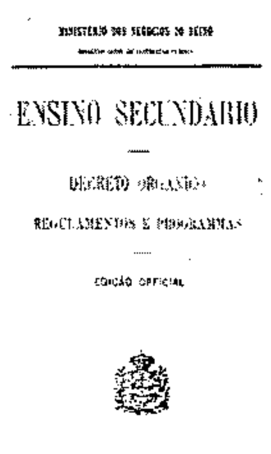
[1] Rousseau gaba o methodo physico e sensivel de figuras tangiveis e moviveis para aprender a geometria. Mais facil é para começar, mas não aguça e rectifica tanto o espirito.

serão bem intendidas; e preparemos assim, que não fazemos pouco, para mais formal estudo d'ésta essencialissima disciplina.

4. ADOLFO COELHO E RAMALHO ORTIGÃO foram dois dos elementos da chamada Geração de 70, nome que designou o grupo de intelectuais que, através da palavra, ridicularizou e criticou a sociedade burguesa que governava o país e a mediocridade de valores em que assentava. Ficaram famosas as **Conferências do Casino** (1871) organizadas por Antero de Quental, reflexo dos acontecimentos da Comuna de Paris, com as quais se pretendia sacudir o país da ignorância e apatia em que vivia e que acabaram por ser proíbidas. Adolfo Coelho (1847-1919) que foi o 1° professor de Pedagogia no Curso Superior de Letras, Doutor honoris causa pela Universidade de Gotingen, numa dessas conferências refere-se á má qualidade do ensino da Matemática e dos respectivos compêndios.
Do mesmo modo Ramalho Ortigão - defensor acérrimo de um ensino secundário mais científico e experimental baseado nas ideais de H. Spencer - em discursos parlamentares se refere à absoluta necessidade de aumentar e melhorar o ensino da Matemática visto ser ela a base de todas as ciências apontando metodologias muito próximas das que hoje se preconizam - do simples para o complexo, do concreto para o abstracto, dos factos para os conceitos ...

5. JAIME MONIZ (1837-1917) foi o autor da última reforma do ensino secundário (1894-1895) antes da implantação da República e que, com algumas alterações, perdurou por largos anos deste século. Apesar de algumas fortes críticas, ela foi considerada a reforma mais seriamente elaborada e cuja execução mereceu mais atenção da parte do poder. O seu autor viajou por muitos países da Europa para se informar dos diversos sistemas de ensino e respectivas dificuldades de execução.
Embora o autor tenha optado por um currículo que se desviava da corrente cientista, dando grande importância ao Latim, a Matemática tinha um lugar

destacado, quer pelo número de horas que ocupava, depois do Latim e da Língua Portuguesa, quer pelas observações que acompanhavam o respectivo programa. A preocupação com o seu ensino revela-a, aliás, o autor, quando, como director do Curso Superior de Letras, cria aí o Curso de Habilitação para o Magistério Secundário de Matemática e Ciências Naturais (1902), que incluía cadeiras de Pedagogia e Metodologia das Ciências. Vejamos algumas das indicações referidas atrás [4]:


ENSINO SECUNDARIO

DECRETO ORGANICO

REGULAMENTOS E PROGRAMMAS

EDIÇÃO OFFICIAL

LISBOA

Julgado segundo o aspecto, que fica exposto, o ensino secundario da mathematica é, como já alguem disse, uma porção da escola do pensamento, e um dos principaes elementos da instrucção educativa.

palavras se expressa o seu grandissimo valor: destina-se a ministrar copioso numero de conhecimentos essenciaes e indispensaveis nas relações da vida, e a constituir parte da propedeutica geral da sciencia. Em ambos os casos, todavia, tem de buscar na articulação com os outros trabalhos do plano secundario o complemento salutar do seu alcance.

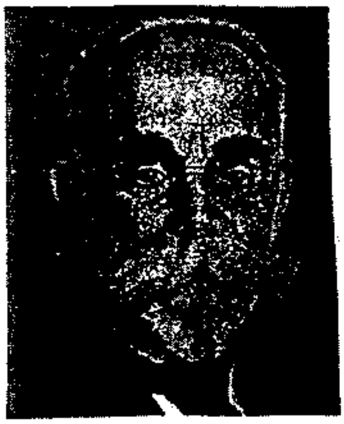
A acquisição d'estes resultados pelos alumnos dependerá muitissimo do zêlo e do methodo empregados pelos professores.

Sob o ponto de vista formal, o ensino da mathematica, encaminha á comprehensão das cousas pela determinação de sua grandeza e fórma; adestra em inquirir, operar, provar, interrogar, responder, por effeito da prodigiosa facilidade com que seus elementos se prestam a multiplas relações, combinações e comparações; esforça a

6. BERNARDINO MACHADO (1851-1944) era doutorado em Filosofia Natural com frequência de três anos da Faculdade de Matemática, tendo apresentado com 28 anos uma dissertação para concurso a lente catedrático sobre: **Teoria matemática das interferências.** Depois de vários anos dedicado apenas ao ensino em 1890 e 1894 o corpo catedrático da Universidade elege-o como seu representante no parlamento onde se bate de forma inequívoca por um ensino melhor, criticando as várias reformas e apontando medidas a tomar. Quando ministro criou várias escolas industriais e regulou o trabalho das mulheres e das crianças. Aderiu ao partido Republicano e em 1907 demitiu-se de catedrático por solidariedade com a greve dos estudantes. Foi devido à sua acção como ministro dos estrangeiros que o novo regime foi reconhecido aquando da implantação da República de que foi eleito presidente em 1915 e em 1925, sendo derrubado pelo golpe de 28 de Maio de 1926. Exilado em França, onde desenvolve notável acção de propaganda contra a ditadura, apenas em 1940 lhe foi permitido voltar sendo-lhe fixada residência no Alto-Douro.

Da sua vasta bibliografia dedicada à educação e ao ensino vamos retirar algumas passagens onde é focado o ensino da matematica [9].

Uma mesma disciplina, e logo a mathematica, que vae de roldão, sem respiro, dentro do quadriennio, volta em seguida ao seu compasso antigo. De sorte que, por entre as incer- d'um anno emancipou-se d'elle. Com as difficuldades da mathematica não se importou. Nesse ponto, o mais sensivel para a edade do alumno, descarregou sôbre elle o golpe mais fundo, como nenhum outro.



mais. Adeante! A concentração é egualmente benefica na physica e chimica e historia natural, e soberba na mathematica. Ora esta!... Sim! Não ha rapaz que tropece na mathematica. E' geralmente onde todos andam mais á vontade. Eu só desejava que observassem a labòriosa e ardua gestação das idéas numericas numa creança, para saberem o que a mathematica custa, as paragens a que obriga, até chegar a edade da razão; e ainda então a muitas pessoas.

do trabalho. Significa isto que a concentração já não presta para nada na mathematica, onde até agora fazia prodigios; que já tem

A litteratura portuguêsa possue valores em mathematica. E alguns dos nossos mathematicos foram até poetas. Está na memoria de todos o desgraçado José Anastacio da Cunha, precursor do romantismo. Mas não foram poetas, escrevendo mathematica pura.

pretende-se que os rapazes dos lyceus vão fazer sciencia? Nova, de certo que não; mas têem d'achar, d'inventar para si a que os outros já possuem. O educando não é apenas uma intelligencia que organicamente *elabore, assimile* e *reproduza* a lição do mestre, ou, suggestionado pelo mestre, *associe idéas* e *relacione* conhecimentos; nelle não se reflecte sómente a luz do saber dos outros, é sobretudo, elle tambem, um centro de vibração intellectual. Nem a aula é o

Considerados um por um, os mais d'elles são excellentes, e supprem varias deficiencias e corrigem varios erros da reforma; apontarei, por exemplo, o de mathematica, que introduziu no curso geral a geometria no espaço, sem a qual nem o systema metrico poderia apprender quem o frequentasse. Em absoluto, parece-me que só devem ser reprovados o de geographia, que é um programma

BIBLIOGRAFIA

[0] Andrade, A. Alberto de. Verney e a Cultura do seu tempo, Coimbra, 1966.

[1] Carvalho, Rómulo. História do Ensino em Portugal - desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar-Caetano, Fundação Gulbenkian, 1986.

[2] Coelho, Adolfo. A questão do Ensino, Porto 1872.

[3] Dicionário Biográfico Universal de Autores, Realizações Artis Lda.

[4] Ensino Secundário, decreto orgânico, regulamento e programas, Ministério do s Negócios do Reino, Imp. Nac. 1895.

[5] Ferreira, Alberto. Antologia de textos pedagógicos do séc. XIX português, Instituto Gulbenkian de Ciência, 3 vol., Lisboa, 1971, 1973 e 1975.

[6] Garrett, Almeida. Da Educação, 2ª ed., Porto, 1867.

[7] História de Portugal, dir. José Mattoso, vol V eVI, Circúlo de Leitores, 1994.

[8] Lopes, Óscar e Saraiva, J. António. História da Literatura Portuguesa, 10ª ed., Porto Editora, 1978.

[9] Machado, Bernardino. O Ensino Primário e Secundário, Coimbra, 1899.

[10] Ortigão, Ramalho. A lei da instrucção secundária na Câmara dos Deputados em Portugal, Rio de Janeiro, 1883.

[11] Proença, Martinho de Mendonça e. Apontamentos para a educação de um menino nobre, Porto, 1734.

[12] Verney, Luís António. O verdadeiro método de estudar, tomo I e II, Valensa, 1746.

THE PROYECTO HELENA

Maria J. Perez, Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, Espanha

The "Proyecto Helena" is an interdisciplinary experience of the History of Mathematics, carried out by a group of professors from the Seminario Orotava of the History of the Sciences in three educational centers in Tenerife ("Viera y Clavijo", "Villalba Hervás" and "Rafael Arozarena") with older high school students (ages 16-17) during the 1995-96 school year.

Nowadays a person is considered uncultured if he/she is unfamiliar with literature or the works of the great artists. But one is not considered so for being unfamiliar with the contribution of the ancient Greeks to Geometry or the revolution involved in abandoning ancient scholastic dogma for principles drawn from experimentation. The history of scientific development does not form a part of what is understood these days as culture, a fact which remains paradoxical considering the importance that science has in our society at the end of the millennium. Our current educational system does not help much in this sense, since as science teachers we use our time and energy to provide the tools which our future technicians and scientists will need for their work; thus, what we are teaching is a finished and timeless structure. We end up with a flat exposition of scientific facts unrelated to the people, the society and the culture which engendered them, as if they had never been subjected to crisis, political or economic changes, etc. We believe that analyzing the evolution of mathematical thought, and its connection with the culture of its time, can provide students with a greater understanding of the science and ideas of the contemporary world in which they live.

Helen was that beautiful Greek woman whose charms were the cause of the famous and mythical war of Troy. In the 17th century the cycloid curve, unknown until then and of a rare and harmonious beauty, was also the reason for discord among European mathematicians, who fought to discover its secret proportions. That is why it is called "the Helen of curves." Our project centers itself on that fundamental period from 1500 to 1700 in which modern science developed. Taking the cycloid and its surprising properties (brachistochrone and tautochrone) as a pretext, we focus on a key historical moment in which Mathematics becomes the indispensable tool for studying the natural sciences.

This curve was studied by the most outstanding mathematicians of the 17th century, from Galileo to Newton; and although it is not as essential as the logarithm or trigonometry, out of this curve one can study the principal mathematical problems of the 17th century: the calculus of areas, the longitudes and tangents to curves, and the study of movement.

Three professors worked directly with the students while the other members of the group collaborated in the gathering of materials, the preparation of the conferences and the follow-up of the Project. The objectives depended on the number of hours dedicated to the Project and therefore on the time subtracted from the official program. We decided to use only twelve hours approximately in order not to alter it excessively. Within this time frame our main objective was the following:

"To stir up the students' interest and curiosity in the History of Mathematics, relating it interdisciplinarily with the culture of the time in which it is developed."

We were not so concerned about them acquiring dates and facts as creating the basis for future inquietudes in our students. We wanted the Project to be like that first book which turned us into readers for the rest of our lives. The Project was developed in two phases. In the first, the students attended three conferences which brought them closer to this period in history. These were carried out in the first trimester and were given by members of the group. In the second phase, the students worked in groups and prepared small talks which they presented to the rest of their classmates.

First Phase: The Conferences

Before each conference the professor would mention three or four topics which were going to be dealt with later, thus stirring up interest in them. Furthermore, we gave them the text from the conference and asked them to write down two or three questions that the conference speaker would use as a reference for possible doubts. Once the conference was over we would give them a test, where we could check exactly how those questions which had been addressed several times were the ones best assimilated.

Next we will give a brief description of each one of the conferences:

First conference: "From the Closed World to the Infinite Universe."

This is the title of a book by a great historian of science in this century, Alexandre Koyre. The aim of this conference was to make the student see the essential differences between the two Conceptions of the World which confronted each other at the beginning of the 17th century:

Closed world	Infinite universe
Greco-Roman culture	Modern culture
Aristotle	Galileo
Ptolemaic cosmos	Copernican cosmos
Cult of the finite	Cult of the infinite
Polytheism	Monotheism
Certainty	Skepticism

Second conference: "Galileo: The New Physics"

This conference tried to emphasize the exceptional importance of this figure in the conception of Modern Science. Galileo is a Mathematician and Philosopher, a Physicist and Astronomer. Creator of a mathematical Physics, radically opposed to Aristotelian physics and fortunately the first mortal who points a telescope toward the heavens and is witness to incredible marvels. All of that happened not without a strong confrontation with the established power: the Catholic Church, which resisted seeing its well-structured conception of the world broken to pieces.

Third conference: "Mathematics in the Year 1600"

In this conference we aimed to cover the following points:
-The Italian mathematicians' resolution of third and fourth degree equations.
-Vieta's use of algebraic symbolism and its inspiration to Diofanto.
-Napier's invention of logarithms, of fundamental importance for calculations in transoceanic navigation.
-The importance of Descartes and his "Discours de la methode."
-The figure of Fermat.

Second Phase: The Students' Class Projects

In mid-January we began the second phase by forming groups, each one with five or six students, who had to choose one of the proposed topics. Eventually they decided on the following:

-Technical aspects of the cycloid
-Properties of the cycloid
-Galileo
-Cosmology
-Huyghens and his applications to geography.

This range of topics, in some way interconnected, allowed the students to discover unsuspected relationships among disciplines such as Philosophy, History, Politics, Economics, Religion, Physics and Mathematics. Our intention was that the students, by participating in one of these small groups, might develop a few ideas of their own, so that when giving a presentation and then listening to those of other classmates, they might be able to establish their own connection between mathematics and culture.

Each group would meet with the professor for half an hour to clarify the direction they should follow, the materials that they could use, the bibliography, etc., although the aim was to leave the proposal open and enable them to bring in new elements. The main criteria was: "Don't write or talk about anything that you don't understand. It doesn't matter if the project is short; the important thing is to assimilate the concepts."

Next we will give a description of the main points from each work group.

First group: Technical Aspects of the Cycloid.

-Construction of the cycloid based on the rotation of a wheel.
-Parametric equations of the cycloid.
-Computer drawing of the cycloid.
-Technical drawing of the cycloid, using ruler and compass.
-Calculation of its area by Roberval's method.
-Tangent to the cycloid.

Second group: Properties of the Cycloid.

-Description of the most important properties: brachistochrone and tautochrone.
-Historical vision of the moment in which said properties were proposed (authors, controversies, etc.)
-Compilation and explanation of all the properties that could be found in the bibliography.

Third group: Galileo.

-Analysis off Galileo's personality from a human point of view.
-His scientific inquietudes.
-Defense of the new cosmology.
-Galileo's vision of movement.

Fourth group: Cosmology.

-General ideas about the cosmological vision in ancient civilizations.
-Differences between the Aristotelian and the Ptolemaic conception of the world.
-Historical figures related to the different cosmologies.

Fifth group: Huyghens and His Applications to Geography.

-The problem of longitude and its importance in navigation.
-The pendulum clock with the cycloid as a possible solution.
-The figure of Huyghens and his discoveries.

-The connection between mathematics and the practical and political problems of 17th century Europe.

The students receive a "pass" in the course simply by handing in and presenting their class project. To receive a higher mark the quality of the written work has to be taken into account, as well as the resources used in the presentation: outlines, drawings, etc. This mark counts along with the others in the course. This system turned the grading into a possible rewarding, creating a motivated and calm atmosphere around the class project.

When we chose this system of grading we had some doubts; we wondered if the students would become too relaxed knowing they were assured of passing simply by participating. However, upon seeing their work and presentations we were able to verify that, in general, they put a large amount of time and caring into their projects. Giving a presentation in front of their classmates was a great stimulus for them.

Evaluation of the Project

The tests that we gave after each conference indicated to us how well the project was working. We asked them things such as: what ideas called their attention most, whether the language used in the conference seemed accessible to them, or questions related to concrete aspects which had been dealt with. In this way we discovered that, for example, the problem of the universe's infinitude, the polemic surrounding the falling of heavy objects and the evolution of algebraic notation, were aspects which they found very interesting.

At the end of each student project we asked them to make an evaluation, of both their individual project and the course itself. In general, they liked participating in it, they evaluated it positively and they encouraged us to repeat it.

As one can see, this has not been a didactic experiment, in the sense of having objectives that can be clearly measured and contrasted with a control group. But we do have the students' opinions, their class projects and our record of their presentations.

Our personal opinion is clearly positive. We are convinced that the goals and the results are good. But we are aware that this entails a certain subjectivity.

How do we measure the impact that this experience has had on our students? How do we measure the change of interest that this project has been able to inculcate in them? To know something more in this regard, we have decided to give a final exam at the end of the course, after some months of carrying out the experiment, where we will try to "measure" both their interest in history as well as their knowledge.

María J. Perez
Seminario Orotava de Historia de la Ciencia

MATHEMATICS IN CONNECTION WITH ISLAMIC RELIGIOUS SIGNIFICANCE

Mohaini Mohamed, Technological University of Malaysia

Abstrak

Science which found special favor with the Muslims during the Islamic Civilization was mathematics. Added to the scientific outlook of the Arab who was generally practical and direct, there was apparently a religious basis for the enthusiasm of mathematical activities. Arithmetic was needed to calculate Islamic inheritance and to calculate days and years. Mathematical or astronomical geography was needed for the determination of the direction of qibla, that is, the direction of the line connecting the site of prayer to Mecca which every Muslim had to face in performing his daily prayers. For this purpose, knowledge of the geographical position of different places in relation to Mecca is imperative. Other needs of religious significance supplied a strong motivation to work in these fields. The correct determination of the times of the five daily prayer that Muslims had to perform, the beginning and end of the daily fast in the month of Ramadhan, that is, the month of fasting, as well as the beginning and end of the month of Ramadhan and other Muslim festivities naturally fell within the province of the astronomer or mathematician. Knowledge of stars and their position are of considerable help in setting directions during travels especially for the pilgrimage to Mecca. This in effect led to a more accurate determination of time and more accurate observations of the motions of the moon and stars. Thus, because of the Islamic religious significance, considerable progress in mathematics was made during the Islamic Civilization.

Introduction

The science of timekeeping by the sun and stars, called *' ilm al-miqat* in Arabic, was one of the main concerns of Muslim scholars during medievel times. The most obvious practical application was the determination of the times of muslim prayer. Other practical application of the science of timekeeping are the determination of the qibla as direction of Mecca for a given locality and the determination of the visibility of the lunar crescent. The astronomers associated with the principal mosques in the main centers of Islamic culture were known as time-keepers, and at times calculated by them the muezzins (caller for prayer) would call the faithful to prayer.

The times for the five daily prayers which are defined in terms of the daily motion of the sun across the sky may be traced to the practices and injunctions of the Prophet Muhammad (S.A.W). Each of the prayers is to be performed within a certain interval of time. The Muslim day begins at sunset, and the time for the evening prayer may be performed any time between nightfall and day break, or beginning of morning twilight. The interval for the morning prayer begins at the appearance of morning twilight and the prayer must be completed before sunrise. The time for the midday prayer begins when the sun starts to decline from the meridian and lasts until the beginning of the interval for the afternoon prayer, namely, when the shadow of an object equals its midday shadow increased by the length of the object. In some legal schools the interval for the afternoon prayer ends when the shadow has again increased by the length of the object; in other schools it ends at sunset.

The mathematical determination of the prayer times requires physical theories of twilight and the effect of refraction at the horizon, as well as the determination of time from solar altitude. The times of prayer expressed in modern time or its medieval equivalent change throughout the years and are functions of solar longitude. They vary also with terrestrial latitude, but when measured with respect to the local meridian, they do not vary with terrestrial longitude for a given latitude. In medieval times the prayer-times were often determined using astrolabes or quadrants marked with special curves engraved on sundials. However, for convenience, mathematical tables giving the lengths of the intervals for each of the prayers were also prepared. Nowadays, muezzins generally use the prayer times given in local civil time in calendars and diaries, which are based on tables approved by the local religious authorities. See appendix.

Likewise, the determination of the qibla requires the application of sophisticated trigonometric formulae, and the computation of solar and lunar positions relative to each other and to the local horizon on an evening when visibility is anticipated also involves non trivial computational techniques.

Ibn Yunus's Tables For Timekeeping

The celebrated tenth-century Egyptian astronomer Ibn Yunus can be said to have started the tradition of the science of timekeeping. It seems that he was the first to compile sets of tables of functions useful in timekeeping of the kind that were used in later Cairo and Damascus. In his great work *al-zij al-Hakimi* he presented a set of tables displaying the altitude of the sun in various azimuths, notably the azimuth of the qibla, as well as the azimuth of the sun for various altitudes. These tables, computed very accurately for the latitude of Cairo, gave values in degrees and minutes for each degree of solar longitude. Each of these tables contains 180 entries. In another work Ibn Yunus compiled a set of tables in which he tabulated the solar azimuth in degrees and minutes for each degree of solar altitude and each degree of solar longitude. The total number of entries in this table is about 10,000 entries. There is no doubt that these enormous tables inspired the later works in Cairo and Damascus.

Ibn Al-Shatir Lunar Models

A prominent astronomer, Ibn Al-Shatir of Damascus played a most significant role in the development of theoretical models to account for the motions of the sun, moon, and planets. He was also successful in overcoming the problems associated with planetary models of Ptolemy. His first major work was a zij (an astronomical tables) for Damascus based on Ptolemy which was now unfortunatly are not extant. His second work is a treatise which he presented the reasoning behind his new planetary models. He developed a new zij which appropriately incorporates these model. Ibn al-Shatir thus has the distinction of being the first to compile planetary tables consistent with models he had devised. Building on the earlier writings of his predecessors, Ibn al-Shatir devised a new lunar model, which represented with a substantial measure of success for both the longitude of the moon and its distance form the earth, and a series of planetary models with secondary epicycles replacing the Ptolemaic equant. These works of Ibn al-Shatir in planetary astronomy had marked the zenith of astronomy in Syria. A prominent scholar, in the history of Islamic mathemathics, E.S. Kennedy, observed that Ibn al-Shatir's models were mathematically equivalent to those Copernicus elaborated some 150 years after the time of Ibn al-Shatir. This discovery aroused considerable interest in Islamic planetary theory. A direct influence of Ibn al-Shatir's models on Copernicus has yet to be established, but it remains a distinct possibility.

Al-Khalili's Tables For Timekeeping

Egyptian astronomers drew up a corpus of tables for timekeeping by the sun and for regulating the times of prayer, computed specifically for the latitude of Cairo during the thirteenth century. This corpus was widely used in Cairo until the nineteenth century, both in its original form and in various modified versions.

The Cairo table for timekeeping served as a model for astronomers from Syria. The major figure in the field of timekeeping at Damascus was a contemporary of Ibn Al-Shatir named Al-Khalili. As far as we know, no corpus of tables for timekeeping was compiled for the latitude of Damascus before the mid-fourteenth century. Earlier, Al-Mizzi, no doubt inspired by the tables for Cairo that he had seen in Egypt, compiled a set of hour-angle tables and prayer-tables for Damascus, using a traditional set of parameters. Al-Khalili shortly thereafter recomputed the entire set for the new parameters derived from the observations of Ibn Al-Shatir. Al-Khalili's tables for timekeeping were used in Damascus until the ninteenth century.

Al-Khalili also turned his attention to universal solutions and compiled a set of auxiliary tables for solving problems of spherical astronomy for all latitudes, based on three trigonometric functions. The auxiliary tables contain over 13,000 entries, and successive applications of the various functions tabulated lead to the solution of any problem in spherical astronomy for any latitude. Earlier Muslims astronomers, from the ninth century onwards, had compiled isolated simpler and less sophisticated sets of tables of auxiliary functions, but Al-Khalili arrived at the final solution. His tables were used by later Syrian, Egyptian and Turkish community.

Indeed his major work, a set of tables for timekeeping, represents the culmination of the medieval Islamic achievement in the mathematical solution of the problems of spherical astronomy..Al-Khalili greatest computational achievement, however, was in the compilation of a table displaying the qibla as local directions of Mecca, for each degree of latitude and longitude, based on an accurate mathematical formula. With this, Al-Khalili arrived at final solution to one of the most important problems confronting the Muslim astromomers.

Instrumentation

What al-Khalili achieved with tables at Damascus had been successfully attempted with instruments slightly earlier by an individual named Ibn al-Sarraj who worked in Aleppo around 1325. Ibn al-Sarraj turned his attention to devising a series of astrolabes, quadrants and other instruments that could be used to solve all of the problems of spherical astronomy for any latitude.

Ibn al-Sarraj actually devised two kinds of universal astrolabe. The first is simply a reinvention of the universal astrolabe usually associated with the eleventh century Andalusian astronomer Ali ibn Khalaf al-Shakkaz. Ibn al-Sarraj also wrote a treatise on its use. An example of the second, more sophisticated variety, made by Ibn al-Sarraj himself survive in the Benaki Museum in Athens. A treatise on its use written by a fifteenth century Cairo Mathematician, al-Wafa, has also survived. Ibn al-Sarraj's astrolabe was considered by many historians of science to be the most sophisticated astrolabe from the near East and Europe in the entire medieval and Renaissance period.

Ibn al-Sarraj also developed several varieties of markings for the almucanter quadrant and devised various highly ingenious trigonometric grids as alternatives to the simple sine quadrant.

Although it was Ibn al-Sarraj who devised the most successful varieties of instruments, the achievements in instrumentation of other Muslim astronomers at Cairo and Damascus were also considerable. Egyptian astronomer al-Bakhaniqi, for example, compiled an extensive set of tables of coordinates for marking curves on the plates of astrolabes for each degree of latitude from 0° to 90°. Ibn al-Shatir's contributions to instrument design were also considerable ; they included a reversed astrolabe and several trigonometric grids. He also constructed a splendid sundial for the Umayyad mosque in Damascus.

Determination of the Qibla

A related problem of spherical trigonomeatry is the determination of the Qibla, that is, the direction of Mecca, which defines the direction of prayer in Islam and is of importance for the orientation of mosques. As the key to such determinations was the knowledge of the geographic location of Makka.

The determination of the Qibla for a given locality is a mathematical problem of some complexity which was a considerable interest to medieval Muslim scholars. They developed numerous alternatives exact solutions to the qibla problem, using either spherical trigonometry or orthogonal projections, and some also relied on approximate solution.

The problem of determining the qibla for a given locality can be understood from fiqure 1, which shows a locality X and Mecca M on the terrestrial surface. The north pole P and the equator AB are also shown. The inclination of the great circle are XM to PXA, the meridian at X, defines the directions of Mecca. If the latitude and longitude of X are denoted by φ and L and the coordinates of Mecca by φ m and Lm,

$$XA = \varphi \qquad MB = \varphi m \qquad \text{and} \qquad AB = Lm - L = \Delta L$$

The angle MXA, called in Arabic al-Qibla, is here denoted by q. The formula defining q, expressed in modern notation is

$$q = \text{arc cot} \left\{ \frac{\sin\varphi \ \cos\Delta L - \cos\varphi \ \tan\varphi m}{\sin\Delta L} \right\}$$

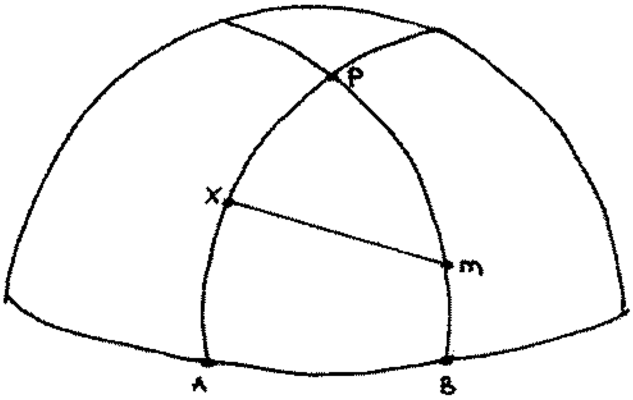


Figure 1

which follows by an application of modern cotangent rule to the spherical triangle PXM. The various exact solutions devised by the Muslim scholars are equivalent to this formula. The standard medieval approximation is equivalent to

$$q = \arc\tan\left\{ \frac{\sin \Delta L}{\sin \Delta\psi} \right\}$$

where $\Delta\psi = \psi - \psi m$

Conclusions

Since mathematical astronomy was a functional science and in conformity with the injuctions of Islam, considerable progress was made during the Islamic civilization in this field. Numerous astronomical tables and instrument were developed, observatories were erected and a connected series of observatories were instituted. Unlike astrology which faced a certain controversy and often times was condemned as heresy, mathematical astronomy enjoyed unrestricted encouragement and approval. By the ninth century a distinct feature of Islamic astronomy can already be discerned. By the time al-Biruni wrote his *Qanun al-Mas'udi* a century later, Islamic astronomy was the most complete and perfected astronomical science known anywhere in the world at that time.

References

Abbud, Fuad. "The Planetary Theory of Ibn al-Shatir : Reduction of the geometric models to Numerical tables". Isis 53 (1962) : 492 - 99.

King, David. "Ibn Yunus very useful Tables for Reckoning Time by the sun. "Archive for History of Exact Science 10 (1973) : 342 - 394

King, David A. *Islamic Mathematical Astronomy. London:* Variorum Reprints, 1986

Mohamed, Mohini "The Tadhira Fil 'Ibn al Ha'ia of Nasir al-Din Al-Tusi, " Islamic Science Vol 10.No 1, Jan-June, 1994, 65-71.

Sayili, Aydin. *The Observatory in Islam.* Ankara: Turk Tarih Kurumu Besimeri, 1960

Waktu Solat

Waktu Solat bagi kawasan Kuala Lumpur Tahun 1996

Januari

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.57	7.20	1.18	4.42	7.16	8.31	5.47
6	5.59	7.22	1.20	4.44	7.19	8.33	5.49
11	6.01	7.24	1.22	4.46	7.21	8.35	5.51
16	6.03	7.25	1.24	4.47	7.23	8.36	5.53
21	6.05	7.26	1.25	4.48	7.24	8.37	5.55
26	6.06	7.27	1.26	4.49	7.26	8.38	5.56
31	6.07	7.27	1.27	4.49	7.26	8.38	5.57

Februari

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	6.08	7.27	1.27	4.49	7.28	8.39	5.58
6	6.08	7.27	1.27	4.49	7.28	8.39	5.58
11	6.08	7.27	1.27	4.48	7.28	8.38	5.58
16	6.08	7.26	1.27	4.46	7.28	8.38	5.58
21	6.07	7.25	1.26	4.44	7.28	8.37	5.57
26	6.03	7.24	1.26	4.42	7.27	8.37	5.57

Mac

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	6.06	7.23	1.25	4.39	7.27	8.36	5.56
6	6.04	7.21	1.24	4.35	7.26	8.35	5.54
11	6.02	7.19	1.22	4.31	7.25	8.34	5.52
16	6.01	7.17	1.21	4.27	7.24	8.33	5.51
21	5.59	7.15	1.19	4.22	7.23	8.32	5.49
26	5.57	7.14	1.18	4.19	7.22	8.31	5.46
31	5.56	7.13	1.17	4.20	7.22	8.31	5.46

April

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.54	7.11	1.16	4.22	7.21	8.30	5.44
6	5.52	7.09	1.15	4.24	7.20	8.29	5.42
11	5.50	7.08	1.13	4.25	7.19	8.29	5.40
16	5.48	7.06	1.12	4.27	7.18	8.29	5.38
21	5.46	7.05	1.11	4.28	7.18	8.28	5.36
26	5.44	7.04	1.10	4.29	7.17	8.29	5.34

Mei

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.42	7.03	1.10	4.30	7.17	8.29	5.32
6	5.41	7.02	1.10	4.31	7.17	8.30	5.31
11	5.40	7.02	1.10	4.33	7.17	8.30	5.30
16	5.39	7.02	1.10	4.34	7.18	8.31	5.29
21	5.39	7.02	1.10	4.35	7.18	8.33	5.29
26	5.39	7.02	1.11	4.36	7.19	8.34	5.29
31	5.39	7.02	1.11	4.36	7.19	8.34	5.29

Jun

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.39	7.03	1.12	4.38	7.20	8.36	5.29
6	5.39	7.04	1.13	4.39	7.22	8.37	5.29
11	5.40	7.04	1.14	4.40	7.23	8.38	5.30
16	5.41	7.06	1.15	4.41	7.24	8.39	5.31
21	5.42	7.07	1.16	4.42	7.25	8.40	5.32
26	5.43	7.08	1.17	4.43	7.26	8.41	5.33

Julai

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.45	7.09	1.18	4.44	7.27	8.42	5.35
6	5.46	7.10	1.19	4.44	7.27	8.42	5.36
11	5.47	7.11	1.19	4.44	7.28	8.42	5.37
16	5.48	7.11	1.19	4.44	7.28	8.42	5.38
21	5.49	7.12	1.20	4.43	7.28	8.41	5.39
26	5.50	7.12	1.20	4.42	7.27	8.40	5.40
31	5.50	7.12	1.20	4.42	7.27	8.40	5.40

Ogos

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.51	7.12	1.19	4.40	7.27	8.39	5.41
6	5.51	7.12	1.19	4.38	7.26	8.37	5.41
11	5.52	7.11	1.18	4.36	7.24	8.35	5.42
16	5.51	7.10	1.17	4.32	7.23	8.33	5.41
21	5.51	7.10	1.15	4.29	7.21	8.31	5.41
26	5.51	7.08	1.14	4.25	7.19	8.29	5.42
31	5.50	7.08	1.14	4.24	7.19	8.29	5.40

September

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.50	7.07	1.12	4.19	7.17	8.26	5.40
6	5.49	7.06	1.10	4.14	7.15	8.24	5.39
11	5.48	7.04	1.08	4.09	7.12	8.21	5.38
16	5.46	7.03	1.07	4.11	7.10	8.19	5.36
21	5.45	7.02	1.05	4.12	7.08	8.17	5.35
26	5.44	7.01	1.03	4.13	7.06	8.15	5.34

Oktober

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.42	6.59	1.02	4.14	7.04	8.13	5.32
6	5.41	6.58	1.00	4.15	7.02	8.11	5.31
11	5.40	6.58	12.59	4.16	7.01	8.10	5.30
16	5.39	6.57	12.58	4.16	7.59	8.09	5.29
21	5.38	6.57	12.57	4.17	7.58	8.08	5.28
26	5.38	6.57	12.57	4.17	7.57	8.08	5.28
31	5.37	6.57	12.57	4.18	7.57	8.08	5.27

November

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.37	6.57	12.57	4.18	6.57	8.08	5.27
6	5.37	6.58	12.57	4.19	6.57	8.09	5.27
11	5.38	6.58	12.58	4.21	6.57	8.10	5.28
16	5.38	7.00	12.59	4.22	6.58	8.11	5.28
21	5.39	7.01	1.00	4.24	6.59	8.12	5.29
26	5.41	7.03	1.02	4.26	7.00	8.14	5.31

Disember

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.42	7.05	1.04	4.28	7.02	8.17	5.32
6	5.44	7.08	1.06	4.30	7.04	8.19	5.34
11	5.47	7.10	1.08	4.32	7.07	8.21	5.37
16	5.49	7.13	1.11	4.35	7.09	8.24	5.39
21	5.51	7.15	1.13	4.37	7.11	8.26	5.41
26	5.54	7.17	1.16	4.40	7.14	8.29	5.44
31	5.54	7.18	1.16	4.40	7.14	8.29	5.44

APPENDIX

Waktu Solat

Waktu Solat bagi daerah Johor Bahru Tahun 1996

Januari

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.46	7.09	1.10	4.35	7.11	8.26	5.36
6	5.48	7.11	1.12	4.37	7.13	8.28	5.38
11	5.50	7.13	1.14	4.38	7.15	8.29	5.40
16	5.52	7.14	1.16	4.40	7.17	8.30	5.42
21	5.54	7.16	1.17	4.41	7.19	8.31	5.44
26	5.56	7.17	1.18	4.41	7.20	8.32	5.46
31	5.56	7.17	1.18	4.41	7.20	8.32	5.46

Februari

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.57	7.17	1.19	4.41	7.21	8.32	5.47
6	5.58	7.17	1.19	4.40	7.21	8.32	5.48
11	5.58	7.17	1.19	4.39	7.21	8.32	5.48
16	5.58	7.17	1.19	4.37	7.21	8.31	5.48
21	5.58	7.16	1.18	4.34	7.21	8.30	5.48
26	5.58	7.15	1.18	4.32	7.20	8.29	5.48

March

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.57	7.14	1.17	4.29	7.19	8.28	5.47
6	5.56	7.12	1.15	4.25	7.18	8.27	5.46
11	5.54	7.11	1.14	4.20	7.17	8.26	5.44
16	5.53	7.09	1.13	4.16	7.16	8.25	5.43
21	5.51	7.07	1.11	4.12	7.15	8.23	5.41
26	5.49	7.06	1.10	4.14	7.13	8.22	5.39
31	5.49	7.05	1.09	4.14	7.13	8.22	5.39

April

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.47	7.04	1.08	4.16	7.12	8.21	5.37
6	5.45	7.02	1.06	4.18	7.11	8.20	5.35
11	5.43	7.01	1.05	4.19	7.09	8.19	5.33
16	5.41	6.59	1.04	4.20	7.09	8.19	5.31
21	5.39	6.58	1.03	4.21	7.08	8.18	5.29
26	5.38	6.57	1.02	4.22	7.07	8.18	5.28

Mei

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.36	6.56	1.02	4.23	7.07	8.19	5.26
6	5.35	6.56	1.01	4.24	7.07	8.19	5.25
11	5.34	6.56	1.01	4.25	7.07	8.20	5.24
16	5.34	6.56	1.01	4.26	7.07	8.21	5.24
21	5.33	6.56	1.02	4.27	7.08	8.22	5.23
26	5.33	6.57	1.02	4.28	7.08	8.23	5.23
31	5.33	6.57	1.03	4.28	7.09	8.23	5.23

Jun

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.34	6.57	1.03	4.29	7.09	8.24	5.24
6	5.34	6.58	1.04	4.30	7.10	8.25	5.24
11	5.35	6.59	1.05	4.32	7.12	8.27	5.25
16	5.36	7.00	1.07	4.33	7.13	8.28	5.26
21	5.37	7.01	1.08	4.34	7.14	8.29	5.27
31	5.38	7.02	1.09	4.35	7.15	8.30	5.28

Julai

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.40	7.03	1.09	4.35	7.16	8.30	5.30
6	5.41	7.04	1.10	4.36	7.16	8.31	5.31
11	5.42	7.05	1.11	4.36	7.17	8.31	5.32
16	5.43	7.06	1.11	4.36	7.17	8.31	5.33
21	5.44	7.06	1.12	4.35	7.17	8.30	5.34
26	5.45	7.06	1.12	4.34	7.17	8.30	5.35
31	5.45	7.06	1.11	4.34	7.17	8.29	5.35

Ogos

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.45	7.06	1.11	4.33	7.16	8.28	5.35
6	5.45	7.05	1.10	4.31	7.15	8.27	5.35
11	5.45	7.05	1.09	4.28	7.14	8.25	5.35
16	5.45	7.04	1.18	4.26	7.13	8.24	5.35
21	5.44	7.03	1.07	4.22	7.12	8.22	5.34
26	5.44	7.01	1.06	4.18	7.10	8.20	5.34
31	5.43	7.01	1.05	4.18	7.10	8.19	5.33

September

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.42	7.00	13.04	16.13	19.08	20.17	5.32
6	5.41	6.58	13.02	16.09	19.06	20.15	5.31
11	5.40	6.57	13.00	16.03	19.04	20.13	5.30
16	5.38	6.55	12.18	16.59	19.02	20.11	5.28
21	5.37	6.54	12.57	16.01	19.00	20.09	5.27
26	5.35	6.52	12.55	16.03	18.58	20.07	5.26

Oktober

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.34	6.51	12.54	4.04	6.56	8.05	5.24
6	5.32	6.49	12.52	4.05	6.55	8.04	5.22
11	5.31	6.48	12.51	4.06	6.53	8.03	5.21
16	5.30	6.47	12.50	4.07	6.52	8.02	5.20
21	5.28	6.47	12.49	4.08	6.51	8.01	5.18
26	5.28	6.47	12.49	4.09	6.51	8.01	5.18
31	5.28	6.47	12.49	4.09	6.51	8.01	5.18

November

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.27	6.47	12.49	4.10	6.50	8.02	5.17
6	5.27	6.47	12.49	4.11	6.51	8.02	5.17
11	5.27	6.48	12.50	4.13	6.51	8.04	5.17
16	5.28	6.49	12.51	4.14	6.52	8.05	5.18
21	5.29	6.51	12.52	4.16	6.53	8.07	5.19
26	5.30	6.52	12.54	4.18	6.55	8.09	5.20

Disember

	Subuh	Syuruk	Zohor	Asar	Maghrib	Isyak	Imsak
1	5.31	6.54	12.56	4.20	6.57	8.11	5.21
6	5.33	6.57	12.58	4.23	6.59	8.14	5.23
11	5.35	6.59	1.00	4.25	6.01	8.16	5.25
16	5.38	7.01	1.03	4.28	6.04	8.19	5.28
21	5.40	7.04	1.05	4.30	6.06	8.21	5.30
26	5.43	7.06	1.07	4.32	6.09	8.23	5.33
31	5.43	7.07	1.08	4.33	6.09	8.24	5.33

Daniel da Silva e a questão da solvabilidade dos montepios

Paulo A. J. Oliveira, E. S. de Leal da Câmara

Daniel Augusto da Silva (DAS) (1814-1878) , o celebrado matemático português do séc. XIX,publicou estudos originais e de grande riqueza científica em áreas da matemática tão díspares como a Teoria dos Números, a Mecânica Racional e a Geometria Analítica. Pelo menos a partir da década de sessenta do século passado, Daniel da Silva interessou-se pela questão da viabilidade financeira dos montepios. Ele mesmo sócio (nº 1388) do Montepio Geral, contribuiu com Pinheiro Borges para o equilíbrio financeiro desta instituição.

Aliás, desde a sua génese, os montepios (do italiano Monti di pieta i.e. Monte de Piedade ou Montepio) deviam a sua existência à generosidade e filantropia dos mais beneméritos o que acabava por determinar, amiudadamente, a sua situação financeira precária. Como afirmou Vasco Rosendo:"Só uma parte dos Monti di Pieta conseguiu sobreviver e prosperar, onde a caridade pública e a prudência das comunidades os dotou de bens suficientes para assegurar o seu funcionamento" ([3], pág. 50).

Entre os fundadores do primeiro montepio (Ascoli,1458) encontravam-se alguns frades franciscanos que assegurariam o controlo do "monte" (o pecúlio!) por mãos piedosas. A actividade destas associações de socorros mútuos, com o tempo, restringiu sobremaneira as práticas usurárias de alguns judeus e demais agiotas (e.g. os "longsbards" nos Países Baixos cobravam juros por empréstimos sobre penhores acima de 30%. Em 1619 o arquiduque Alberto criou os montepios belgas para combater esta situação).

A progressiva laicização dos montepios acabou por desligá-los completamente da religiosidade inicial embora, por vezes, se mantivessem alguns vestígios de confraria como no caso de um dos primeiros montepios portugueses, o chamado Montepio do Senhor Jesus do Bonfim (Lisboa, 1807) em que a adoração era compulsória.

Historicamente importante é o chamado Compromisso do Montepio Literário, espécie de associação de classe, criada por Joaquim António L. S. Castelo Branco, professor régio da corte. Os estatutos, publicados em 1816, resumem com superior lucidez, a razão de ser destas associações. Lê-se, assim, no intróito:

"Quem, reflectindo na instabilidade das coisas humanas seriamente. debilidade das nossas forças assim físicas que morais, riscos de uma vida mortal, e as consequências todas que daqui se podem deduzir, não teme, e treme à vista de um futuro duvidoso depois de uma causada velhice, consumidas as forças, e tolhidos os meios de adquirir a necessária subsistência? A razão pois natural mesmo nos ensina a precaver a nossa desgraça antes que ela aconteça: e é sem dúvida esta providência do homem a que tem dado a tantos estabelecimentos de piedade que se observarão na Europa civilizada: e o que será ainda hoje do presente compromisso de um montepio, que os Professores e Mestres, assim régios, como particulares licenciados dos Estudos, e Escolas menores na corte, querendo cimentar os laços em que já se unem como membros de uma mesma corporação, cujos trabalhos se reunem em um mesmo fim, que é a Educação, e Instrução pública da Mocidade (...) para o fim de socorrerem dele -o futuro- àqueles de seus concorrentes, que ou a decrepitez da idade, ou alguma outra moléstia tenha inabilitado de suas funções, procurando evitar deste modo que ele fique exposto à maior indigência, mendicidade; e por sua morte, suas mulheres e filhos desamparados" (citado em [3], págs. 53,54).

Esta instituição teve curta duração já que foi extinta em 1829 por força da agitação política e social que se vivia na altura devida aos conflitos entre miguelistas e liberais. No entanto, Álvaro Botelho inspirou-se na orgânica desta agremiação para criar o Montepio Geral, em 1840, instituição esta que, tendo sido preservada até à actualidade, tem atingido dois objectivos básicos das associações mutualistas, a saber, propor esquemas vários de previdência - incluindo pensões de sobrevivência - e facultar empréstimos sobre penhores a juros módicos.

Críticas de Daniel Augusto da Silva ao projecto de lei do Montepio Oficial do governo

Em 1867, o governo presidido por Joaquim António de Aguiar, propunha-se criar um montepio, dito oficial, que visava aliviar o estado do peso da previdência social. Daniel da Silva vem a terreiro denunciar as fragilidades científicas do projecto, através das páginas do periódico, Jornal do Comércio. Eis um resumo das principais críticas do matemático:

<u>Jornal do Comércio de 28/2/1867</u>

Regozijem-se pois antecipadamente os predilectos sócios do montepio oficial, porque vai começar para eles esse quinquénio afortunado durante o qual a Atropos fascinada deporá necessariamente a tesoura fatal em pura homenagem à tabela nº 45.

* Nº de óbitos anuais (89) correspondentes à taxa de mortalidade calculada pelo governo (3,3%)
* Nº de restituições e de meias pensões
* Verba do capital acumulado (403:531$340 e não 406:300$000 a 6% de juro)
* Rendimento anual de 72:000$00 do 6º ao 10º ano e 74:500$00 a partir daí
* Ausência de óbitos nos primeiros cinco anos
* Rateio nas pensões do 35º ao 75º anos
* Período quinquenal durante o qual só há direito a meia pensão

Entretanto, na edição de 1 de Março de 1867 do periódico A Revolução de Setembro, um articulista anónimo critica, com algum azedume, as posições de Daniel da Silva. A polémica tinha sido despoletada...

<u>Jornal do Comércio de 5/3/1867</u>

Nem a matemática neste caso deturpa a natureza da associação, que continua a ser, a despeito da intervenção da ciência, ou antes por causa dela, um instituto essencialmente humanitário.

* DAS defende os montepios de sobrevivência como espécies de seguros de vida, regulamentados pelo cálculo das probabilidades.
* Replica ao redactor da Revolução de Setembro

1) Crítica do redactor da Rev. Setembro: Montepios como associações comerciais (graduar as contribuições segundo a idade dos admitidos; exclusão de sujeitos gravemente enfermos).
1) Réplica de DAS: Necessidade de coerência entre as contribuições e a distribuição de vantagens. Cálculo das probabilidades como elemento regulador de ambas.

2) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: DAS rejeita a percentagem de mortalidade deduzida pelo Conselho de Saúde e prefere o mapa de Henrique O'Neill.
2) Réplica de DAS: Esclarece que, tão somente, a referida percentagem é apresentada sem fundamento explícito. Inaceitável é que se atenda à taxa de mortalidade em Lisboa para o estabelecimento da taxa de mortalidade num montepio.

3) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: É absurda a consulta dos números do Montepio Geral uma vez que este se não pode comparar com o oficial.
3) Réplica de DAS: A taxa de amortização das pensões aduzida pelo governo é exactamente de 5% i.e. o mesmo valor que se encontra no Montepio Geral.

4) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: Não se pode aceitar a estatística do Montepio das Secretarias de Estado pois que as pensões não caducam por maioridade ou casamento do pensionista.
4) Réplica de DAS: A verdade é simplesmente a contrária.

Jornal do Comércio de 8/3/1867

Daí resultará, todos o percebem, o predomínio desproporcionado de sócios em condições péssimas para o futuro financeiro da associação.

1) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: Estranha que DAS ignore que o juro anual a que vencem os fundos do novo montepio seja de 6%.

1) Réplica de DAS: Se os fundos se converterem em inscrições, vencem bem mais que 6%, pela cotação actual. Se se empregarem em obrigações de crédito predial e elas tiverem prémio, ou se se baixar o juro nominal desses títulos, a taxa de rendimento pode descer muito abaixo dos 6%. Desconhecendo a hipótese do ministro a referida taxa foi tomada como 6%.

2) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: Os erros apontados por DAS ou são de centésimos de real ou tendem a aumentar o rendimento da associação.

2) Réplica de DAS: Alista, em resumo, os erros da tabela nº 45, a tabela ministerial que fundamenta a proposta de criação do Montepio Oficial. Erro, para menos, no rendimento certo. Erro para menos e às vezes para mais, no rendimento do capital. Erro para menos no número de pensões novas em cada ano. Erro para mais no número de restituições e meias pensões. Erro para mais na despesa anual (falta 915$000 réis na 3ª verba). Erro para mais ao não se preverem óbitos nos primeiros 5 anos. Erro para mais no cômputo da taxa de amortização (5%) que não deveria exceder 3%. Verbas excessivas dos juros acumulados. Acresce a estas

razões que os velhos e achacados serão, previsivelmente, atraídos à instituição, dado que não se impôem restrições à subscrição no primeiro ano.

Jornal do Comércio de 15/3/1867
Nós agredimos os argumentos; ele ofende a pessoa.

1) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: Insiste na inutilidade das estatísticas dos montepios nacionais para argumentar em desfavor do Montepio Oficial.

1) Réplica de DAS: Quais são as 'instituições análogas' a que se refere o ministro da fazenda no seu projecto, donde, segundo ele, se deduziria a percentagem de amortização de 5%? "Se as não há no país segurissimamente as não há fora dele".

2) Crítica do Redactor da Rev. de Setembro: No Montepio das Secretarias de Estado as pensões caducam só por morte do pensionista.

2) Réplica de DAS: Invoca o artigo 36º dos estatutos da referida associação que prescreve a caducidade das pensões pela maioridade do pensionista ou pelo seu casamento (em muitos casos).

3) Crítica do redactor da Rev. de Setembro: O cálculo da taxa de amortização deve fazer-se em relação ao número de pensionistas e não em relação às quantias despendidas.

3) Réplica de DAS: As fracções de pensão são desigualíssimas sendo o seu número e probabilidade de cessação, nestas condições, 'à priori' muito diversas. No entanto, estariam a ser tomadas como unidades iguais na estatística económica.

DAS analisa detalhadamente o Montepio de Marinha, pois que se aproxima muitissimamente do projecto do Montepio Oficial (não há sobrevivência de pensões e todas caducam por maioridade e por casamento, nos casos indicados no projecto) com vista a contradizer, uma vez mais, a taxa de amortização apresentada por Fontes.

A taxa de amortização no Montepio de Marinha (3.7%) é exagerada pela concorrência de vários factores. Nos primeiros anos da sua vigência, o Montepio de Marinha - criado em 1842 - gozava de certa prosperidade, sobretudo, pelo apoio governamental e pelas subscrições de monta. Já em 1854 foi necessário proceder ao rateio das pensões. As subscrições seguintes eram feitas, em regra, pela quantia mínima, o que constituía obrigação legal. Por outro lado, as pensões concedidas até 1857 igualavam metade das quantias subscritas, independentemente do número de anos que o subscritor tivesse vivido. Nesse ano foram revistos os estatutos que passaram a desautorizar pensões de tal magnitude.

Conclusão: No cálculo da taxa de amortização, o denominador (totalidade das pensões pagas em cada ano) cresce mais lentamente do que o desejável e o numerador (totalidade das pensões cessantes) tem uma magnitude exagerada pelo que acima ficou exposto. Donde, a taxa de amortização relativa aos últimos sete anos é afectada por circunstâncias tão danosas que a tornam anormalmente elevada. Contudo, o ministro da fazenda prevê, para o novo montepio uma taxa claramente superior a essa, a saber, 5% !.

Jornal do Comércio de 16/3/1867

Enquanto à ciência, acho impraticável discutir com o meu contradictor, sendo a matemática dele totalmente diversa da minha, a começar pelas operações fundamentais da aritmética.

Nesta data DAS abandona a polémica com o articulista do periódico Revolução de Setembro. O autor indica as razões básicas pelas quais veio a público criticar a instituição do Montepio Oficial, nos termos da proposta governamental:

* que o montepio proposto está condenado ao malogro como sucedeu a diversas outras instituições análogas (e.g. Montepio de Marinha que há vários anos tem rateado as pensões ao minguado valor de 30%, isto apesar das excepcionais ajudas financeiras do governo);

* que carece de estabilidade e seriedade em face das deficientes bases científicas.

DAS lamenta que o seu interlocutor da Revolução de Setembro tenha recorrido ao doesto e à insinuação velhaca para o contradizer. Invoca duas ordens de razões que o impedem de prosseguir a polémica científica: Quanto à ciência e quanto aos processos dialécticos. Nega quaisquer "obcecadas e ignóbeis razões partidárias" uma vez que a política não domina os seus interesses e ambições habituais. Por diversas vezes tomou posição contrária às posições políticas veiculadas pelo Jornal do Comércio, o que significa que os seus pontos de vista não se identificam necessariamente com os deste periódico.

Finaliza a sua argumentação, renunciando, pela primeira vez nesta série de seis artigos, ao anonimato e escusa-se a continuar a polémica.

A criação do Montepio Oficial

As críticas avassaladoras de DAS não impediram a criação da projectada associação. Assim, depois de ter sido apresentada a proposta de lei ao parlamento em 2 de Julho de 1867, e de ter sido sancionada por este orgão, foi criado o Montepio Oficial, cuja finalidade era desobrigar o Estado das suas supostas atribuições de previdência social (os estatutos da instituição datam de 1870, por decreto de 22 de Fevereiro). Nas palavras do proponente do projecto, Fontes Pereira de Melo:

(...) era frequente e inveterado o abuso de arvorar o Estado numa espécie de previdência obrigatória, onerando-o com o encargo de socorrer na miséria, sob variados pretextos, as famílias de empregados públicos falecidos.

Louvável como fosse esta ideia, a lei mostrou-se insatisfatória por restringir a atribuição de pensões àqueles a quem se reconhecessem notáveis méritos militares em teatro de guerra, ou que se tivessem notabilizado em áreas de clara repercussão no bem público.

A veemência dos protestos quanto ao alcance elitista e diminuto do diploma, conduziu a algumas reformulações no que concerne à caducidade e sobrevivência das pensões, decretadas em 1879 (23 de Setembro).Estas firmes disposições legais, nomeadamente a reforma dos estatutos (artigo 5°) pelo governo sob proposta da direcção, ouvida a assembleia geral, não foram executadas. Apenas em 1894 (28 de

Fevereiro) foi nomeada uma comissão para proceder à apreciação dos estatutos vigentes e à sua reformulação.

Posteriormente, o Montepio Oficial - denominado na altura Montepio dos Servidores do Estado - acabou por ser anexado à Caixa Geral de Depósitos.

Cálculo da taxa de amortização

A solvabilidade dos montepios depende de se determinar matematicamente a relação "que deve existir entre as contribuições dos sócios, e as vantagens que se lhes garantem nas associações, cujo instituto é o subsídio diário no caso de doença, de velhice, ou de invalidez, ou o pagamento de uma soma determinada na época do óbito dos associados" ([4], pág. 175). Dada a impossibilidade de fixar aprioristicamente a duração de cada pensão, DAS propõe-se calcular, por via experimental, a caducidade média das pensões, supondo que as pensões legadas por cada mutualista correspondem a essa média. Deste modo, é possível graduar as contribuições dos pensionistas visando a acumulação de um certo capital que garanta a solvência da instituição.

O método mais fiável para determinar a dita caducidade média consiste em analisar a variação (decrescimento) da soma total dos encargos suportados pela instituição durante períodos anuais. Assim, no ensaio [4] DAS pretende:

i) Determinar a média anual de amortização de pensões (aproximadamente).

ii) Averiguar se é lícito considerar essa média como constante.

Fixa, à partida, quatro condições, designadas como 'quesitos de normalidade', que muito simplificam a questão. São elas:

1ª) Existência de um grande número de sócios.

2ª) Constância do número de sócios.

3ª) Constância da média das idades dos sócios.

4ª) Constância da média das contribuições anuais dos sócios.

Admite, ademais, primeiramente, que o montante de cada pensão legada é constante, independentemente do número de anos de subscrição do sócio. Assim sendo, é constante a soma das pensões novas a pagar em cada ano. Ora, designando por P_1 a soma das pensões novas em cada ano; por P_2 a soma das pensões que há a pagar a partir de P_1 (no 2° ano); por P_3 a soma das pensões que há a pagar a partir de P_1 (no 3° ano),etc. até à sua extinção no m-ésimo ano (i.e. $P_m=0$), DAS define taxa de amortização de pensões como sendo o quociente da soma das pensões de cada ano que deixam de ser pagas no ano seguinte pela soma das pensões pagas no primeiro daqueles anos, ou seja, para o ano i do contrato ($i=1,2,...,m-1$):

$\dfrac{P_i - P_{i+1}}{\sum_{k=1}^{i} P_k}$ em que $P_i - P_{i+1}$ representa a soma das pensões do ano i que deixam de ser pagas no ano i+1 e $\sum_{k=1}^{i} P_k$ a soma das pensões pagas no ano i.

A taxa de amortização torna-se constante após m anos i.e. o número de anos correspondente à extinção de cada conjunto, P_1, de pensões novas.

Os valores da taxa de amortização respeitantes a um único grupo de pensões, P_1, inscritas num qualquer ano, são, sucessivamente:

$$\frac{P_1-P_2}{P_1},\frac{P_2-P_3}{P_2},\dots,\frac{P_{m-1}-P_m}{P_{m-1}}$$

O não cumprimento de alguns 'quesitos de normalidade', naturalmente, afectará o valor médio da taxa de amortização. DAS assinala que se o número de sócios não for constante mas aumentar continuamente todos os anos, ou se for aumentado o valor da pensão para premiar os sócios matriculados há mais tempo, o valor da taxa de amortização diminuirá relativamente ao valor médio.

Para o cálculo da taxa de amortização, denominada s por DAS, supõe-se, ainda, que a associação existe indefinidamente e que a grandeza das pensões decresce constantemente em cada anuidade. Chamando P_i ($i=1,2,\dots,n$) às somas das pensões efectivamente pagas no ano i, a partir do primeiro ano e durante um certo número de anos; e A_k ($k=1,2,\dots,n-1$) às parcelas dessas pensões que deixaram de ser pagas no ano seguinte, tem-se: no 1° ano são pagas P_1; no 2° ano são pagas P_2, A_1 cessam e $P_2-(P_1-A_1)$ são novas; no n-ésimo ano são pagas P_n, A_{n-1} cessam e $P_n-(P_{n-1}-A_{n-1})$ são novas.

Deste modo, admitindo que a amortização anual das pensões é constante, e igual a s, os encargos que a associação previsivelmente terá que suportar, resultam de adicionar as pensões novas à amortização das pensões do ano transacto, com a óbvia excepção do primeiro ano. Por conseguinte, os encargos da associação somam P_1 no 1° ano; $P_2-(P_1-A_1)+P_1(1-s)$ no 2°;

$P_3-(P_2-A_2)+[P_2-P_1+A_1+P_1(1-s)](1-s)=P_3-(P_2-A_2)+(P_2-P_1+A_1)(1-s)+$
$+P_1(1-s)^2$ no 3°;...; e finalmente

$P_n-P_{n-1}+A_{n-1}+(P_{n-1}-P_{n-2}+A_{n-2})(1-s)+(P_{n-2}-P_{n-3}+A_{n-3})(1-s)^2+\dots+$
$+(P_2-P_1+A_1)(1-s)^{n-2}+P_1(1-s)^{n-1}$ no n-ésimo ano.

Por outro lado, supondo que todas as despesas são efectuadas no meado do último ano do período considerado (de n anos) e que as despesas são afectadas de um juro composto de r%, tem-se a necessária igualdade entre despesas efectivas e previsíveis, i.e. $P_1(1+r)^{n-1}+P_2(1+r)^{n-2}+\dots+P_{n-1}(1+r)^{n-(n-1)}+P_n(1+r)^{n-n}=$

$$=P_1(1+r)^{n-1}+[P_2-P_1+A_1+P_1(1-s)](1+r)^{n-2}+$$
$$+\left[(P_3-P_2+A_2)+(P_2-P_1+A_1)(1-s)+P_1(1-s)^2\right](1+r)^{n-3}+\dots+$$
$$+((P_n-P_{n-1}+A_{n-1})+(P_{n-1}-P_{n-2}+A_{n-2})(1-s)+(P_{n-2}-P_{n-3}+A_{n-3})(1-s)^2+\dots+$$
$$+P_1(1-s)^{n-1})(1+r)^{n-n}.$$ Reescrevendo o segundo membro, temos que:

$$P_1\left[(1+r)^{n-1}+(1-s)(1+r)^{n-2}+(1-s)^2(1+r)^{n-3}+\dots+(1-s)^{n-2}(1+r)+(1-s)^{n-1}\right]+$$
$$+(P_2-P_1+A_1)\left[(1+r)^{n-2}+(1-s)(1+r)^{n-3}+\dots+(1-s)^{n-1}(1+r)+(1-s)^{n-2}\right]+\dots+$$
$$+(P_{n-1}-P_{n-2}+A_{n-2})[(1+r)+(1-s)]+(P_n-P_{n-1}+A_{n-1})=$$

$$=P_1\frac{(1+r)^n-(1-s)^n}{(1+r)-(1-s)}+(P_2-P_1+A_1)\frac{(1+r)^{n-1}-(1-s)^{n-1}}{(1+r)-(1-s)}+\dots+$$
$$+(P_{n-1}-P_{n-2}+A_{n-2})\frac{(1+r)^2-(1-s)^2}{(1+r)-(1-s)}+(P_n-P_{n-1}+A_{n-1}).$$ Conclusão:

$$\sum_{k=1}^{n}(P_k - P_{k-1} + A_{k-1})\frac{(1+r)^{n-k+1} - (1-s)^{n-k+1}}{r+s} = \sum_{k=1}^{n} P_l (1+r)^{n-k}, \text{sendo}$$

$P_k - P_{k-1} + A_k$ a totalidade das pensões novas relativas ao ano k. Desta equação se deduz o valor médio de s, relativamente a um certo período. DAS ilustra o cálculo de s para o quartel de 1842 a 1866, para o Montepio Geral e para o Montepio Geral de Marinha, fornecendo os elementos necessários a este cálculo, a saber, a soma das pensões pagas e a soma das pensões cessantes nesse período. Em ambos os casos, as despesas destas instituições são afectadas de uma taxa de juro -composto- de 7% i.e. r=0,07. Para o Montepio Geral obtem-se uma primeira aproximação para s, simplesmente dividindo a totalidade das pensões cessantes pela totalidade das pensões pagas (com a excepção da última) no dito quartel. O valor obtido é s=0,022. Tomando s=0,02 e substituindo na equação de amortização conclui-se que a despesa prevista excede a despesa efectiva em 2:133$439 réis. Quer dizer, o valor tomado para s é diminuto pois que houve uma maior amortização do que a teoricamente prevista. Fazendo s=0,022 obtem-se uma diferença (89$273 réis) que DAS considera negligenciável. Para o Montepio Geral de Marinha obtem-se, analogamente, um primeiro valor s=0,037. Substituindo este valor na equação de amortização, a despesa efectiva excede a despesa prevista em 2:640$968 réis. Logo, o valor atribuído a s excede o valor real. Tomando para s o valor 0,036 obtem-se uma diferença de 755$440 que não é significativa.

Como conclusão do ensaio, DAS afirma que em associações estatutariamente análogas ao Montepio Geral de Marinha,"todas as considerações de prudência aconselham, que para garantir a estabilidade da instituição, as tabelas das contribuições, e das pensões sejam calculadas adoptando-se para s uma grandeza inferior a 0,036". Se as pensões forem legadas em regimes de maior liberalidade haverá, obviamente, um aumento nas despesas e, por conseguinte, um abaixamento da taxa de amortização das pensões. É o caso do Montepio Geral, diz DAS, em que há partilha da pensão entre viúva e filhos (em partes iguais), sobrevivência da pensão da mãe para os filhos e concessão temporária das pensões às filhas por casamento (como dote!)

Referências

1. Dionísio, J. J. (1978). *No Centenário da Morte de Daniel Augusto da Silva* . Lisboa: Memórias da Academia das Ciências de Lisboa, tomo XXII.

2. Guimarães, Rudolfo (1909). *Les Mathématiques en Portugal* . Coimbra: Imprensa da Universidade.

3. Rosendo, Vasco (1990). *Montepio Geral* . Imprensa Nacional Casa da Moeda.

4. Silva, Daniel Augusto da (1867). *Amortização Anual Média das Pensões nos Principais Montepios de Sobrevivência Portugueses* . Jornal de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, tomo I, 175-187.

5. idem (1867). *O Montepio Oficial do Governo* . Jornal do Comércio n°s 4004, 4006, 4010, 4012, 4018 e 4019.

6. Silveira, Jorge (1986). *O Mutualismo em Portugal* . Lisboa.

TEACHING CONCEPTS OF MOTION

Pedro J. Hernández, Seminario Orotava de Historia de la Ciencia

Introduction.

Any teacher who has taught Physics at Secondary School Level is aware of the difficulties that students find when facing the subject of motion, especially if it goes together with acceleration. Several experiments have proved that every student has a preconceived framework of incorrect ideas and concepts which are very difficult to change (see for example Viennot 1979, Helm 1980, Sabastiá 1984). We wish to emphasize here the following most incorrect concepts among students of about 16 years old who have passed a course on introduction to Physics:

- Proportionality between the distance covered by an object and the time it takes to cover this distance even in motions with acceleration.
- Relationship between the horizontal and vertical components of speed in the motion of projectiles.
- Relationship between the time of fall of a free falling body and its weight.
- Association between force and motion

This basic group of ideas remains within the student even though he is able to solve correctly the numerical exercises put forward by the teacher (Hewson 1981). As an example, any student is able to calculate the time it takes for an object to fall from a certain altitude aware that he need not know the value of the object mass. Nevertheless, when asked to compare qualitatively, the time it takes for two objects of different weight to fall, the answers begin to depend almost exclusively on his preconceived ideas on the subject (see appendix).

Obviously, no physics teacher ought to be pleased with this situation. To conceive the motion of a physical object implies the student having to change his own framework of erroneous ideas preconceived by the ideas of modern physics (Hashwed, 1986). To introduce the student in the study of motion through algebra and differential calculus, as has been traditionally done, does not contribute to a change in his conceptual scheme.

We start off from the assumption of accepting, in accordance with the constructivist approach of Kelly (Osborne & Freyberg, 1985) and the ideas of Piaget (Shayer & Adey, 1981), that the student plays the role of "generator" of his own knowledge. This is the starting point of the new educational system which is at present being implemented in Spain and which, according to our opinion, is too idealistic. Our way of envisaging the present situation is perfectly reflected in the words of Richard Feynman (Feynman,1963): "*there isn't any solution to the problem of education other than realize that the best teaching can be done only when there is a direct individual relationship between a student and a good teacher; a situation in which the student discusses the ideas, thinks about the things, and talks about the things. It's impossible* *to learn very much simply sitting in a lecture, or even by simply doing the problems that are assigned. But in our modern times we have so many students to teach that we have to try to find some substitute for the ideal*". That is the price that has to be paid in order to have an education apt for everyone and no educational system is that good enough.

In this paper, we present a specific proposal in order to approach the subject of motion using the Galilean strategy, closer to geometry and the ratio of magnitudes than to algebraic manipulation used nowadays. However, we wish to make it quite clear that it is not our intention to demonstrate that this approach to the study of motion is intrinsically better. Unfortunately, psychology and pedagogy are not sciences which stand out for their predictive power, and it is impossible to know beforehand the result of any proposal of this kind. In any case, what we present here is aimed mainly at making teachers conscious that students should not be converted into mere calculators of times, positions and velocities, but should also be made think about the qualitative characteristics of motion.

Some arguments in favour of the galilean strategy on the study of falling bodies

When Galileo Galilei faced the motion of free falling bodies, he was confronted by two basic difficulties. The first of them was that which any of us would encounter on trying to measure the distance covered by a body which falls in a set time. Heavy bodies fall too quickly to allow things of this kind to be measured. Secondly, he did not possess a precise enough watch to measure short periods of time. In fact, Galileo was to be one of the learned men to contribute to the invention of the pendulum clock. Nowadays, although the student can count on an excellent watch, he faces the same basic difficulties. There was a third difficulty still, Galileo did not use algebraic equations as we understand them today, neither he did know of differential calculus. In this sense, Galileo could be considered a classical mathematician and because of this he gad to face the study of the motion of free falling bodies with mathematical tools which demanded a sound understanding of the qualities of this type of motion. The basic strategy which can be selected from the *Discorsi*[1] and the *Dialogue*[2] is the following:

1. To slow down the motion of a free falling body by using inclined planes.
2. To convert ratios of times into ratios of lengths.
3. To study the properties of uniformly accelerated motion by using equivalent uniform motions.

This strategy, with great originality, stands up to the three basic difficulties we posed before.

At Secondary School Level our principal goal should be to enable the student to incorporate the ideas which modern physics has on motion to his schemes of thought

[1] Dialogues concerning Two New Sciences
[2] Dialogue concerning Two Chief World System

and for him to be able to apply these ideas to some simple situations. However, the exclusive use of algebraic equations and of differential calculus, more often than not, obscure the qualitative characteristics of motion. Thus, for example, students who are able to calculate correctly the final velocity of a free falling body from any altitude, answer incorrectly when asked to compare qualitatively the velocity of two bodies which fall, one from double the height of the other, in a clear example of the typical error of supposing proportionality between velocity and distance covered (see appendix).

Our proposal for following the steps of the Galilean method, at least eliminates the difficulties introduced by modern mathematical tools, laying bare the basic ideas which we apply when studying motion. This does not imply that this approach is simpler, only more enlightening. The former idea is outlined in figure 1.

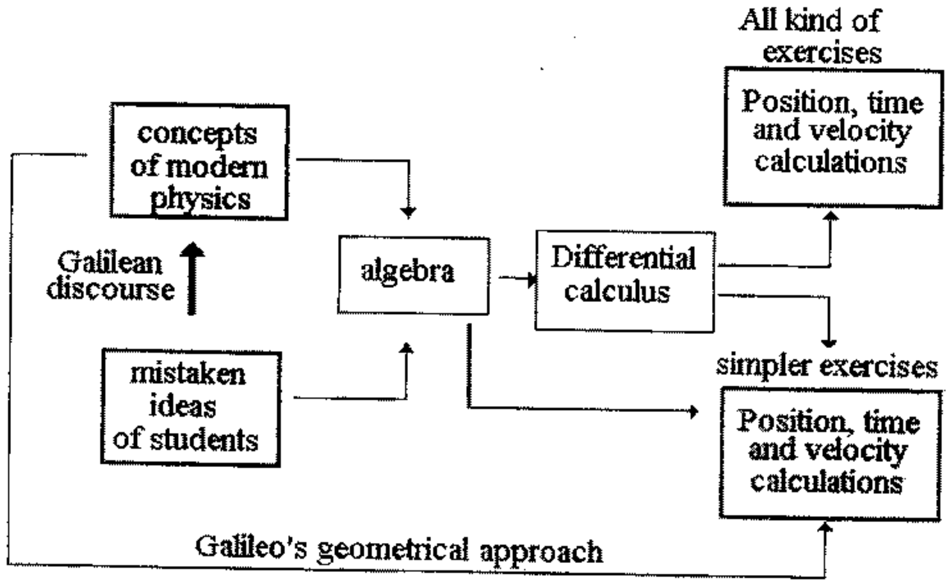


Figure 1. The Galilean discourse and the geometric approach it makes towards motion, can respectively correct the student's framework of erroneous ideas and allow him some calculations of positions, times and velocities en many problems. When studying motion for the first time, this would allow differential calculus and algebraic equations of the type $s = v_0 t + 1/2 g t^2$ to be removed, since they only contribute to obscuring the physical process which is trying to be studied.

Our thinking on this topic coincides with the so-called genetic method (Ahlforsh *et al.*, 1962), who appeals for ideas to be taught just as they developed historically. In the case of motion, the efficiency of the method could lie basically in that the preconceived ideas that the student has on the motion of physical objects bear close resemblance with the ideas on "common sense" of Aristotelian physics (Whitaker 1983) and the medieval theories on *impetus* (Piaget & García 1982, Lytthott 1983). We should also bear in mind that differential and integral calculus are historically posterior to Galileo and that we could say (not without being somewhat daring) that the study of motion contributed more to the appearance of calculus than did the use of the latter to the understanding of motion. And we can quote, in support of this affirmation, the demonstration made by Galileo (second day of the *Dialogue*) on the equivalence between the accelerated motion of a body which starts off from repose and the corresponding uniform motion with velocity equivalent to half the final velocity of the motion. To this end, he uses the technique of adding an infinity of lines corresponding to the different grades of velocity of the body in motion uniformly accelerated, something which is not al all surprising to de modern users of integral calculus. As it is known, the proof of this "Theorem of the average velocity" had already been carried out by Nicolás Oresme in the XIV century and prompts at Newton's and Leibniz's fundamental theorem of calculus (Holton §6.6).

Some keys for the teaching of motion with uniform acceleration

The learning of the properties of the motion of physical objects should begin with the study of the motion of free falling bodies, since this is a motion which continually manifests itself around us. The following observations are therefore proposed:

1. The motion of a heavy body falling does not depend on the its mass.
2. The characteristics of the motion of a heavy body falling along a plane depend exclusively on the inclination of the plane (relationship with the causes of motion).
3. Linear dependence of velocity with time
4. Dependence between the distance covered and the time square.
5. The final velocity reached by an object which falls on any inclined plane depends only on the height from which it fell.

The reader should observe that facts 1 and 2 refer to the dynamics of the motion. We consider that, in a first approach to the study of motion, one should not make a distinction between kinematics and dynamics, as this is an artificial division which stems from formalising the physics *a posteriori*.

Next, the manner of presenting these facts to students is analysed:

1. It is curious to confirm (see appendix) that students, even after having heard their teacher say time and time again that objects of different weight fall at the same time, continue to maintain in their conceptual scheme the idea that the heavier bodies fall first. Nothing better to do away with this equivocation than the combination of a simple experiment (which although very well known is usually omitted in the exposition of the theme) and the Socratic dialogue (Arons 1981) to make the conceptual scheme of the students come into conflict with the experiment presented (according to Hashwed,1986). Hernández (1996) has presented this situation as follows:

With a coin and a piece of paper, the following query is put forward to the students:

Teacher. If we simultaneously drop both objects, which one will fall to the ground first?

Student. The coin, obviously
Teacher. (After the experiment is carried out). OK!, you are right. But why?
Student. Because the weight of the coin is greater.

Some students understand that resistance to air influences in some way. A new experiment helps to specify the ideas. The teacher cuts a piece of paper in two, screws up one of them and drops both objects. The student's line of argument clashes with the experiment. This is the right moment to read an illuminating text by Galileo:

"...If then we take two bodies whose natural speed are different, its is clear that on uniting the two, the more rapid one will be partly retarded by the slower, and the slower will be somewhat hastened by the swifter... But if this is true, and if a large stone moves with a speed of, say, eight while a smaller moves with a speed of four, then when they are united, the system will move with a speed less than eight; but the tow stones when tied together make a stone larger than that which before moved with a speed of eight. Hence the heavier body moves with less speed than the lighter; an effect which is contrary to your supposition. Thus you see how, from your assumption that the heavier body moves more rapidly than the lighter one, I infer that the heavier body moves more slowly"

The previous argumentation can be reinforced by proposing an experiment using a coin and a rounded piece of paper slightly smaller than the coin.

a) They are dropped separately
b) The coin is placed on top of the piece of paper and they are asked for the result they expect. The students expect both objects to reach the ground simultaneously, as the experience proves.
c) A new question allows us to clarify concepts and introduce new themes: what will happen now if we place the coin underneath the piece of paper and watch them fall?.

The theme of the vacuum, the air pushed aside as the coin falls, etc., arise naturally during the discussion. When students are presented with the familiar images of the astronaut dropping the feather and the hammer on the lunar surface, they are struck by strange ideas such as the gravity no existing on the Moon. It is necessary to give them a previous description of what the lunar conditions of the inexistence of atmosphere, etc., are. However, we are not in favour of showing these images without accompanying them by similar experiments carried out on Earth in conditions of vacuum, so that the students can compare analogous situations.

2. A curious experiment has arisen from the "Proyecto Helena" project (see appendix). We asked several tens of students between the ages of 14 and 18 and some tens of secondary school teachers, after showing then the sketch in figure 2, which of the balls would reach the end of the inclined plane first. The answer erred by 50% approximately. This datum is not rigorous, since it was carried out spontaneously and

without previous analysis, but it suggest a precarious conception of the maxim "the same causes produce the same effects" applied to motion.

This leads us to the conclusion that it is important to work on situations in which students compare the motion of a ball rolling along stretches of an inclined plane and compare the time-intervals for fall through planes with a different inclination .

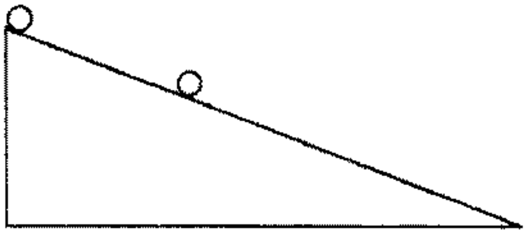


Figure 2.

3/4. Working the concept of uniform acceleration and the linear dependence of speed with time is no trivial matter. Galileo came to the conclusion that this was so by means of great intuition and mathematical simplicity (Cohen, 1960 § 5). But he did not make use of experiments for the deduction of this law, since the intrinsic difficulty of the experiment of the ball which rolls along an inclined plane, such as is described on the third day of the *discorsi*, is well known. Instead the experiment was *a posteriori* verification of the work hypothesis. Perhaps at this point it would be necessary to make the student work with hypothesis on the dependence between distance covered, speed and time in the following order:

a) the distance covered is proportional to time
b) the speed is proportional to the distance covered
c) speed is proportional to time

and use the experiment to verify them *a posteriori*. Obviously, we have to make the student somehow see that all the hypothesis have been chosen because of simplicity, but that only hypothesis c) does not lead to contradictions with the experiments. But let us see what Galileo has to say on the subject:

Salviati. (...) When, therefore, I observe a stone initially at rest falling from an elevated position and continually acquiring new increments of speed, why should I not believe that such increases take place in a manner which is exceedingly simple and rather obvious to everybody?. If now we examine the matter carefully we find no addition or increment more simple than that which repeats itself always in the same manner(...).

Sagredo. (...) So far as I see at present, the definition might have been put a little more clearly perhaps without changing the fundamental idea, namely, uniformly accelerated motion is such that its speed increases in proportion to the space traversed; so that, for example, the speed acquired by a body in falling four cubits would be double that acquired in falling two cubits and this latter speed would be double that acquired in the first cubit. Because there is no doubt but that a heavy body falling from the height of six cubits has, and strikes with, a momentum [impeto] double that it had at the end of three cubits, triple that which it had at the end of one.

Salviati.It is very conforting to me to have had such a companion in error; and moreover let me tell you that your proposition seems so highly probable that our

Author himself admitted, when I advanced this opinion to him, that he had for some time shared the same fallacy..

(...) And yet, [it is as false and impossible] as that motion should be completed instantaneously; and here is a very clear demonstration of it. If the velocities are in proportion to the spaces traversed, or to be traversed, then these spaces are traversed in equal intervals of time; if, therefore, the velocity with which the falling body traverses a space of eight feet were double that with which it covered the first four feet (just as the one distance is double the other) then the time-intervals required for these passages would be equal. But for one and the same body to fall eight feet and four feet in the same time is possible only in the case of instantaneous [discontinuous] motion; but observation shows us that the motion of a falling body occupies time, and less of it in covering a distance of four feet than of eight feet; therefore it is not true that its velocity increases in proportion to the space (...).

Salviati's final argument is no doubt quite obscure, and one in which, by intuition, there seems to be a confusion between averaged out and instantaneous variables. It is essential to read Cohen (1960 §5) and Holton (§7) for the teacher to be conscious of the intrinsic difficulty of the subject.

5. Before beginning to formalize the science of motion naturally accelerated in theorems, propositions and corollaries, Galileo asks us to "*makes a single assumption, namely: The speeds acquired by one and the same body moving down planes of different inclinations are equal when the heights of these planes are equal*". However, Galileo would have to give some reason when making an affirmation which is not evident at first sight. Galileo quotes the following experiment: a pendulum is made to swing so that when it reaches the vertical, the length of the rope is shortened by means of an obstacle such as a nail, whose position now becomes the oscillation axis of the pendulum, as can be seen in figure 3. One can observe how the pendulum reaches the same altitude as it would have done if this obstacle had not existed. Since, in both cases the speed should be the same on passing the vertical, we conclude that it only depends on the height from which the pendulum is dropped. This same experiment could be repeated with the students using inclined planes with different inclination and which start off from the same height, and to observe that the behaviour of the ball when it reaches the ground is similar in all the cases (for example, that it is always able to ascend to the same altitude of another plane of fixed inclination, that it covers the same distances in the same time-intervals if it continues along a horizontal plane, etc.).

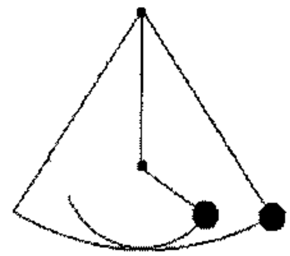


Figure 3. Pendulums swinging on different axis

Once the previous facts have been established, it is time to work on the first three theorems:

Theorem I, Proposition I.

The time in which any space is traversed by a body starting from rest and uniformly accelerated is equal to the time in which that same space would be traversed by the same body moving at a uniform speed whose value is the mean of the highest speed and the speed just before acceleration began..

This theorem is essential in the previously mentioned galilean strategy of converting accelerated motions to their uniform equivalents.

Theorem II, Proposition II

The spaces described by a body falling from rest with a uniformly accelerated motion are to each other as the squares of the time-intervals employed in traversing these distances.

In this way we formalize those which we tried to obtain from what we had observed in the experiments with inclined planes.

Theorem III, Proposition III

If one and the same body, starting from rest, falls along an inclined plane and also along a vertical, each having the same height, the times of descent will be to each other as the lengths of the inclined plane and the vertical..

This theorem is fundamental in order to establish a relationship between acceleration on an inclined plane, and the acceleration of gravity.

Before concluding, we shall point out that the parallel study of the forces involved in the motion of a heavy body in falling is of vital importance. However, we will not linger on how this matter should be approached as it is extensively studied in the bibliography (see for example, Viennot 1979, Whitaker 1983, Osborne 1984).We would just like to show an example of how the Socratic dialogue is essential in order to produce the conflict in the conceptual framework of the students. According to Hernández (1996):

If we ask a student to tell us which forces act on an ascending body after being thrown, he will most probably answer by representing a force F directed upwards, in addition to weight P (see appendix). The dialogue could evolve as follows:

Teacher. What is force F like in relation to P in the ascending motion?
Student. F is greater than P
Teacher. Is F always grater than P?
Student. No, F gradually decreases until it is the same as P at its highest point
Teacher. What happens from the moment the body begins to descend?

This last question is one which generates a certain conflict between what seems to be deducted from the student's train of thought up to now and what many of them have drawn for the forces acting on a free falling body (weight only). When pressed a littıe (arguing that force F at the highest point could be very great in the case that P were so), most of them admit that it would be necessary to add a force F which was less than P and whose value would continue to decrease as the object falls.

During the discussion, the argument that has usually arisen and supports the previous ideas as a whole, is that if a constant force is applied to a body resting on the ground, does the body move with a constant speed and its logical consequence (?): if F decreases so does the speed of the body.

The ever increasing speed of the descending object, thus seems to them perfectly explained: the diminution of F causes the difference P–F to be greater and greater.

Conclusions

Secondary school teachers should be aware that the study of motion is a theme that implies intrinsically difficult ideas for the students. The History of Science shows us how Galileo faced the same difficulties as out students do today. One of them is the very limitation of the study we are carrying out: the fall of a heavy body is too fast to measure times and distances. We have overcome another one of them; today we dispose of precise watches. But still have the difficulties of mathematical tools. Nowadays students can easily make use of algebraic equations, vector and differential calculus. Nevertheless, studies carried out by Piaget suggest that most of them are unable to manage with such a degree of abstraction. We should learn from Galileo himself, for he had to face all these difficulties, and managed to devise a very specific strategy to solve the problem. Here, we have only attempted to transmit that there exists an alternative and precise way of approaching the study of free falling bodies. Our experience with the Helena project has shown us that this can be a much more attractive way for the students of facing the subject of motion. Our idea intends to be a precise idea for a precise problem which has arisen in the teaching of physics, because we know that we have to find a substitute for the ideal and that this is the only line of work that can help to improve the quality of teaching.

I would like to thank all my collaborators in the Helena project. José Montesinos for his unconditional support at all times and for having been my "spiritual guide" on the subject of the History of Science. Agustín Isidro de Lis and Carlos Mederos for the interesting discussions which have been the main source of inspiration of this work. María Jesús Pérez for having been a great assistance in the elaboration and coordination of the tests and statistical studies.

I would like to thank Miguel Hernández, without whose collaboration this paper would not have been written, the magisterial lecture he gave the students, the tests conceived by him and the pre-print of one of his papers, all of which have been three basic pillars for this work.

REFERENCES

Ahlfors, L. V. *et al.* 1962, "On the mathematics curriculum for the High School", published by American Mathematical Monthly y The Mathematics Teacher in March, 1962

Arons A., 1981. "Thinking reasoning and understanding in introductory physics courses", The Physics Teacher, 166

Cohen, I. B., 1960. "The Birth of a New Physics", W.W. Norton & Company, New York.

Feynman, R. P. *et al.*,1963. The Feynman Lectures on Physics, Vol. I, Addison-Wesley

Galileo Galilei, Dialogues Concerning Two New Science, 1954, Dover;
Dialogue Concerning the Two Chief World System, 1967, University of California Press

Hashwesh, M. Z., 1986. "Towards an explanation of conceptual change", Eurpean Journal of Science Education, **3**, 383

Helm H., 1980. "Misconceptions in Physics amongst South African Students". Physics Education, **15**, 92

Hernández, M., 1996. Submitted to Revista Española de Física

Hewson P. W., 1981. "A Conceptual Change Approach to Learning Science". European Journal of Science Education, **3**, 383

Holton, G., Introduction to Concepts and Theories in Physical Science, Second Edition, Addison-Wesley

Lythott, J. 1983. "Aristotelian was Given as the Answer, But what was the Question". Proceedings of the International Seminar "Misconceptions in Science and Mathematics", Ithaca N.Y., Cornell University.

Osborne, R., 1984. "Children's dynamics". The Physics Teacher, **22**, 504

Piaget, J. & García, R. 1982. Psicogénesis e historia de la Ciencia. Siglo XXI, México

Shaye, M. & Adey, P., 1981. "Towards a Science of Science Teaching", Heinemann Educational Books Ltd., London.

Viennot L., 1979. "Le raisonnement spontané en dynamique élementaire". Hermann, París"

Whitaker, R. J. 1983. "Aristotle is not dead: student understanding of trayectory motion". American Journal of Science Education, **5**, 217

APPENDIX

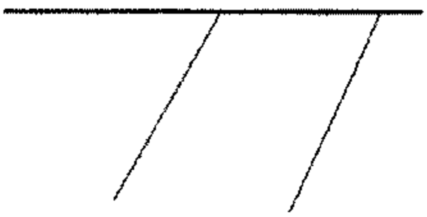
Some results obtained from the "Proyecto Helena"

The "Proyecto Helena" consisted in an experiment with 80 Secondary School students of about 16 years old, who were introduced into the XVII century with the intention of making them acquire a new perspective of what sense there is in studying mathematics in particular and science in general, through the History of Science. These students were introduced to the culture, the society, the philosophy, the mathematics and the physics of the XVII century by means of three lectures, one of which was based on the old physics of Aristotle and the new conception of Galileo.

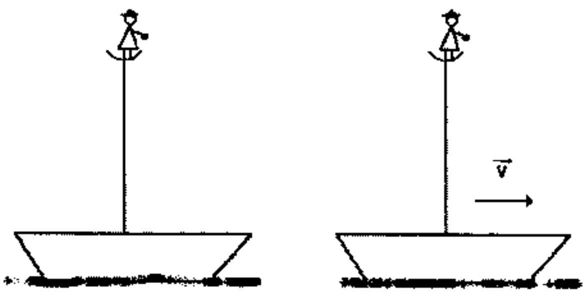
Before and after the lecture, the students did a test which consisted in the following questions (the percentages of the different answers are given within the brackets):

1. Two different weighing objects are let go of from the same height so that $P_1 < P_2$. Which of the two objects will fall first?
(P₁ first: 37%, P₂ first: 4%, at the same time: 59%)

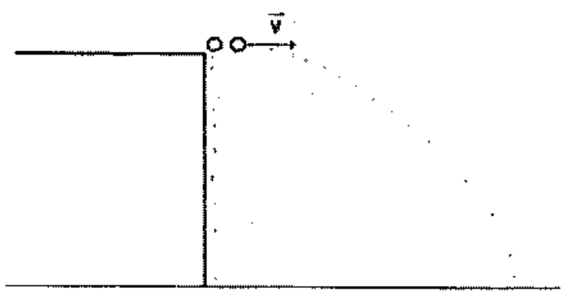
2. Given two pendulums 1 and 2 both the same in length but from which hang weights P_1 and P_2 so that $P_1 > P_2$. Which one of then will swing faster?.
(P_1: 27%, P_2: 36%, simultaneously: 37%)



3. A heavy body is allowed to fall freely from the top of the mast of a ship which is not moving. Where will the object fall?
(Depends on v: 3%, vertically: 35%, behind the mast: 62%)

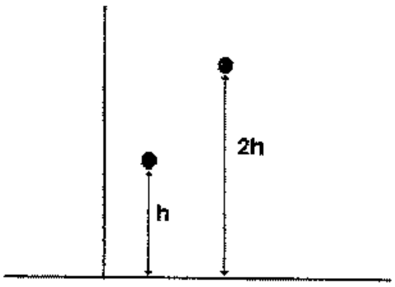


4. If two identically weighing objects are thrown simultaneously from the same height h in such a way that the first one falls freely while the second one has an initial velocity parallel v to the horizontal ground. Which one will reach the

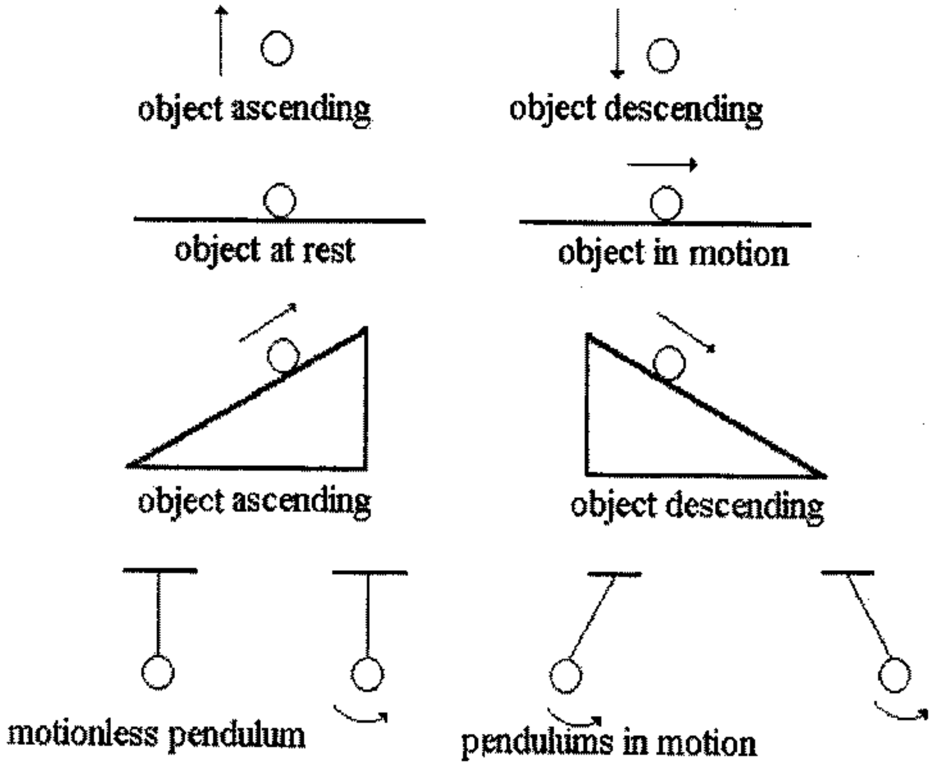


ground first?.
(Depends on v: 11%, simultaneously: 26%, vertical falling body: 54%, object with horizontal velocity: 9%)

5. If a body falls from a height h and reaches the ground with a velocity v. What velocity will it have if the fall is produced from the height 2h?
(Exact answer: 2%, greater than 2v: 5%, greater but less than 2v: 8%, the same speed v: 19%, 2v: 66%



6. Draw the forces which act on an object with mass M in the different situations which follow.



In the answers to question 6, a very varied amount of different situations are presented, however we can summarise by saying that a very high percentage of students include forces in the direction of the motion.

The analysis of the test done after the lecture does not show significant changes in the student's answers, although one does perceive the influence of the conflict of ideas generated because some of them begin to give reasoning of the type: "two differently weighing objects fall in the vacuum at the same time, when gravity does not exist" or "they fall at the same time because gravity attracts them with the same force"

NEWTON'S REALIZATION OF THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

Phillip E. Johnson, The University of North Caroline at Charlotte, USA

By the second half of the seventeenth century the time was ripe for someone to organize the tremendous accumulation of methods and problems which had evolved into the new subject of calculus. Contributors to the development of the calculus go back at least to the time of Archimedes (287-212 B.C.), who came very close to actual integration with his method for finding a required area or volume. The problems of drawing tangents to curves and finding maxima and minima also go back to the ancient Greeks, but perhaps Pierre de Fermat (1601-1665) was the first to clearly anticipate the method of differentiation. If Fermat had recognized the inverse relationship between the quadrature (area) and tangent problems and generalized his methods, perhaps he would be credited with inventing the calculus.

Isaac Barrow (1630-1677) is often credited with being the first to recognize in full generality the fundamental theorem of calculus; but, credit for this recognition should probably go to James Gregory (1638-1675), who gave the first known proof in his *Geometriae pars Universalis*, published in 1668. Both Gregory and Barrow framed the theorem in a purely geometric context which makes for difficult reading. The formulation by Barrow in Lecture X of his *Lectiones Geometricae* [4, pp. 113-124] is so hard to decipher that one will not be convinced that it is stated and proved there without very careful reading. Child [4, Preface] argues that Barrow was the first inventor of the infinitesimal calculus, an assertion refuted by his contemporary and another authority on the history of the calculus, Florian Cajori [3]. Contemporary authorities such as Edwards [5, p. 190] and Baron [1, p. 252] have agreed with Cajori's refutation. While Barrow recognized the unifying significance of the inverse property, he does not seem to have realized that his theorems were the basis for a new subject, nothwithstanding Child's arguments to the contrary.

Calculus evolved over so many centuries with so many contributors that Baron's carefully researched and well-written *The Origins of the Infinitesimal Calculus* [1] has the last chapter entitled "Epilogue: Newton and Leibniz." Newton and Leibniz are generally credited with the invention of the calculus because of the concepts, symbolism and rules for performing operations which they supplied. Especially important was the way in which Newton discussed the computation of areas by means of antidifferentiation, providing the basis for an algorithmic approach to the computation of areas.

Leibniz's first writings, while not so clear as Newton's, also introduced and exploited general algorithmic techniques by which calculations of areas and tangents could be systematized. The procedures which Newton and Leibniz invented were universally applicable and are essentially the same as those employed today in the calculus. Their methods were necessary for the later logical development of the concepts of derivative and integral which were rigorously elaborated over the next couple of centuries.

Early Calculus Researches

Newton's early calculus researches, overwhelming in their bulk, started about the beginning of his last undergraduate year at Cambridge in 1664. In the creation of his calculus of fluxions, two mathematicians particularly stand out for their impact on him, John Wallis (1616-1703) and especially René Descartes (1596-1650). Rickey [6, p. 374] observes that Descartes's claim that from the equation of a curve one can tell everything about it encouraged Newton to develop the variety of techniques of Descartes and Wallis into algorithms for solving problems about all curves. In addition to Descartes and Wallis, Newton acknowledges in his own chronology of his early calculus researches his debt to Archimedes, Barrow and Fermat, among others. For an especially readable account of the influence of various mathematicians on Newton, see the excellent article by Rickey just mentioned.

From Descartes's *La Géométrie*, Newton was continually inspired over the two years from 1664 until in the fall of 1666 he ordered and condensed his researches in a short, unfinished and untitled work which he later referred to as the "October 1666" tract. The work was unpublished until recently with the publication of Whiteside's first volume of the mathematical papers of Newton, in which the researches in analytical geometry and calculus occupy better than half of this large volume. Newton did a considerable amount of work at home during this period because of the bubonic plague epidemic which forced Cambridge to close during 1665-66.

The influence of Wallis' *Arithmetica Infinitorum* on Newton is clear from Newton's consideration of Wallis's work with the integral (in modern notation)

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx,$$

the determination of which Wallis had shown to be equivalent to the problem of "squaring the circle" for $n = \frac{1}{2}$. Newton made a major step when he decided to replace the upper bound in the integral by x. He obtained, for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ the areas:

$$\int_0^x (1-x^2)^n = x,\ x - \tfrac{1}{3}x^3,\ x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5,\ x - \tfrac{3}{3}x^3 + \tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7, \ldots$$

Another important step was putting $n = \frac{1}{2}$ and getting an infinite series:

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \ldots$$

to obtain the area of the circular segment shaded in figure 1.

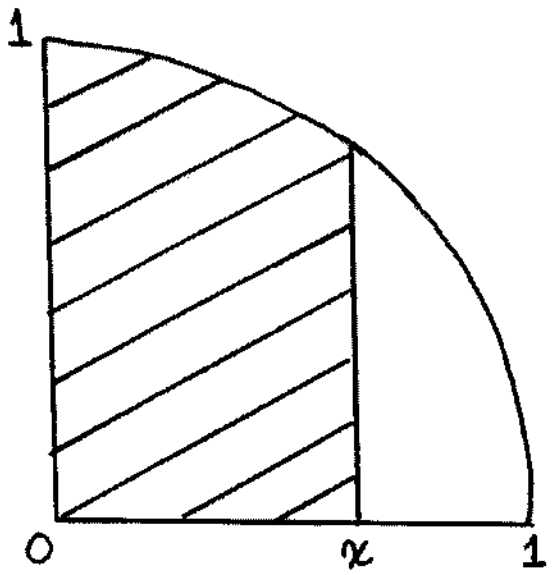


Figure 1

After his voluminous preliminary researches in the calculus, Newton progressed to the development in his *De Analysi* of the basic notion that differentiation and integration are inverse operations, first stated explicitly as problems 5 [7, vol. 1, p. 427] and 7 [7, vol. 1, p. 430] together in his October 1666 tract on fluxions. He starts simply with the statement, accompanied by figure 2,

Rule 1. If $ax^{\frac{m}{n}} = y$, then will $\frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ equal the area ABD.

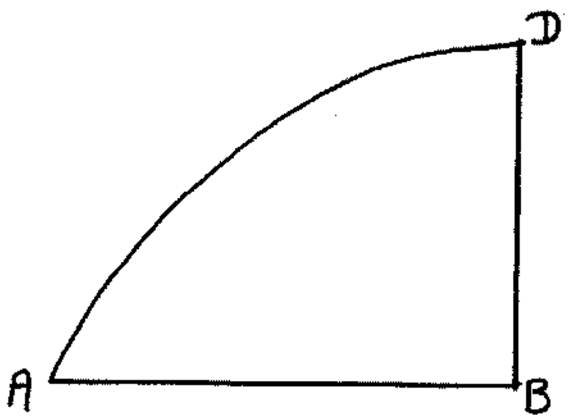


Figure 2

He says that the matter will be evident by example and follows with six examples. Noteworthy is the typical way in which Newton presents his work with numerous examples instead of presenting final results starkly for the sake of an elegant appearance. Several pages later he observes that the rule stands out as requiring proof and proceeds essentially as follows:

Let any curve ADδ (figure 3) have base AB=x, perpendicular ordinate BD=y and area ABD=z. Take Bβ = $\mathcal{O}$, BK = v and the rectangle BβHK($\mathcal{O}$v) equal to the space B$\beta\delta$D. (Note the implicit assumption that the arc ADδ is simply convex and the idea of equating the curved segment B$\beta\delta$D to the rectangle BβHK.) Then Aβ = x + $\mathcal{O}$ and A$\delta\beta$ = z + $\mathcal{O}$v. Then from any arbitrarily assumed relationship between x and z, y is found in the following manner.

Take arbitrarily $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ or $\frac{4}{9}x^3 = z^2$. Then, when x + $\mathcal{O}$ (or Aβ) is substituted for x and z + $\mathcal{O}$v (or A$\delta\beta$) for z, there arises by the nature of the curve

$$\tfrac{4}{9}(x^3 + 3x^2\mathcal{O} + 3x\mathcal{O}^2 + \mathcal{O}^3) = z^2 + 2z\mathcal{O}v + \mathcal{O}^2v^2.$$

On taking away the equal quantities $\frac{4}{9}x^3$ and z^2 and dividing the rest by $\mathcal{O}$, there remains

$$\tfrac{4}{9}\,(3x^2 + 3x\mathcal{O} + \mathcal{O}^2) = 2zv + \mathcal{O}v^2.$$

Now supposing $B\beta$ to be infinitely small, that is, $\mathcal{O}$ to be 0, v and y will be equal and terms multiplied by $\mathcal{O}$ will vanish and there will remain

$$\tfrac{4}{9}(3x^2) = 2zv \text{ or } \tfrac{2}{3}x^2 = zy = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y, \text{ so, } x^{\frac{1}{2}} = y.$$

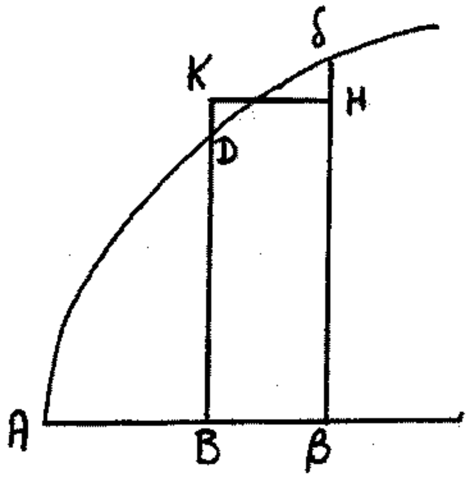


Figure 3

In a slightly simplified version of Newton's generalization of the above proof, consider a curve for which the area z is given by

(1) $z = \frac{n}{m+n}\,ax^{\frac{m+n}{n}}$.

Mimicking what was done above and substituting $x + \mathcal{O}$ for x and $z + \mathcal{O}y$ for z yields

(2) $z + \mathcal{O}y = \frac{n}{m+n}\,a(x+\mathcal{O})^{\frac{m+n}{n}}$.

Raising each side to the power n, dividing by $\mathcal{O}$ and neglecting terms still in $\mathcal{O}$ gives

(3) $y = ax^{\frac{m}{n}}$.

Hence, if the area z is given by (1), the curve will be given by (3), and conversely if the curve is given by (3), the area is z as given by (1).

Whereas areas up to this time had been found as a sum of infinitesimal areas, Newton obtained the area by means of an indefinite integral through the study of the rate of change of the area. For the first time, what we now call the derivative is basic and the integral is defined in terms of this. In the above proof, Newton gave a generally applicable procedure for determining an instantaneous rate of change and then inverted this for summations. Boyer [2, p. 192] says that with this step we may consider that the calculus has been introduced.

References

1. M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus,* Pergamon Press, London, 1969.

2. C.B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Historical Development*, Dover Publications Inc., New York, 1959.

3. F. Cajori, Who was the first inventor of the calculus? *American Mathematical Monthly,* 26 (1919) 15-20.

4. J.M. Child (tr. and ed.), *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow,* Open Court Publishing Company, Chicago and London, 1916.

5. C.H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus,* Springer-Verlag, New York, 1979.

6. V.F. Rickey, Isaac Newton: man, myth, and mathematics, *College Mathematics Journal,* 18 (1987) 362-389.

7. D.T. Whiteside (ed.), *The Mathematical Papers of Isaac Newton,* 8 vols, Cambridge University Press, Cambridge, 1967-81.

LA DEMONSTRATION MATHEMATIQUE, UN OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE?

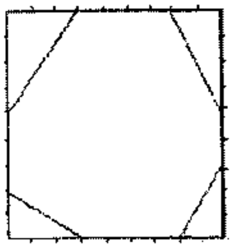
Pr.BEBBOUCHI R., U.S.T.H.B., ALGER

« démontrer,du latin demonstrare(monstrare veut dire prouver):prouver,au moyen du raisonnement,la vérité d'une chose,faire admettre comme vrai ce que l'on propose aux autres;on prouve par des actes,on démontre par des arguments,en suivant le procédé déductif;on démontre un problème de mathématiques,mais on prouve la vérité d'un fait que l'on avance. »
Encyclopédie Quillet(1983).

De cette définition,on peut poser plusieurs questions:faut-il lier au mot démonstration un raisonnement?La démonstration entre-t-elle dans un processus de communication?S'agit-il de prouver ou de rendre vrai?La démonstration est-elle seulement un procédé déductif?
En explorant les siècles,on peut déjà obtenir des éléments de réponse.Ensuite,l'appréciation du terrain,en l'occurence l'environnement algérien,permettra de déceler les éventuels obstacles qu'il faudra dépasser.

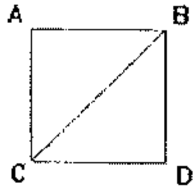
1.La démonstration à travers les âges:

a)**Les mathématiques chinoises**(voir [8]):
Les mathématiques chinoises d'avant le XIII^{e} siècle sont des mathématiques « sans Euclide »,donc privées d'axiomes,de définitions,de théorèmes,de raisonnements hypothético-déductifs,mais tout de même des mathématiques logiquement justifiées.On a plutôt des « monstrations » que des démonstrations.
Les techniques utilisées sont des techniques de dissection,comme pour un puzzle.
b)**Les mathématiques égyptiennes**(voir [5]):
Le papyrus Rhind du British Museum(1650 av.J.-C.,copie d'un autre papyrus de 1800 av. J.-C.)comporte des exercices d'arithmétique et commence par « règles pour scruter la nature et connaître tout ce qui est obscur ainsi que tous les secrets ».C'est une série de problèmes très concrets tirés de la vie quotidienne.
Par exemple,le problème R51 correspond au calcul de la mesure de l'aire d'un triangle isocèle dont le côté mesure 10 khet et la base 4 khet(1 khet fait à peu près 52,5m,soit 100 coudées).
Toutefois,le problème R48 est différent.La figure représentée n'est pas commentée.Chace et Peet pensaient que le scribe voulait comparer le carré et le cercle inscrit:9 mesure le côté du carré et le diamètre du cercle;la mesure de l'aire du cercle est 64 setats(1 setat est égal à 1 khet^2 ,soit 2750 m^2)et celle du carré est 81 setats.Mais le scribe Ahmes sait tracer des cercles ronds et la figure inscrite est plutôt polygonale .En fait,on a l'octogone suivant:



et son aire est 64!
La figure est donc un essai de « justification géométrique » mais le scribe ne nous dit pas tout.
Les Grecs sauront transformer cette « géométrie arithmétique » en science.
c)**Les mathématiques grecques**(voir [1]):

D'après les philosophes et historiens des Sciences Caveing,Szabo et Vernant,la civilisation grecque,basée sur les libres débats,les discours argumentés,va créer des nécessités sociales qui provoqueront une mutation dans le discours mathématique.
Zénon,pour défendre les idées de son maître Parmenide sur l'infini,va,par exemple,inventer deux techniques:le raisonnement par l'absurde et les paradoxes.Il sera aussi le père de la dialectique.
On démontre pour convaincre,même sans faire comprendre,comme le montre l'exemple de la démonstration de la proposition 117 du livre X des Eléments d'Euclide,proposition dite par le pair et l'impair(voir [2]).
La proposition dit que dans un carré,la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté(leur rapport n'est pas une fraction).
Si AB et BD sont commensurables,alors $AB/BD=n/m$,avec m et n premiers entre eux et $m \neq 1$.



Le théorème de Pythagore entraîne que $BD^2=2AB^2$ et donc $m^2=2n^2$.
Si m^2 est pair,m sera pair et n impair.Mais si $m=2k$,alors $n^2=2k^2$ et n sera pair.Il y a contradiction et AB et BD sont incommensurables.
Cette démonstration par l'absurde,l'une des premières du genre,ne nous fait toujours pas comprendre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
d)**Les mathématiques arabes**(voir [3]):

Nous savons que les mathématiciens arabes ont eu une double influence:grecque et indienne.

Des Grecs,ils ont retenu cette nécessité de critiquer,discuter,argumenter tout résultat mathématique.A titre d'exemples,le cinquième postulat d'Euclide sur les parallèles a été commenté par An-Naïrizi,al-Gauhari,Thabit Ibn-Qurra,Ibn al-Haytam,Umar el-Khayyam et at-Tusi(voir [6]),la dichotomie infini actuel-infini potentiel a donné lieu à des joutes mathématiques impressionnantes entre Al-Kindi,Thabit Ibn-Qurra,Ibn-Sina,Maïmonide et bien d'autres(voir [7]).

Les mathématiques indiennes ont permis aux Arabes de développer une nouvelle branche,l'algèbre,à partir des travaux d'Al-Khawarizmi.Déjà,une nouvelle forme de pensée apparait:structurée,rigoureuse,ordonnée.C'est le cas d'al-gabr oua el-mouqabala,c'est le cas de l'analyse(on suppose vrai le résultat cherché et on trouve les propriétés qui en découlent)et la synthèse(processus inverse:partir des résultats établis et aboutir à la construction du problème posé)qu'Ibrahim Ibn Sinan décrit si bien(voir [9]).

Plus tard,à la fin du XVI^{e} siècle,Viète reprendra ces deux notions et,pour « restaurer l'analyse abatardie par les barbares »,va définir de nouveaux termes:la zététique(recherche des équations modélisant le problème),la poristique(validité de ce qu'on a trouvé),l'exégétique(construction de la solution),termes qui ont été oubliés au fil des siècles.

On ne peut pas aussi ne pas citer la méthode d'exhaustion(pour montrer que deux surfaces A et B sont égales,on va supposer $A \subset B$ et $B \subset A$ et on aboutit à des contradictions).Cette méthode sera affinée en approchant A par une surface rectiligne inscrite ou circonscrite C telle que l'aire A-C soit très petite.Thabit Ibn-Qurra s'en servira notamment pour calculer les aires délimitées par des paraboles.

e)Les mathématiques européennes(voir [2] et [4]):

Le XVII^{e} siècle va marquer une rupture dans la conception de la démonstration.

On va développer des méthodes comme:la méthode des indivisibles de Cavaliéri(on compare des surfaces à partir de leurs indivisibles,les segments),la méthode des tangentes de Fermat,la méthode cartésienne(inspirée de l'analyse et la synthèse),la méthode projective.

Désormais,la démonstration a pour but d'éclairer.On rend les choses évidentes car:

> « Toute évidence est certaine alors que toute certitude n'est pas évidente »(Nardi).

Pendant longtemps,le raisonnement déductif est le mieux apprécié,même de nos jours d'ailleurs.Mais on se permettait des méthodes heuristiques(aucune justification pour $d(xy)=xdy+ydx$,ni pour le binôme de Newton,mais ça marche!).

Le XIX^{e} siècle tranche en recherchant plus de rigueur dans les méthodes mathématiques.

Par exemple,dans le domaine des équations différentielles,avant Cauchy,on se contentait de chercher des solutions d'équations livrées par la Nature,avec et après Cauchy,on s'intéresse aux conditions d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles quelconques.

Weierstrass remplace les infiniment petits d'existence floue par des inégalités(base de l'analyse moderne).

L'idée d'évidence n'est plus liée à l'idée de démonstration,comme on le voit dans les géométries non euclidiennes:le plus court chemin entre deux points est une

géodésique;mais si,chez Euclide,c'est un segment de droite,dans le demi-plan de Poincaré,cela peut être un arc de cercle,sur la sphère,c'est un arc de grand cercle.
Chez Legendre,une proposition était vraie lorsqu'elle était rendue évidente par une démonstration.Chez les formalistes,une proposition est vraie si elle est non contradictoire avec un système d'axiomes.
De plus,tout est à démontrer et,comme le souligne Balacheff, «la clé de voûte de la démonstration est la contradiction ».
En 1904,le programme de Hilbert consiste à fonder les mathématiques sur une base axiomatique.On va créer des théories mathématiques et on dira qu'elles sont valides s'il en existe un modèle et si elles sont consistantes(pas de propositions à la fois vraies et fausses).
On accepte cinq formes de raisonnements mathématiques:

- le raisonnement déductif.
- le raisonnement par récurrence.
- le raisonnment par l'absurde.
- le raisonnement par la contraposée.
- le raisonnement par le contre-exemple.

Et pourtant,le théorème de Gödel (si une théorie contient l'arithmétique,il existe des théorèmes non démontrables)laisse planer le doute sur la consistance de la théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel,base des mathématiques bourbakistes du XX^{e} siècle.
En cette fin du XX^{e} siècle,le retour au raisonnement intuitif se fait pressant.L'analyse non standard,en réhabilitant les infiniment petits de Leibniz,le permet.Un grand effort se dessine vers la communication de mathématicien à mathématicien ou à une autre catégorie.L'usage de moyens audio-visuels,de bandes dessinées,contribue à l'émergence d'un nouveau langage pour la démonstration,plus attrayant.

2.L'enseignement de la démonstration et ses difficultés en Algérie

Un sondage auprès d'enseignants et inspecteurs de lycée a fait apparaître les difficultés suivantes d'apprentissage de la démonstration:

- savoir se poser des questions,
- maitriser les règles de la logique mathématique,
- avoir suffisamment d'instruments et de notions de base,
- savoir rédiger et comprendre des énoncés,
- avoir des capacités d'observation,d'analyse et de synthèse.

Quant aux difficultés d'enseignement de la démonstration,ce sont:

- l'absence de méthodologie,
- la pénurie de maîtres qualifiés,
- ne pas savoir réfléchir à haute voix devant les élèves,
- ne pas savoir utiliser les règles du débat scientifique.

Lors de deux tables rondes organisées autour de la démonstration,il a été remarqué que:

- une preuve n'est valable que pour un temps déterminé et pour une communauté donnée

- l'inconvénient du système éducatif actuel est de proposer aux élèves des situations problèmes types,des situations aseptisées,qui ne leur permettent pas une réflexion plus profonde.
- que veut dire enseigner la démonstration?C'est peut-être aider à produire un raisonnement,donc:apprendre à conjecturer,apprendre à traiter l'information,relever les indices qui permettent de traiter la conjecture,
- introduire l'algorithmique au lycée peut donner un autre élan à l'enseignement de la démonstration.

Ainsi l'accent est mis chez les enseignants sur la formulation du problème.A titre d'exemple,on peut citer le test de « l'âge du capitaine ».On peut aussi citer des raisonnements par récurrence qui ne débutent qu'à un rang élevé(2 ou plus),ce qui désarçonne l'apprenant.

On enseigne les cas d'égalité des triangles,et les cas d'inégalité?Un test chez les élèves de 8e année a montré que près de 90% pensent que deux triangles ayant les angles correspondants égaux sont égaux.

3.Conclusion

L'enseignement des mathématiques est basé sur l'apprentissage du raisonnement mathématique.Tout le monde s'accorde à dire qu'on n'apprend pas une démonstration.Et pourtant,l'archétype de certains examens(au baccalauréat,en Algérie,une enquête a révélé que,sur 10 ans,les questions se ressemblaient,seules les données changeaient)pousse l'apprenant à croire qu'il suffit d'apprendre.Il arrive souvent que,si l'on change le type de sujet,on voit des étudiants revenir,en rédigeant,et par un tour de passe-passe,à un type qui leur est plus familier(c'est l'histoire du candidat qui savait tout sur l'éléphant et qui subissait une question sur la fourmi;il a écrit:la fourmi est un animal très petit devant l'éléphant,mais l'éléphant est... et il raconta ce qu'il savait sur l'éléphant,oubliant l'insecte!).

Il faudrait habituer l'apprenant à des situations de rupture,afin qu'il puisse aiguiser son esprit d'observation et d'intuition,plus que son esprit de mémorisation,et cela dès le plus jeune âge.Justement,les moyens audio-visuels et informatiques le permettent.Mieux,l'influence de l'environnement peut être bénéfique,pour peu qu'elle soit canalisée sur les mécanismes du débat scientifique.

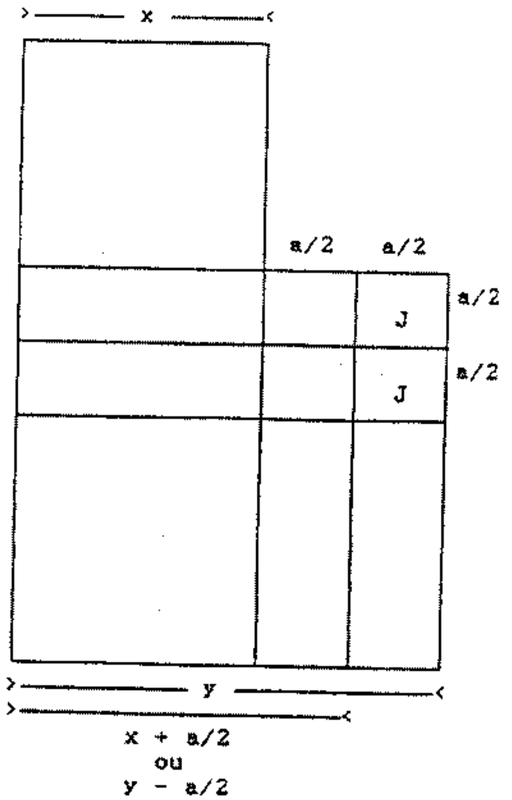
4.Bibliographie

[1] ARSAC G.: « *thèses contemporaines sur l'apparition de la démonstration dans les mathématiques* »,séminaire de didactique de mathématiques et d'informatique,IMAG,n° 61(1984-85).

[2] BARBIN E.: « *la démonstration mathématique,significations épistémologiques et questions didactiques* »,actes de l'Université d'Eté sur l'Histoire des Mathématiques,La Rochelle(1988)p 5-29.

[3] BERGGREN J.L.: « *proof,pedagogy,and the practice of mathematics in medieval islam* »,Interchange,vol.21,n° 1(1990) p 36-48.

[4] DHOMBRES J.: « *la rigueur mathématique:Euler et le XVIII^{è} siècle* »,IREM de Nantes.Sciences et Techniques en perspective,p 165-251.
[5] GUILLEMOT M.: « *à propos de la géométrie égyptienne des figures* »,IREM de Nantes.Sciences et Techniques en perspective,colloque d'Oran,vol.21(1992)p 125-146.
[6] JAOUICHE K.: « *la théorie des parallèles en pays d'Islam* »,livre,ed.Vrin(1986).
[7] LEVY T.: « *figures de l'infini* »,livre,éd. du Seuil(1987).
[8] MARTZLOFF J.C.: « *histoire des mathématiques chinoises* »,livre éd.Masson(1988).
[9] SELLAK B.: « *la pédagogie d'Ibrahim Ibn Sinane dans l'étude et la résolution des problèmes de géométrie* ».Sciences et Techniques en perspective,colloque d'Oran,vol.21(1992)p 93-100.

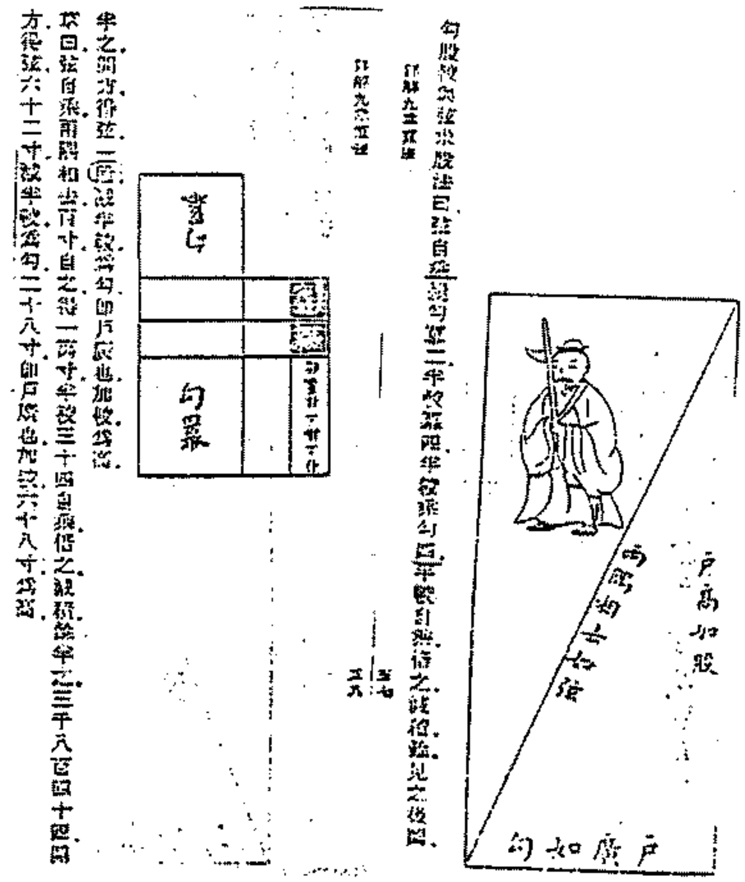


$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$y - x = a$$
$$z = d$$

$$(x + a/2)^2 = 1/2[d^2 - 2(a/2)^2]$$
$$(y - a/2)^2 = 1/2[d^2 - 2(a/2)^2]$$

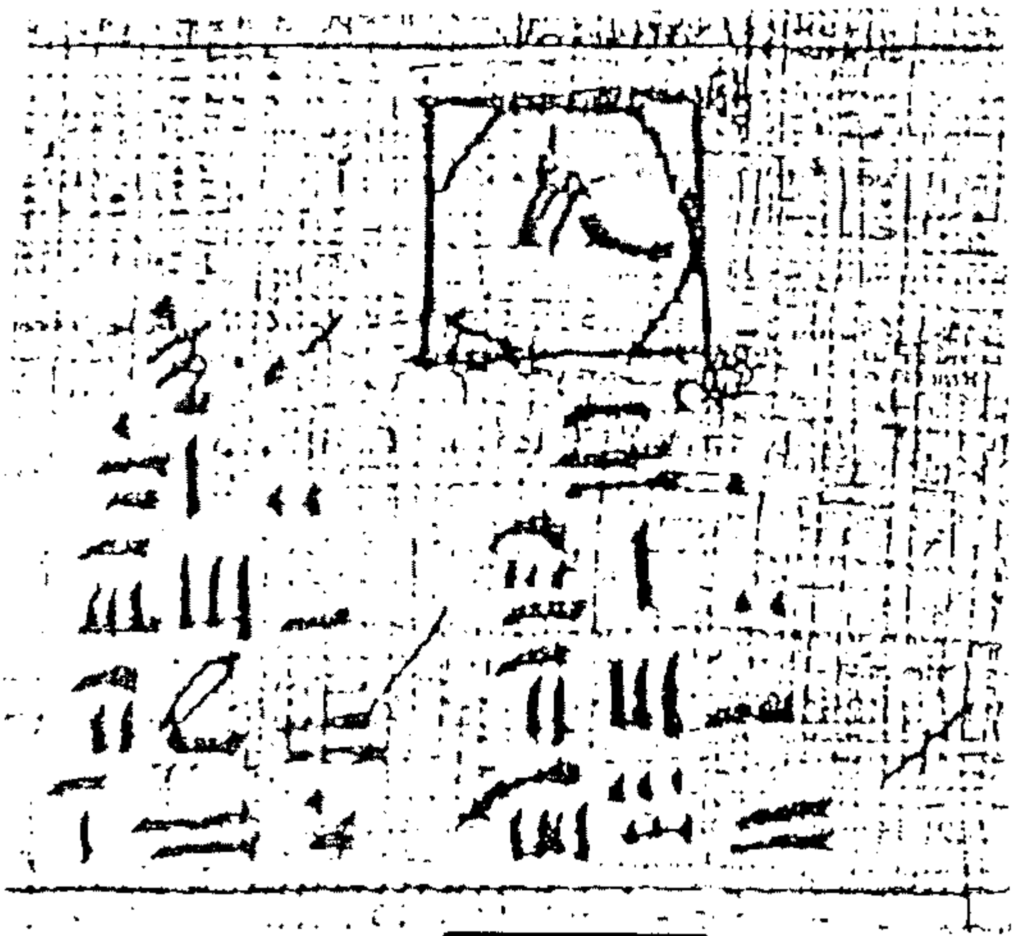
J = jaune

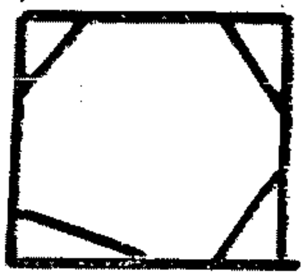
Le problème de la porte: interprétation de la figure 7



Le problème de la porte et sa solution
(Yang Hui, op. cit., *supra*, note 14)

R 48





↑
R 50

$\overline{9}$	1
$\overline{18}$	2
$\overline{36}$	4
$\overline{72}$	8
$\overline{81}$	total

$\overline{8}$	1
$\overline{16}$	2
$\overline{32}$	4
$\overline{64}$	8

A HISTÓRIA DOS PROBLEMAS-NARRATIVAS

Seiji Hariki, Universidade de São Paulo

Abstract

Problemas-narrativas são problemas de matemática que se apresentam na forma de narrativa, conto, ou estória, e se referem quase sempre a uma situação surrealista ou imaginária. Tais problemas, ao imergir o aprendiz no imaginário, libertam a sua racionalidade das amarras do mundo real, aguçando ao mesmo tempo a sua criatividade. É o inusitado da situação do problema ou de sua solução que exerce um notável fascínio sobre os aprendizes.

Na hipótese de que tais problemas são didaticamente importantes, aqui ilustramos o estudo dos problemas-narrativas, examinando alguns problemas particulares, com a técnica dos dois percursos: um percurso horizontal, pela análise das várias versões correntes do mesmo problema, e um mergulho vertical na história do problema, à procura de suas origens.

Introdução

Os problemas que aparecem nos livros-textos de matemática podem ser classificados em:

(i) problemas *puramente matemáticos* ou *descontextualizados*, que se referem apenas a objetos e situações matemáticos, como, por exemplo, "Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ no ponto correspondente a $x = 3$";

(ii) problemas *contextualizados*, que se referem a objetos ou situações que não fazem parte do universo matemático, como, por exemplo, "No interior da Terra, a força da gravidade é proporcional à distância ao centro. Se cavarmos um buraco através da Terra de pólo a pólo e deixarmos cair uma pedra no buraco, com que velocidade a pedra atingirá o centro da Terra?"

Existem vários tipos de problemas contextualizados: problemas aplicados na Física, Engenharia, Economia, Biologia, etc.; problemas da vida cotidiana, problemas históricos, problemas recreativos, etc. Aqui vamos estudar uma particular classe de problemas contextualizados, que chamaremos de problemas-narrativas.

Problemas-narrativas são problemas de matemática apresentados na forma de narrativa, conto, ou estória, e que se referem quase sempre a uma situação surrealista ou imaginária, como no exemplo citado acima, em que é preciso imaginar um buraco que atravesse o interior da Terra, de pólo a pólo.

Na primeira seção iremos estudar um particular problema-narrativa, à guisa de estudo de caso, procurando estimar a sua extensão e reconstruir a sua história.

Problema dos cinco homens e um macaco

Um exemplo típico de problema-narrativa é o *problema dos cinco homens e um macaco*, proposto no livro-texto, hoje considerado clássico, *A Survey of Modern Algebra*, de G. Birkhoff e S. Mac Lane:

On a desert island, five men and a monkey gather cocoanuts all day, then sleep. The first man awakens, and decides to take his share. He divides the cocoanuts into five equal shares, with one cocoanut left over. He gives the extra one to the monkey, hides his share, and goes to sleep. Later, the second man awakens and takes his fifth from the remaining pile; he too finds one extra and gives it to the monkey. Each of the remaining three men does likewise in turn. Find the minimum number of cocoanuts originally present.

Este é o único problema-narrativa desse livro "sério". Da singularidade desse fato nascem perguntas óbvias: Por que os autores propuseram esse problema aos leitores? Será que eles queriam apenas se divertir ou divertir os leitores? Foram eles que inventaram o problema ou ele é mais antigo?

Uma incursão em livros de Álgebra, Aritmética e Matemática Recreativa nos leva a descobrir que esse problema, ou um variante dele, aparece em outros livros.

Na coletânea de problemas *Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics* de Shklyarsky, Chentsov e Yaglom aparece a seguinte versão:

There were five friends one of whom had a monkey. Once they bought a bag of nuts and decided to share the nuts among themselves the next morning. At night one of them woke up. He divided the nuts into five equal parts, found that one extra nut remained after the division, gave it to the monkey, ate [sic] his part of the nuts and fell asleep again. After that another owner of the nuts woke up. He did not know that some of the nuts had been taken and therefore he divided all the nuts remaining in the bag into five equal parts. He also found that there remained one nut after the division which he gave to the monkey. He ate one of these five parts and fell asleep. Then the three remaining friends performed, in succession, the same operations, *that is, each of them divided the rest of the nuts into five parts not knowing what his friends had done, found that there remained one nut after the division, gave it to the monkey and ate one of the five parts.* ***Finally, in the morning all the five friends divided the remaining nuts into five parts, saw that there remained one nut after the sharing and gave it to the monkey.*** *It is required to determine the least possible number of the nuts in the bag for such a sharing be possible.*

Percebemos por esta versão que o enunciado do problema em Birkhoff e Mac Lane é incompleto. Além de corrigir o enunciado, os autores apresentam duas maneiras de resolver o problema: a primeira resolução utiliza a estratégia do raciocínio para trás; a outra resolução utiliza a estranha sugestão dada por Birkhoff e Mac Lane: "Try - 4 cocoanuts..."

No livro *Continued Fractions*, C.D. Olds apresenta uma variante do problema e afirma que ele é "of considerable age". Este autor, contrariamente a Shklyarsky, impõe a hipótese de que, na divisão da manhã seguinte, não sobra nenhuma noz para o macaco.

Uma versão bem humorada do problema aparece no livro de Averbach e Chein, *Mathematics: Problem Solving Through Recreational Mathematics*, contextualizada a uma situação de vida cotidiana americana do século 20:

Four boys were playing close to a bubble gum machine. Suddenly, Kevin knocked it over, the machine broke, and the bubble gum pieces rolled into a pile on the floor. The three older boys - Kevin, Esteban, and Tony - decided that they would split the gum four ways. They left Sean, the youngest, to watch over the pile while they went to get containers.
Kevin was the first to return. He counted the number of gum balls and found that, if the number were divided by four, there would be one left over. Feeling that he was entitled to the extra piece of gum (since, after all, it was he who knocked over the machine in the first place), Kevin took the extra piece plus one-fourth of the remaining gum and left.
Esteban, the oldest of the four, was the next to arrive. He counted the pieces of gum and again found there was one more than could be evenly divided among the boys. Sean was just about to tell him that Kevin had already taken his share, when Esteban said, "Since I'm the oldest, I get the extra piece. If you don't like it, I'll

punch you in the nose". Sean decide to keep his mouth shut. So Esteban took the extra piece of gum and one-fourth of the rest and left.
When Tony arrived, the scene was essentially the same. He, too, found one piece of gum too many to be divided between the four boys and decided to keep the extra piece for himself. He therefore took one gum ball and one-fourth of the remainder and left.
Sean gathered up the remaining pieces of gum and went home.
What was the smallest number of gumballs that could have been in the machine? Who got the best of the deal? Who got the worst?

Observemos que o enunciado acima tem o mesmo defeito que o de Birkhoff e Mac Lane, pois não diz se o número de chicletes de bola que sobrou para Sean é divisível por quatro ou não.

Hygino Domingues, em seu livro *Fundamentos de Aritmética*, talvez cansado de trabalhar com o problema do macaco, apresenta um problema parecido, afirmando que se trata de um "antigo problema chinês":

Um bando de 17 piratas, ao tentar dividir entre si, igualmente, as moedas de ouro de uma arca, verifica que 3 moedas sobrariam. Na discussão que se seguiu um dos piratas foi morto; na nova tentativa de divisão, já com um pirata a menos, desta feita 10 moedas sobrariam. Novo quiproquo e mais um pirata é morto. Mas agora, por fim, é possível dividir igualmente a fortuna entre eles. Qual o menor número de moedas que a arca poderia conter?

M. Kraitchik, por sua vez, afirma em seu livro *Mathematical Recreations*, que o problema do macaco tem origem na India. Na sua versão, são três homens que compram um monte de mangas e vão dormir.

Infelizmente, pela dificuldade de acesso às fontes primárias, a história do problema dos cinco homens e um macaco termina aqui.

Quanto ao interesse que este problema provoca, basta ler o relato que M. Gardner dá na revista Scientific American, 198, 1958, da repercussão que houve quando o problema apareceu no *The Saturday Evening Post* de 1926: mais de duas mil cartas na primeira semana pedindo ou apresentando a solução. Segundo Gardner, *"the* *problem of the coconuts is probably the most worked on and the least often solved of all the Diophantine brain-teasers".*

Fazendo uma rápida retrospectiva, observamos que (a) as versões de Shklyarsky e Olds corrigem e completam, do ponto de vista matemático, o enunciado do problema de Birkhoff e Mac Lane; (b) as versões de Averbach e Domingues fornecem variações que são interessantes do ponto de vista didático; (c) os textos de Domingues e Kraitchik nos dão algumas pistas para a reconstrução histórica do problema e (d) o artigo de Gardner nos revela o interesse que este problema desperta nos matemáticos amadores.

Outros problemas-narrativas

Vários outros problemas-narrativas, por serem interessantes tanto do ponto de vista matemático quanto do didático, merecem uma pesquisa histórica de suas origens e sua evolução ao longo dos séculos.

Por exemplo, o problema dos 35 camelos, que aparece no romance *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan:

"Somos irmãos - esclareceu o mais velho - e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas?"

O problema dos camelos, assim como o do macaco, tem uma resolução surpreendente. Provavelmente, é o inusitado das resoluções que torna os dois problemas-narrativas interessantes para os matemáticos profissionais, ao passo que, para os matemáticos amadores, talvez seja o inusitado das situações.

Quanto à história do problema dos camelos, há indicações de que ele tem origem árabe. Esta origem é apontada, por exemplo, por Boucheny, em seu livro *Curiosités et Récréations Mathématiques*, que apresenta uma variante mais pobre deste problema, em que são 17 os camelos a serem repartidos.

Além dos problemas-narrativas, que se contextualizam num mundo imaginário ou numa situação surrealista, há outros problemas "verbais", que, pelo excesso de "realismo" não classificaríamos de narrativas, e que são bastante populares. Por exemplo, o problema das torneiras: se uma torneira enche o tanque em a minutos e uma outra enche o mesmo tanque em b minutos, em quanto tempo as duas torneiras juntas encheriam o tanque?

Segundo o historiador D.E.Smith, este problema verbal é antiquíssimo, tendo aparecido pela primeira vez num livro de Heron, por volta do ano 100 d.C. e atravessou os séculos sofrendo diversas transformações em seu enunciado, algumas beirando o ridículo. Este problema continua até hoje a perturbar a cabeça dos adolescentes ...

História geral dos problemas-narrativas

Os problemas-narrativas não se constituem numa novidade pedagógica pois são tão antigos quanto a própria matemática. Por exemplo, já no Papiro de Rhind aparece um problema que poderíamos narrar, seguindo Oystein Ore, da seguinte maneira:

"A man's estate included seven houses, each house had seven cats, for each cat there were seven mice, for each mouse there were seven ears of wheat, and each ear would yield seven measures of grain. How many things did he possess, houses, cats, mices, ears, and measures all?

Este problema transformou-se numa *rhyme* conhecida por todas as crianças inglesas:

As I was going to St. Ives,
I met a man with seven wives
Every wife had seven sacks
Every sack had seven cats
Every cat had seven kits
Kits, cats, sacks, and wives
How many were going to St. Ives?

A história geral dos problemas-narrativas é uma necessidade cultural para os professores que trabalham com a estratégia da resolução de problemas.

Por outro lado, uma análise histórica e epistemológica desses problemas poderia nos revelar por que eles, apesar de suas inúmeras transformações, continuam vivos até hoje, a desafiar os jovens aprendizes.

Conjecturamos que os problemas-narrativas, por não se "aplicarem" ao mundo real, acendem o imaginário dos aprendizes, que se sentem desinibidos e aptos a utilizar a sua racionalidade na resolução do problema. Em outras palavras, problemas contextualizados no imaginário são mais atraentes, divertidos, envolventes, e portanto didaticamente mais eficientes, do que os problemas aplicados ao mundo real, ao contrário do que muitos educadores "progressistas" julgam.

Conclusões

Nesta comunicação procuramos estabelecer um elo entre a educação matemática e a história e epistemologia da matemática, através da introdução do conceito de problema-narrativa.

Por um lado, chamamos a atenção dos historiadores e epistemólogos da matemática para a enorme carência de informações quanto à história e à análise epistemológica dos problemas-narrativas.

Por outro lado, instauramos uma distinção didática entre os problemas contextualizados: (i) os que se contextualizam no mundo real, por meio de aplicações (ou pseudo-aplicações) na vida prática e em outros ramos do conhecimento, e (ii) os problemas-narrativas, que se contextualizam no mundo imaginário ou surrealista, por meio de uma experiência mental ou imaginada.

Defendemos o ponto de vista que os problemas-narrativas fazem os estudantes imergirem no imaginário, mundo em que a razão perde a inibição, e a criatividade se aguça. A característica básica dos problemas-narrativas é o inusitado: na situação do problema, na sua pergunta, ou na sua solução. É esse inusitado que fascina os aprendizes de matemática e é em nome desse fascínio que se deve dar, na educação matemática, uma atenção privilegiada para os problemas-narrativas.

Bibliografia

Averbach, B. e Chein, O., *Mathematics: Problem Solving Through Recreational Mathematics*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.

Birkhoff, G. e Mac Lane, S., *A Survey of Modern Algebra*, revised edition, The Macmillan Company, New York, 1953.
Boucheny, G., *Curiosités et Récréations Mathématiques*, Librairie Larousse, Paris, sem data.
Domingues, H.H., *Fundamentos de Aritmética*, Atual Editora, São Paulo, 1991.
Kraitchik, M., *Mathematical Recreations*, Dover, New York, 1953.
Olds, C.D., *Continued Fractions*, The Mathematical Association of America, New York, 1963.
Ore, O., *Number Theory and Its History*, Dover, New York, 1988.
Shklyarsky, D.O, Chentsov, N.N. e Yaglom, I.M., *Selected Problems and Theorems in Elementary Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1979.
Smith, D.E., On the origin of certain typical problems, Amer. Math. Monthly, 24, 1917, 64-71.
Tahan, M., *O Homem que Calculava*, Conquista, Rio de Janeiro, 1975.

CHRISTIAN WOLFF (1679-1754) E SUA CONTRIBUIÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Dr. Sergio Nobre, Unesp- Brasil

Abstract: Christian Wolff was a great German philosopher of the first half of the XVIIIth century. He was one a most prominent disciple of G. W. Leibniz (1646-1716), and a follower of his philosophical ideas. In the field of the Mathematics, Wolff is not known as a creator, but his role on the diffusion of the Mathematics of his time in Germany must be preserved in the History of Mathematics. His mathematical work consists of some papers, written as he was at the University of Leipzig, some books and a mathematical encyclopaedia. With the purpose that his books could be read by those who had not mastered the scientific language of the time, Wolff wrote his main mathematical books in German, and many mathematical concepts which were usually presented in Latin or French, were translated and are still in use. His scholar book, named "Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften" (1710) - the most important mathematical book in Germany during the first half of the 18th century (specifically the first chapter "Kurzer Unterricht von der Mathematischen Methode, oder Lehr-Art"), is the main subject of this article. The chapter "Kurzer Unterricht von der Mathematischen Methode, oder Lehr-Art" (Brief lecture about the mathematical method) was written as an introdution to the mathematical book. It is a methodological treatise about the mathematics at the time of the beginning of the differential calculus. In it, Wolff explains his point of view about Mathematics and its applications, and introduces Mathematics to the readers with explanations for new mathematical words and conceptions (for example: what is a definition? what is a theorem?, what is a demonstration?, etc...). This book, particularly Wolff's mathematical method, has been a great influence on European Mathematics Education. With the translation into other european languages, Wolff's educational ideas have been made available outside Germany. Also in Portugal and Spain, it has been noticed the use of the Latin translation of the Christian Wolff's scholar book.

INTRODUÇÃO

Por sua atividade no início do movimento iluminista, o filósofo e matemático Christian Wolff sustenta, nos dias de hoje, o título de "Filósofo do Iluminismo na Alemanha". No entanto, por não ser considerado um "criador" em Matemática, ele não recebe o merecido tratamento por parte dos historiadores da Matemática. Mas o desenvolvimento histórico da Ciência, em especial da Matemática, não pode ser fundamentado somente no desenvolvimento de seus conceitos. Existe toda uma relação entre estes e aquilo que contribuiu para suas existências. Neste sentido, é de extrema importância histórica o resgate daqueles que contribuíram de forma indireta para que a Ciência pudesse crescer e chegar aos patamares de hoje. Christian Wolff pertence ao rol dos que contribuíram para isto. Filho do curtidor protestante CHRISTOPH WOLFF e de sua mulher ANA, Wolff nasceu em 24 de janeiro de 1679 na cidade de Breslau (hoje sua mulher ANA, Wolff nasceu em 24 de janeiro de 1679 na cidade de Breslau (hoje Wroclaw - Polônia). Estudou Teologia na Universidade de Jena, realizou estudos em Filosofia na Universidade de Leipzig, onde trabalhou como adjunto na Faculdade de Filosofia. Por recomendação de seu mestre e amigo G. W. LEIBNIZ (1646-1716), Wolff assumiu em 1706 a cátedra de Matemática na Universidade de Halle, onde, a partir de 1709, também assumiu a responsabilidade das aulas de Filosofia. Sob a acusação de ser "inimigo da religião" e "determinista", Wolff foi expulso do país (então Brandenburgo-Prússia) em 1723 e foi trabalhar como Professor de Filosofia na Universidade de Marburg. Em 1740, com a subida ao Trono da Prússia de FREDERICO II (1712-1786), e por possíveis influências de VOLTAIRE (1694-1778), então amigo de ambos, Wolff recupera seu posto em Halle e, poucos anos depois, passa a ser o Chanceler da Universidade. Em 1745, Christian Wolff foi honrado com o título de Barão pelo príncipe MAXIMILIAN JOSEPH DA BAVIERA. Wolff foi membro da Academia de Ciências de Berlin, da Royal Society de Londres e da Academia de Paris. Também foi Professor Honorário da Academia Imperial de São Petersburgo. Christian Wolff morreu em 09 de abril de 1754 na cidade de Halle.

A PRINCIPAL OBRA MATEMÁTICA DE CHRISTIAN WOLFF

Quando se fala em divulgação e popularização da Ciência, Wolff foi um pioneiro na Alemanha. Foi ele quem deu a primeira aula de Matemática falada em alemão em uma universidade alemã. Contrariando as indicações acadêmicas da época, onde predominava o latim como língua oficial, ele também escreve seus principais livros de Matemática em língua alemã. Sua principal obra foi o texto escolar "*Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*" (Princípios Básicos de todas as Ciências Matemáticas), publicado em quatro volumes e sua primeira edição é do ano de 1710. A importância deste livro é reconhecida pela quantidade de edições que ele teve no decorrer do século XVIII. Foram 11 edições até o ano 1800, sendo que, na primeira metade do século, ele foi praticamente o único livro escolar de Matemática na Alemanha. Sua divulgação e utilização deu-se também fora da Alemanha, tendo sido traduzido para o holandês, o polonês, o russo e o sueco. O "*Anfangsgründe* ..." está dividido em quatro capítulos, cujos conteúdos compreendem muito mais do que, nos dias de hoje, nós entendemos por Matemática:

> **I**: Sobre o método pedagógico para a Matemática, Aritmética, Geometria, Trigonometria e Arquitetura.
>
> **II**: Artilharia, Fortificação, Mecânica, Hidrostática, Aerometria e Hidráulica.
>
> **III**: Óptica, Reflexão, Perspectiva, Trigonometria esférica, Astronomia, Cronologia, Geografia e Relógios de Sol.

IV: Álgebra (Cálculo Diferencial e Integral), Aplicações da Álgebra, Seleção de Textos Matemáticos (História da Matemática), Tábuas Trigonométricas e de Raizes.

Como se verifica, a apresentação da Matemática se faz de maneira ampla e atual para a época. O melhor exemplo da atualidade do livro é a parte dedicada ao Cálculo Diferencial de Integral, o grande assunto matemático de então. Um outro assunto tratado por Wolff, e que também possui um certo pioneirismo, é a História da Matemática. Deve-se considerar que a História da Matemática ainda não havia surgido nos meios acadêmicos. O primeiro texto específico sobre o tema fora publicado somente em 1758 por J. E. MONTUCLA (1725-1799). Estes textos de Wolff confirmam, por si só, seu mérito para a História da Matemática. O texto sobre o Cálculo Diferencial foi um dos primeiros a serem publicados em forma de livro didático após o pioneirismo do MARQUÊS DE L'HOSPITAL (1661-1704) com seu *Analyse des infiniment petits* de 1696. O tratado sobre História da Matemática é um dos raros documentos sobre o tema que foram publicados no início do século XVIII. Para a Historiografia da Matemática, este texto vem a ser muito importante, pois possui informações sobre a época que se perderam com o decorrer dos tempos. Porém, não é sobre estas obras de Wolff que iremos nos ocupar neste trabalho. Nossa preocupação é destacar Christian Wolff como incentivador do movimento pela Educação Matemática e, especificamente sobre este tema, foi dedicado toda a parte introdutória de seu livro:

AULA SOBRE OS MÉTODOS MATEMÁTICOS, OU SEU ENSINO

O Texto "*Kurzer Unterricht Von Der Mathematischen oder Lehr-Art*" é parte integrante do capítulo I do livro "*Anfangsgründe* ...". Como o próprio título diz, a preocupação do autor está voltada aos métodos matemáticos e sua forma de ser ensinado. Em sua introdução, Wolff ressalta que "... não existe no Ensino da Matemática uma rigorosa atenção sobre sua certeza e o reconhecimento de suas contradições, porém, aprende-se Matemática com vistas à sua rápida aplicação em outras Ciências. Esta aplicação é suficiente para todos aqueles que, durante toda a sua vida, nada necessitarão saber sobre as Verdades Matemáticas."[1] No entanto, completa Wolff, é importante que se tenha a preocupação com as Verdades Matemáticas quando se for ensinar Matemática e recomenda-la para os estudantes. Como fundamentação teórica aos seus estudos, Wolff cita três autores: JOHN LOCKE (1632-1704), NICOLE MALEBRANCHE (1638-1715) e EHRENFRIED W. TSCHIRNHAUS (1651-1708), sendo este último, e sua obra "*Medicina mentis* ..." de 1687, sua principal fonte inspiradora.

Preocupado com a compreensão dos leitores daquilo que viria a ser introduzido nos capítulos posteriores, Christian Wolff faz um verdadeiro tratado explicativo sobre os "elementos matemáticos" que aparecem no decorrer de um texto matemático e que, raramente são explicados. Deve-se ressaltar que ainda nos dias de hoje esta prática não

---

[1] Kurzer Unterricht ... - Vorrede (tradução do autor)

é evidenciada. Publicado inicialmente em 1710, o texto retrata a preocupação de Wolff em tornar o conhecimento científico, neste caso o conhecimento matemático, mais acessível aos não iniciados e não especialistas na área[2]. Muitas de suas explicações são, naturalmente, de interpretações discutíveis, no entanto demonstra sua sensibilidade e ousadia em tentar esboçar um assunto que, na maioria das vezes, não é aprofundado por aqueles que se ocupam com a Matemática. Para estes, os temas apresentados e discutidos por Wolff são considerados inerentes ao Conhecimento Matemático e, portanto, não carecem de explicações. Wolff inicia seu texto dizendo:

> "O método para se explicar a Matemática inicia-se com as **Definições** que são acompanhadas dos **Axiomas**. Destes surgem os **Teoremas** e **Exercícios**: em geral, dependendo da ocasião, aparecem **Complementos** e **Observações**"

Cada termo novo, recebe uma explicação específica e, muitas vezes, é desmembrado para que sua compreensão possa ser o mais ampla possível[3]:

> "**Definições** aparecem em duas formas: **Definições Nominais** (definições de palavras) e **Definições Reais** (definições de 'coisas'[4])."
>
> "**Definições Nominais** são aquelas que indicam algumas características e nomes, com as quais as **'Coisas'** são reconhecidas. Na Geometria é dito: Um Quadrado é uma figura que possui quatro lados e quatro ângulos iguais"
>
> "**Definições Reais** são claros e precisos **Conceitos** sobre a arte e a forma de como as 'Coisas' são. Na Geometria é dito: Um circulo é traçado quando uma linha reta movimenta-se em torno de um ponto fixo"

À medida que vão aparecendo novos termos, Wolff prontifica-se em explica-los. Como é o caso do novo termo surgido acima **"conceito"**. Como decorrência da explicação deste termo, surgem outras explicações pormenorizadas, como por exemplo: Sobre "Conceitos Claros Não-Claros", sobre a idéia de que "Um Conceito deve ser preciso, completo e não confuso". Após as explicações sobre a forma de como devem aparecer os **Conceitos Matemáticos**, Wolff completa:

---

2 Ainda nesta linha, Wolff publica em 1716 uma Enciclopédia Matemática, onde muitos termos matemáticos, então escritos em Latim, são traduzidos para o alemão e explicados.

3 Todas as traduções do alemão para o português são do autor.

4 Coisas no sentido de "entes matemáticos"

> "Todos os assuntos nas Ciências Matemáticas devem ser tratados a partir de conceitos precisos e completos e acompanhados de suas respectivas definições"

Ainda após algumas considerações sobre as Definições, sempre com o cuidado de que estas não sejam mal colocadas para não serem mal interpretadas, Wolff explica o que é um Axioma e o porque ele não requer demonstração.

> "As Definições podem ser comparadas entre si próprias ou com outras. A ser considerado é o que está contido nas Definições e que leva diretamente a conclusões. Isto é chamado de **Axioma**. Por Exemplo: Quando, a partir de uma Definição, tem-se que a linha, que se movimenta em volta de um ponto central, possui sempre o mesmo comprimento, logo entende-se que todas as linhas, as quais são extraidas do ponto central até a periferia, são iguais. Esta verdade é um **Axioma.**"
>
> "Porque o **Axioma** é retirado diretamente da **Definição**, eles não precisam necessariamente serem demonstrados, pois sua verdade flui claramente a partir da contemplação dela. Não se pode, portanto, estar seguro se o Axioma é verdadeiro ou não, até se ter pesquisado as possibilidades das Definições."

Para se ter a segurança de que um Axioma é verdadeiro ou não, Wolff evidencia a necessidade de se ter "experiência sobre o tema", e, embora ingenuamente, até exemplifica: "Eu vejo que, quando uma luz está acesa, todas as coisas ao meu redor estarão iluminadas. Esta intuição é chamada de 'experiência'". As explicações sobre esta "experiência" se seguem, sempre pormenorizadas, até o aparecimento do **Teorema**:

> "Quando se compara diferentes Definições, umas com as outras e, a partir disto, se conclui que foi impossível se ter um reconhecimento através destas considerações isoladas, então isto é chamado de **Teorema.** Por exemplo: Quando se compara um triângulo com um paralelogramo, os quais possuem mesmas bases e mesmas alturas e, nesta comparação, em partes imediatamente pela Definição das áreas e em partes através de outras qualidades, as quais foram achadas a partir de Definições anteriores, conclui-se que o triângulo possui a metade do tamanho do paralelogramo. A sentença: **o triângulo é a metade de um paralelogramo de mesma base e mesma altura**, é um **Teorema**."

A complexidade de se explicar estes conceitos matemáticos, faz com que Wolff utilize o recurso dos exemplos, pois suas explanações são tão confusas quanto os próprios significados de alguns termos o são. A série de explicações sobre termos matemáticos continua de forma progressiva. Depois do **Teorema**, vem a **Demonstração** ... Christian

Wolff esboça suas ideias para as **Demonstrações** através de explicações sobre sua natureza e suas fundamentações. Para concluir, apresentamos algumas poucas considerações de Wolff sobre o que é um **Exercício** em Matemática:

> "Os **Exercícios** tratam sobre algo feito ou que deve ser feito e são divididos em três partes: **Sentença, Resolução e Demonstração**. Na **Sentença** acontece a explanação daquilo que deva ser feito. A **Resolução** explica, passo a passo, tudo o que precisa ser feito. Com isto chega-se à conclusão. Finalmente a **Demonstração** realiza-se, necessariamente quando obtém tudo o que se pede na **Sentença**."

CONCLUSÃO

Apesar das dificuldades em explicar os conceitos matemáticos, Christian Wolff foi ousado quando se propôs a fazê-lo. Isto está intimamente ligado à sua forma filosófica de analisar as questões acadêmicas. Seus ideais filosóficos, que tanto lhe causaram problemas, estão, em grande parte, fundamentados naquilo que, algumas décadas mais tarde, seriam encampados pelos grandes filósofos franceses e que culmina com o pensamento da Revolução Francesa. As questões relativas à Matemática abordadas por Wolff no início do século XVIII, marcam sua irreverência ao tratar sobre o assunto. Seu texto aqui apresentado é, sem sombra de dúvidas, um dos únicos existentes que tratam deste assunto. Sua contribuição para a Educação Matemática se dá, além de outras coisas, principalmente pela forma de como ele a assume. Um grande exemplo sobre sua importância está no fato de seus livros terem sido editados até o final do século XVIII e também terem ultrapassado as fronteiras da Alemanha, tendo chegado inclusive na Espanha e Portugal.

BIBLIOGRAFIA

GERLACH, H.M.(ed.), 1980. *Halleschen Wolff-Kolloquium 1979 anläßlich der 300. Wiederkehr seines Geburtstages: Christian Wolff als Philosoph der Aufklärung in Deutschland*, Beiträge zur Universitätsgeschichte, Halle.

NOBRE, Sergio, 1994. *Über die Mathematik in Zedlers "Universal-Lexicon" (1732-1754): Ein historisch-kritischer Vergleich mit der Mathematik bei Christian Wolff*, Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades, Universität Leipzig, Leipzig.

NOBRE, Sergio, 1994. La contribuición de Christian Wolff (1679-1754) a la popularización de las matemáticas en la primera mitad del siglo XVIII, em *Mathesis*, vol. X, nº 2, pag. 153-169.

WOLFF, Christian, 1710. *Der Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften*, Halle im Magdeburgischen, Rengerische Buchhandlung.

Der
Anfangs-Gründe
Aller
Mathematischen
Wissenschafften
Erster Theil/
Welcher
Einen Unterricht
Von
Der Mathematischen Lehr-Art/
die Rechen-Kunst/Geometrie/Trigono-
metrie / und Bau-Kunst in sich
enthält/
Und zu mehrerem Auffnehmen der Ma-
thematick so wohl auff hohen als niedri-
gen Schulen auffgesetzet worden
Von
Christian Wolffen/
Mathem. Prof. P. O. auff der Königl. Preußischen
Friederichs-Universität zu Halle.

Halle im Magdeburgischen A. MDCCX.
Zufinden in Rengerischer Buchhandlung.

Capa do Texto "Kurzer Unterricht ..."

STYLES DE TRAVAIL : RELATIONS ENTRE L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE ET L'ÉPISTÉMOLOGIE

Teresa Assude, Laboratoire LEIBNIZ - IMAG, Grenoble

1. Poser notre questionnement

Un des problèmes de l'éducation mathématique est celui du sens de l'activité mathématique. Dans leur livre intitulé *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, R.Bkouche, B. Charlot et N.Rouche écrivent dans l'Avant-propos ([1]) :

> "Ce livre se veut donc une réflexion fondamentale sur les mathématiques, leur construction, leur enseignement, leur apprentissage, avec, comme horizon permanent, les pratiques dans les classes et, comme conviction profonde, celle que le plaisir de faire des maths naît du sens de l'activité mathématique elle-même. Cette question du sens était au coeur du débat sur les mathématiques modernes. Elle est aujourd'hui, et sera demain, au coeur des débats sur le rôle que l'enseignement des mathématiques peut jouer face aux défis culturels nouveaux que doivent affronter les sociétés industrielles."

Cette question du sens est bien présente dans les préoccupations de ceux qui pensent sur l'enseignement des mathématiques et le problème est alors : comment faire pour que les élèves construisent un sens personnel aux activités mathématiques ? Ce problème peut être formulé en d'autres termes : par exemple, en prenant la distinction faite par Léontiev et Vygostsky entre signification et sens, les auteurs cités précédemment écrivent (idem, p.244) :

> "Signification épistémologique de l'activité mathématique et sens personnel et social de l'apprentissage des mathématiques pour un élève : telles devraient être les deux questions préalables à toute réflexion et recherche pédagogique et didactique sur l'apprentissage des mathématiques. Quelles pratiques pédagogiques, fondées sur quelles significations épistémologiques, peuvent donner sens à l'apprentissage mathématique ? Quel sens des mathématiques dans l'institution scolaire et dans la société permet d'engager l'élève dans une activité mathématique, qui sera soutenue par la signification qu'il y trouve ?"

La question de ce passage entre signification sociale, culturelle ou épistémologique et sens personnel correspond à ce que nous avons appelé "transposition du sens" ce qui indique aussi qu'il n'y a pas de correspondance univoque entre l'une et l'autre mais une détermination très étroite qui peut même être réciproque. Ce passage n'est pas évident et voyons comment nous pouvons le problématiser.

---

[1] Bkouche R, Charlot B et Rouche N (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Armand Colin, Paris

2. "Transposition d'un style de travail"

La plupart des personnes qui ont réflechi sur ce problème se sont penchés, implicite ou explicitement, sur une analyse épistémologique de ce qu'est l'activité mathématique et la nature des mathématiques : qu'est-ce que "faire des mathématiques" ? La réponse à cette question va être déterminante pour les propositions que les uns et autres font pour l'enseignement des mathématiques. Les professeurs des mathématiques n'echappent pas non plus à cette analyse de ce qu'est l'activité mathématique même s'ils ne le font pas toujours explicitement. Lors d'un questionnaire que nous avons fait auprès de 58 professeurs-stagiaires il sort que certains ne se sont jamais posé cette question mais ils ont des conceptions très orientées de ce qu'ils doivent proposer aux élèves comme activités. Ces orientations sont, en partie, déterminées par leurs conceptions de ce qu'est l'activité mathématique comme nous l'avons vérifié dans leurs réponses. Nous n'analyserons pas ici ces réponses comme nous ne montrerons pas les résultats des travaux faits sur ce thème.

De notre point de vue, la question de la "transposition du sens" peut être abordée par une "transposition d'un style de travail". Précisons ce que nous voulons dire. Nous parlons de "style de travail" quand il y a à propos des objets de savoir la mise en évidence d'un certain travail à réaliser qui va servir de noyau organisateur de l'activité mathématique. Ainsi, on va dire "faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes" comme Polya ou tous les auteurs concernés par le "problem solving", ou alors on met en valeur l'importance de "se poser des bonnes questions" (Brousseau, débat scientifique) , ou encore on mettra l'accent sur la "modélisation" (comme Chevallard ou les auteurs anglo-saxons du "mathematical modelling") ou sur la "communication" ou sur "l'analyse réflexive" ou encore sur l'importance dans la résolution de problèmes d'une dialectique entre outil et objet (Douady).

Ces différents aspects de l'activité mathématique sont différents *styles de travail* que les uns et les autres vont choisir comme point d'entrée privilégié pour l'activité d'un sujet lorqu'il est en prise avec les mathématiques. Ceci ne veut pas dire que les différents "styles de travail" que nous avons indiqués soient les seuls et qu'il y ait une correspondance univoque entre un auteur et un style de travail. Toutefois il peut y avoir des tendances chez les uns et les autres qui structurent leurs modèles.

Ainsi, la "transposition d'un style de travail" est un instrument d'analyse de la "transposition du sens" car le "style de travail" des mathématiciens va être proposé comme le style de travail dont les élèves *doivent faire l'expérience* pour qu'ils puissent attribuer un sens (c'est-à-dire pour que la signification devienne sens personnel) à ce qu'ils font. Autrement dit, il nous semble qu'on peut définir ce problème de différents points de vue parmi lesquels celui du style de travail, ce qui nous donne aussi un ancrage privilégié dans le traitement de notre problème. Cet ancrage permet notamment de pouvoir regarder avec les mêmes outils des modèles différents du fonctionnement du système didactique même s'il ne font pas référence explicite au problème du "sens". Voyons quelques exemples.

3. Petit parcours chez les didacticiens

Guy Brousseau écrit dans l'article *Les objets de la didactique des mathématiques*([2]):

> "mise en évidence d'une part, de la nécessité pour la connaissance, de fonctionner comme solution de problème afin qu'elle ait un sens et qu'elle soit opératoire, et d'autre part, du *phénomène d'économie* : si une connaissance enseignée - ou découverte - s'exerce et prend son sens comme solution d'un ensemble de problèmes, une tendance à l'économie conduira l'élève à ne retenir ou à ne concevoir d'elle que ce qui est nécessaire aux solutions de *ces* problèmes"

Nous voyons apparaître là le sens associé à la connaissance censée être l'enjeu de la situation. Pour Brousseau, le sens est associé à la situation-problème. Citons-le encore ([3]) :

> "Les *situations problématiques* sont celles qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en oeuvre de choix ou d'actions dont il a la responsabilité.
>
> 3.2.1. *Situations quasi-isolées*
>
> La première condition est que cette responsabilité n'est pas, pendant un certain temps, partagée avec le système éducatif (avec le maître) elle peut l'être avec des condisciples par exemple mais le système est provisoirement quasi-isolé du point de vue de l'information. La dévolution du problème à l'élève se fait le plus souvent par la communication d'un *énoncé* explicite mais *le problème comme sens* pour l'élève est composé de bien d'autres informations et de bien d'autres limitations. D'ailleurs le sens du problème pour le professeur est fort différent lui aussi."

La transposition du sens est, pour Brousseau, non seulement une transposition du style de travail par la résolution de situations-problèmes, mais aussi ce qu'il appelle une dévolution de la responsabilité envers l'élève de ce même problème. Cette dévolution ne concerne pas seulement la donnée de l'énoncé du problème mais est plus globale car problème et sens sont alors indissociables. Remarquons une subtilité dans le langage utilisé : "le problème comme sens pour l'élève" et "le sens du problème pour le professeur". Cette distinction montre que l'enjeu du problème n'est pas le même pour l'élève et pour le professeur. Ce qui fait la différence est que, pour l'élève, la situation doit poser problème et c'est parce qu'elle pose problème qu'elle peut avoir, dans un processus, du sens pour lui. Nous retrouvons là une hypothèse de

---

[2] Brousseau G (1982), Les objets de la didactique des mathématiques, Seconde Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Ecole d'Educateurs Spécialisés, Olivet, p.29.
[3] Idem, pp. 40-41.

travail très forte qui correspond à un certain style de travail qu'on peut identifier comme "l'activité mathématique pour l'élève doit comporter des phases personnelles de confrontation à une situation qui pose de réels problèmes" et ce sont ces problèmes rencontrés qui seront porteurs de sens pour l'élève. Faisons-nous une hasardeuse hypothèse en disant que la situation-problématique est aussi importante dans son caractère nécessaire pour que la connaissance envisagée apparaisse comme solution que dans son caractère problématique qui est déjà par lui -même porteur de sens ? Il nous semble que cet aspect n'est pas suffisamment mis en évidence dans les travaux sur la théorie des situations. Un symptôme de ce fait est la presque disparition du mot "situation-problématique" au profit d'autres désignations qui mettent, elles, l'accent sur d'autres aspects.

Yves Chevallard, à propos de la modélisation, écrit [4] :

> "Il existe aujourd'hui en divers pays, et notamment aux Etats-Unis, un mouvement, attesté par de nombreuses publications, en faveur de l'enseignement de la **modélisation**, ou, encore, de l'enseignement des mathématiques (et en particulier des mathématiques appliquées) **par la modélisation**."

Un peu plus loin [5] :

> "A rebours de "l'enseignement des modèles" (ou "par des modèles"), l'activité de modélisation semblerait mieux admise par les mathématiciens (parce qu'elle se rapproche de l'activité mathématique savante, dans laquelle la "modélisation" existe aussi, même si elle porte sur une réalité elle-même mathématique.)"

Là, comme dans les citations de Brousseau, nous observons que les activités de modélisation qui sont par la suite proposées aux élèves sont légitimées par l'existence dans la sphère savante (et pas seulement) de ce "style de travail". Même si Chevallard ne réfère pas les élèves explicitement, le problème de la "transposition du sens" est quand même posé mais par le biais des conditions et contraintes qui permettent l'existence de ce style de travail dans un système d'enseignement tel qu'il existe actuellement. C'est ce qu'il explicite dans la citation suivante [6] :

> "Le projet de recherche ici présenté vise en premier lieu à étudier les conditions d'une introduction, dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire (dans le cadre des collèges), d'un langage algébrique minimum, l'emploi de **paramètres**. Cette introduction, nous l'avons souligné, n'est bien entendu pas gratuite. Elle commande, comme on l'a vu, le projet de réinscription dans les pratiques scolaires de la résolution de problèmes et, pour parler un langage plus actuel, de la pratique de la

[4] Chevallard Y (1989), Arithmétique, Algèbre, Modélisation, Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille n°16, pp.145-146.
[5] idem, p.147.
[6] idem,p.159.

> **modélisation** : une formule, en effet, n'est rien d'autre qu'un modèle. En même temps, cette introduction doit être envisagée dans la perspective même de la pratique de la résolution de problèmes, de la modélisation (de la construction de formules), et de l'emploi de ces formules par le biais de l'étude de fonctions - processus solidaire que le langage algébrique ainsi entendu permet de mener à bien."

Chevallard met lui aussi l'accent sur le style de travail "résolution de problèmes" tout en ajoutant que cela permet de revivifier le travail algébrique pour qu'il ne soit pas vu d'un seul point de vue formel mais aussi fonctionnel. Cette articulation du formel et du fonctionnel dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire est aussi mise en valeur par une analyse épistémologique faite par Bkouche ([7]) :

> "Algébrisation et formalisation apparaissent ainsi comme l'élimination du sens, l'élimination du contenu au profit de la forme (...) Mais cette élimination du sens n'a de sens que parce qu'elle intervient comme méthode (...), parce qu'elle permet la résolution des problèmes, d'une part des problèmes posés antérieurement à la formalisation et que celle-ci permettra de *bien poser* et ainsi de mieux maîtriser (avec le risque de déplacement que cela peut poser), d'autre part des problèmes posés par la formalisation elle-même, tant dans la mise en place des liens entre le problème initial et ses diverses reformulations (traditionnellement la mise en équation et l'interprétation des résultats) que dans la conduite effective des opérations dans le cadre formel ainsi construit.
>
> Cette prise en compte de la signification de l'élimination du sens est essentielle si l'on veut comprendre la place de l'algébrisation et de la formalisation dans l'activité mathématique (et plus généralement scientifique), en particulier en ce qui concerne l'enseignement."

Commentons un peu cette citation. Là aussi, l'auteur met l'accent sur l'activité du mathématicien avant de faire référence à l'enseignement. Le style de travail ici concerne la réduction de sens qui a lieu dans l'étude d'un domaine de réalité lorsqu'on l'étudie ou on le modélise. Et cette réduction de sens, qui dans le cas de l'algébrisation peut aller jusqu'à l'élimination du sens, est elle aussi porteuse de sens, ce qui n'est plus le cas dans l'enseignement au Collège en France ([8]) d"où les commentaires assez répandus dans la noosphère sur l'enseignement de formalismes vides auxquels les élèves n'arrivent pas attribuer un sens. La modélisation ou la résolution de problèmes peut être un moyen pour donner un sens à cette réduction de sens. On observe ici que la transposition d'un style de travail comporte (ou devrait comporter) des aspects moins explicites de l'activité mathématique si on veut "conserver" une certaine signification sociale et culturelle des savoirs à enseigner. Cependant les processus de transposition didactique, malgré la vigilance

[7] livre cité dans la note 1, p.72.

[8]. Les élèves du Collège ont, en moyenne, entre 11 et 15 ans.

épistémologique, n'évitent pas une nécessaire réduction du "sens" relativement à l'activité du mathématicien, ne serait-ce que parce que celle-ci ne se laisse pas définir simplement.

D'autres exemples pourraient être donnés mais nous ne le ferons pas ici.

4. Typologie frustre des styles de travail

Une des catégories de style de travail est la "résolution de problèmes" qui est très fréquente aujourd'hui dans un certain nombre d'enseignants mais qui était presque absente il y a quelques années au moins dans l'enseignement secondaire. Les conditions de possibilité de ce style de travail est un autre problème et ce n'est pas toujours évident de laisser prendre le temps aux élèves pour qu'ils puissent vraiment s'y investir, passer par des phases de tatônnement, des phases de conjectures et des preuves, etc. Le temps de l'enseignement n'est pas le temps de l'apprentissage et la gestion des deux n'est pas toujours évidente pour l'enseignant.

D'autres styles de travail sont : "se poser des questions", ou "communiquer dans une sorte de communauté scientifique" ou de "faire des analyses réflexives" ou de "créer un cercle de démonstration type "agora" grecque pour à la fois convaincre les autres et se plier à un certain nombre de règles logiques", ou "produire un texte du savoir". Nous retrouvons ces "styles de travail" même dans les programmes de l'enseignement des mathématiques au Lycée en France (élèves de 15 à 18 ans). Il est écrit ([9]) :

> "- Entraîner les élèves à **l'activité scientifique** et promouvoir **l'acquisition des méthodes** : la classe des mathématiques est d'abord un lieu de **découverte, d'exploitation de situations**, de **réflexion** et de **débat** sur les démarches suivies et les résultats obtenus, de **synthèse** dégageant clairement **quelques** idées et méthodes essentielles en mettant en valeur leur portée.
>
> - Développer les **capacités de communication** : qualité d'écoute et d'expression orale, de lecture et d'expression écrite (prise de notes, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...)
>
> Dans cette perspective, la **résolution de problèmes** et **l'étude de situations** occupent une **part importante** du temps de travail(...) La **synthèse**, qui constitue le cours proprement dit, doit être brève(...)"

Le style de travail "production d'un texte de savoir" y est aussi mis en évidence sous la forme :

---

[9] Ministère de l'Education Nationale, Mathématiques, classe de seconde, classes de premières et terminales, séries ES, L, S, Horaires, Objectifs, Programmes, Instructions, CNDP, 1994. Nous avons repris les citations concernant le programme de seconde, p19 pour la première citation et p.20 pour le deuxième.

"Les travaux individuels de **rédaction** (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les **capacités de mise au point d'un raisonnement et d'expression écrite**; vu l'importance de ces objectifs, ces travaux de rédaction doivent être **fréquents**, mais leur **longueur** doit rester raisonnable."

mais nous pouvons faire l'hypothèse que la plupart des professeurs (nous faisons cette hypothèse par des enquêtes empiriques auprès des professeurs-stagiaires ou des professeurs dans un cercle limité) ne fait pas (ou fait très peu) ce type d'activités dans la classe. Ce style de travail est actuellement très peu fait dans l'enseignement ce qui peut poser un certain nombre de difficultés aux élèves car une des seules occasions où ils ont la responsabilité d'écrire un "texte du savoir" est lors du moment de l'évaluation. Or ce moment du processus d'enseignement et d'apprentissage est investi d'une charge personnelle et institutionnelle tellement forte (c'est le moment de régulation et de visibilité sociale et culturelle de ce processus) qu'il n'est peut-être pas le moment optimum pour s'adonner à ce style de travail quand il n'y a par ailleurs une pratique déjà régulière. Le moment de production d'un "texte de savoir" peut être un moment d'institutionnalisation et de réorganisation des savoirs.

Deux des styles de travail des mathématiciens qui sont mis en avant par eux-mêmes et par des épistémologues est d'une part l'étude des problèmes et de questions et d'autre part la réorganisation des savoirs dans des touts unifiés (l'axiomatisation est une de ces réorganisations après coup mais elle n'est pas la seule). Or cette réorganisation après coup est essentielle dans l'apprentissage et l'organsiation de l'enseignement présente très peu d'occasions pour cela. Il me semble qu'il serait alors avantageux de créer des occasions où les élèves peuvent réorganiser son savoir et un des moyens pour cela est de produire des textes du savoir qui soient à la fois un produit personnel et un produit légitimé socialement dans la classe (et par l'intermédiaire du professeur dans la société). Ceci nous ramène donc au rôle de l'écrit dans la classe des mathématiques que je ne développerai pas cette communication.

5. En guise de conclusion

Je finirai avec un passage de Jean Cavaillès où il écrit que "Il n'y a rien de si peu historique - au sens de devenir opaque, saisissable seulement dans une intuition artistique - que l'histoire mathématique" puisque "lorsqu'elle réussit le mieux s'efface elle-même en montrant l'enchaînement des problèmes." Hourya Sinaceur, en commentant ces citations écrit ([10]) :

---

[10] Sinaceur H. (1994), Jean Cavaillès, Philosophie Mathématique, PUF, Paris, p.29. Les citations de Cavaillès ont été prises dans ce livre (p.29).

"S'il fait l'histoire des mathématiques, c'est pour comprendre leur présent et surprendre leur avenir; et comprendre c'est rassembler le divers, intégrer de multiples résultats dans *un* développement, raboter l'extrinsèque, gommer l'événement au profit de l'enchaînement, découvrir les raisons cachées et la nécessité, montrer à travers l'épaisseur du temps la rationalité de la pensée mathématique."

Nous retrouvons là, entre autres, le caractère nécessaire des énoncés mathématiques qui "n'est visible qu'après coup" (Sinaceur, p.31) et ce style de travail essentiel dans le travail des mathématiciens (au même titre que l'étude de problèmes ou de questions) qu'est la "réorganisation du savoir mathématique". Il me semble donc que l'histoire et l'épistémologie permettent aux éducateurs de prendre en compte des styles de travail qui sont, à des moments spécifiques, de l'enseignement des mathématiques mis dans l'ombre ou mis en lumière et d'ensuite de créer les conditions de possibilité de ces "styles de travail" pour que les élèves puissent, au moins une fois, "*faire l'expérience de*". C'est dans cette possibilité de pouvoir faire l'expérience de plusieurs styles de travail que l'élève peut cerner un peu plus la complexité de l'activité mathématique qui ne se laisse définir simplement.

MATHEMATIZATION OF TOWN PLANNING IN RENAISSANCE ITALY

Uwe Gellert, Freie Universität Berlin

Introduction

The period of Renaissance is commonly attributed to constitute the entrance into modern scientific thinking - or at least its grounds. Taking classical Hellenistic achievements into account and following the idea of inquiry by systematic research, Renaissance man questioned the medieval clerical world and tried to shape his modern society by the means of new machines and a changed interpretation of the system of government according to a humanistic body of thought. Therefore, new disciplines arose, such as astonomy and architecture which unified scientific outcomes with a new imagination concerning life in society. But, what about mathematics, the queen of all sciences? Are there new results in geometry widening Euclid's 'Elements' or algebraical and arithmetical insights going beyond the mathematics imported by the Arabs to Spain? What new mathematics was taught in the universities of Padova, Pisa and Bologna enlarging the manuscripts of Toledo and Cordoba? Are we able to name famous Renaissance mathematicians?

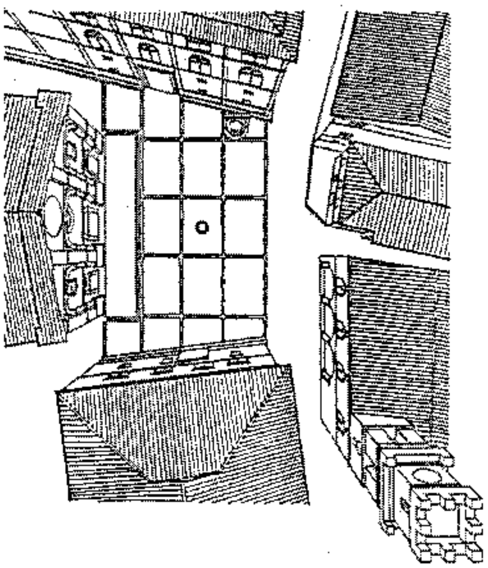
A first answer could be 'no': Countable results are few, and the main task in the fifteenth century was to distribute the translations of Arab and Greek mathematics to the emerging scientific community. But, in a broader sense including the influence and applications of mathematics on architecture, art, warfare, music, astronomy, geography, and navigation, Leonardo da Vinci, Alberti, Brunelleschi must be considered as key-figures in the beginning process of mathematization of the Italian and few years later of the European societies.

From religion to rationality: Pienza

As a significant example which clearly shows the rapidity of the beginning mathematization serves the changes in town planning activities in Italy in the second half of the fifteenth century. It was a time when town planning came to a close with the task of serious realisation and symbolisation of religious or mystic images and consequently opened up to a rational mathematical counterpart of the humanistic world view. According to humanistic thought, the shape of the town gives expression of the related state.

This can be demonstrated in the modification of the Toscanian village 'Corsignano' into the model town Pienza by Pope Pius II around 1460. The realised concept of the central place and the new cathedral of Pienza curiously shows the difficulties of the step from town symbolising the church authority of the sovereign, to the town intending to give evidence of the sovereign's new identity as a humanist. Though, the actually unchanged, existing village of Pienza does bear testimony to a unique mixture of irrationality and rationality in the Quattrocento concept of an ideal town and society. But without the birth of Enea Silvio Piccolomini (1405-1464), the son of an impoverished nobility of Siena, Pienza would not exist as a town. Enea was a universally educated humanist - Kaiser Friedrich III appointed him 'Poeta Laurentus' because his extensive literary masterpiece; Christoph Columbus was influenced by his 'Cosmographia', the first scientific geography - who made his way with the Bishop of Trieste and later of Siena to the Vatican in the city of Rome. While politically engaged in a crusade against the Turks, he concentrated his humanistic tendencies on the modification of his native town which, then, he called Pienza - city of Pius.

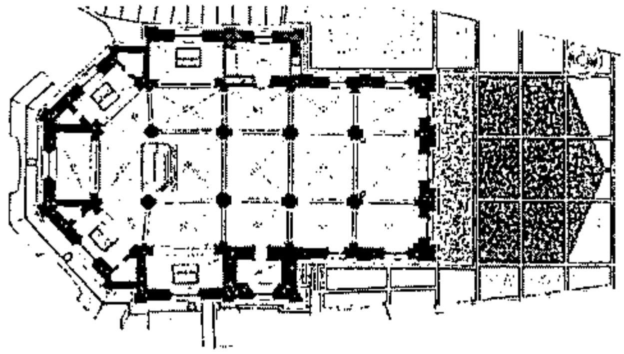
This modification focused on the central place, including the construction of a cathedral and palaces for the Pope, the bishop, and the town council, and should rather be interpreted as a demonstration of a cultural vision than that of a concrete modernisation or renovation. The central structural characteristics of this realised vision are:



- a church hall built on natural caves, with three naves flooded with light,
- a church façade decorated by columns alluding to classical temple architecture,
- the town palace of the Pope, the 'Palazzo Piccolomini', integrating the style of a villa by opening the rear to the landscape over a hanging garden as an epitome of artifically arranged nature,
- the connecting centrepiece: the 'Piazza', divided into nine sections by travertine lines, linking the heterogene structures of the façades and walls of the adjoining buildings.

While the Palazzo Piccolomini must be considered as a very modern conception of official and private living, and of living in a town and with nature, the cathedral shows the link of the main outcomes of sacred architecture: the caves as an Etruscan place of worship, the three naves driving into the Romanesque period, Gothic order of the big windows, and the Renaissance façade.

Concerning the level of mathematisation, the main point of interest is the geometrical structure of the piazza and until 1978 its hidden connections with the geographical position and size of the cathedral. A first hint for the discovery of these subtle interrelations is the not customary orientation of the cathedral: Normally, the chancel is directed to the East, but in Pienza, it is oriented towards the south, opening the view to the Monte Amiata, who dominates the southern Toscana. A more sophisticated reason for the 'wrong' orientation is only observable in the equinoxes, the dates when the nights and the days have the same length in spring and autumn. On these days, the construction of the building is intended to give a shadow fitting into the geometrical order of the piazza:



In this item, the calculation with angles and related distances of the shadow is used to paraphrase an Orphic-Christian number symbolism. The division of the piazza into nine sections alludes to a custom of imaginations about the underworld: According to Christian tradition, Jesus Christ, after crucifixion, climbed down into an underworld consisting of nine hells, and also Dante Alighieri's Descent into Hell reported of a ninefold inferno. The calculated shadow play on the piazza gives room for interpretations in the context of light, death, and underworld, based on number-mystic and exactly constructed by means of mathematics.

But the involved rationality is not easy to discover, and the astronomy of the calendar architecture of Pienza seems to be difficult:

1.) The theoretical examination with the help of magnetism and with the mathematical-technical tool, the compass, did not allow Pius' architect Bernardo Rossellino (1409-1464) to correctly determine the north-south direction. Although the magnetic declination of the compass was discovered around 1460, it was not known in Italy, at that time. Therefore, Rossellino's determination differs 12°30' from the exact south; a sundial situated on the piazza shows this deviation, too. Consequently, nowadays, we observe the congruence between the shadow and the pattern in the piazza $\frac{12.5°}{360°}$ x 24h = $\frac{5}{6}$ h = 50min after noon. As a result of this delay, Rossellino's plan had to take into account, that the sun meanwhile drops about 1°26'.

2.) The calendar architecture of Pienza also illustrates a basic astronomical problem of the fifteenth century: the incorrectness of the Julianian calendar. The Julianian calendar, established by Julius Cesar 46BC, is based on a year of $365\frac{1}{4}$ days. Therefore, the calendar becomes one day out every 129 years, and in the year of the construction (1459) it was eleven days wrong. Already around 1440, Nicolaus von Kues (well known as Cusanus, 1401-1464), an important scientist, philosopher, and intimate friend of Pius, drew up a calendar reform which was not realised until 1582 by Pope Gregor XIII. Because of reasons relating to church policy, the reform did not take place earlier: The decision to fix the spring equinox on 21st March was carried out 325 on the Council of Niceae, and determines the dates of Easter, the most important celebration in the whole ecclesiastical year, which takes place on the first Sunday after the first full moon after the spring equinox. As a consequence, changing the calendar meant changing the dates of Easter - a problematic question between the different Christian churches.

By reason of this disagreement between church and science, Pius and his councellors Cusanus and Rossellino were confronted with a matter of conscience difficult to tackle: According to exact measurement, the spring equinox in 1460 was not on March 21 but on March 10/11 (in the Julianian calendar) resulting the related angles of incidence of the sun of size $\alpha = 49°22'$ (March 21, 1460, in the Julianian calendar) and $\beta = 45°55'$ (March 10/11, 1460, in the Julianian calendar). But as Pope Pius II, he was aware of the implied disputes of a strong insistence on his scientific and humanistic views. On the other side, a modern architecture and model town planning based on the ignorance of science in favour of an old and incorrect calendar must have been an intellectual sacrifice for the humanists Pius and Cusanus.

Fortunately, these mental battles are still re-constructable from the details of the cathedral:

a) One curiousity inside the building are the very strange looking, artificially raised capitals of the columns which take the weight of the vault of the hall with three naves. Obviously, these capitals break the outline of the whole cathedral. And also Pius in his Comments on the building process wrote, that when the columns had already been finished and the capitals had been laid, the architect noticed a gap of seven feet in height, and interpreted the belated heightening as a fortunate and enriching error for the beauty of the cathedral.

Shall we follow Pius in his Comments? Is it probable that one of the most famous and experienced Renaissance architects 'suddenly noticed' a space of seven feet in height? Another interpretation is: The height of the artificial heightening of the capitals is about 2.41m. Bearing in mind the difference in size between the 'Gregorian' and the 'Julianian' angle of incidence of the sun on the spring equinox of 3°27', we discover that the 2.41m mentioned compensates for the higher position of the sun (the calculated difference based on the incorrect calendar is 2.44m). Apparently, Pius' or Rossellino's first plan was founded on the true - scientific - date of equinox, and not until the building was nearly finished did Pius II at last decide to use the church as treasurer of truth and consequently dated the equinox according to the old calendar bearing in mind that his mathematical model of a new town as a symbol for a rational society now became blurred by the rootedness in out-dated clerical definitions. Here, Rossellino's task was to inconspicuously change the conception of the upper part of the building; and in the interior he succeeded with a part of the curious shape of the capitals. Contrary, on the façade, he was forced to give up any proportional system.

b) Among the Renaissance architects, theorists, and mathematicians, the best way to arrive at art and beauty was under discussion. All parties involved agreed that proportion had to be regarded as mother and queen of all arts and that beauty and art must be seen as the task to find and use special numbers to mathematically describe and construct these proportions. Also, the source of the numbers ought to be the classical period:

* Vitruvius' (84BC-?) *'De architectura libri decem'*, the oldest and the only architectural treatise before Christ, which is preserved, was brought into consideration by Petrarca and Boccaccio, and was then well known among architects and artists, favoured the Pythagorean numbers as standard for proportion.
* Rossellino and later Andrea Palladio (1508-1580) referred to Plato's expositions about the square doubling to gain "perfetti" proportions (Palladio, 1570) by using the square root of two.
* The mathematician and monk Luca Paccioli's (1445-1514) *'Divina proportione'* picked up Euclid's expression for the golden section and tried to link geometry with divine harmony.
* Leon Battista Alberti (1404-1472), humanist, architect, and mathematician, developed in his treatise *'De re aedificatoria'* an aesthetics of building based on "numerus" (number), "finitio" (relation), and "collocatio" (arrangement) (Alberti, 1485). By claiming the proportion between diameter and height of Doric, Ionic, and Corinthian columns to be 1:7, 1:8, and 1:9, he emphasised the "normative demand" of Renaissance architecture (Thoenes, 1995), and called for integers for the construction of proportions.

In the façade of the cathedral it is not possible to discover any common proportion. If, however, we reduce the total height of the building by 2.41m, the standard proportion of Rossellino becomes obvious: The mathematical relation of the height of the basement to the top floor is $1:\sqrt{2}$.

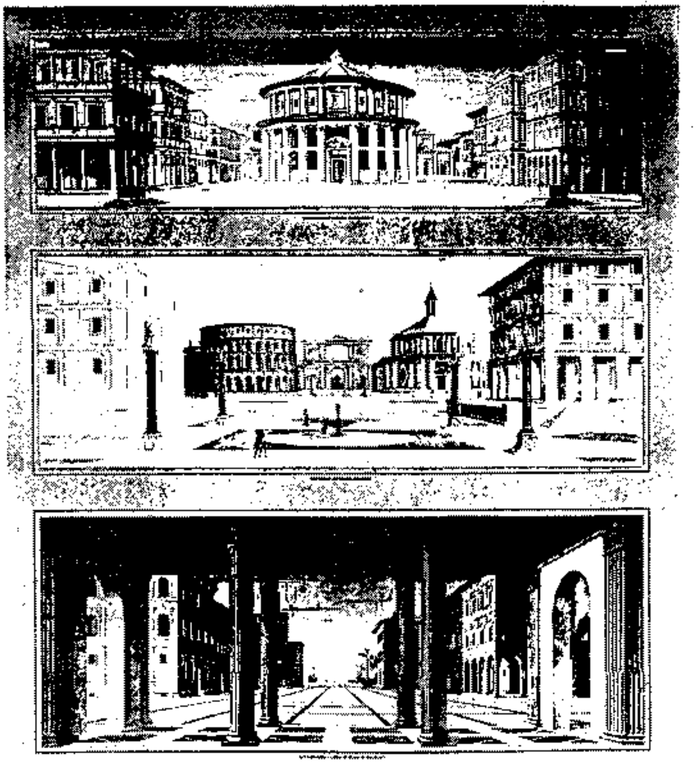
The process of construction of the central area of Pienza serves as a significant example for the transition to a rational mathematical society:

1.) Pius' humanism made clear by the concept of a cathedral integrating different epochs of architecture put education on the top of the agenda. This focus on education aimed at an acceleration of the circulation of information by using the mechanisms of formalising and categorisation. In addition, the buildings in Pienza show myths and mysticism in contrast with scientific methods and rationality, and symbolise the change in the theory of societies.

2.) Although Pius II intended to give evidence of the sovereign's new identity as a humanist, he was forced to act as church authority and to give up the realisation of the claim of scientific thought. Being engaged in closing up with the imagination of town planning directing to the church and, instead, showing Pienza as a symbol and an expression for modern states, he experienced the old constrains working against a perfect mathematical idea.

Rationality shaping utopia: La Città Ideale

A completely different conception of town planning, which demonstrates a strong influence of mathematical achievements, is shown by three views of the ideal town, dedicated to the school of Piero della Francesca (circa 1480). During the 20 years, from the construction of Pienza to these painted visions, the importance of the Christian church for the outline of an ideal town has been pushed back and, instead, has been supplemented by a human order. Then, the town is understood as a forum for humanistic ideas represented in a platform for a self-satisfied world. This process, already obvious in Pius' concept, could be seen as a turning away from the "ideal divino" (Hodgson Torres, 1995) and as enforcement of the turn towards rationality.



Consequently, the mode of construction of the paintings is a mirror of the above mentioned rationality. All three examples nearly appear to us like demonstrations of a new method, invented by Filippo Brunelleschi (1377-1446) and made perfect by Piero della Francesca (1410-1492): the linear perspective, "one of the major historical marriages of mathematics and art" (Davis, 1994). But, even if the linear perspective clearly could be noticed in the pavements of the places, its value could not be exaggerated: Examinations with radiography and infra-red had discovered hidden drawn lines in perspective for the elevations of each single building (Herrmann, 1995). This shows that by the means of the mathematical method of perspective projection, the painters tried to unify the symbols of the components of life in society, according to humanistic thoughts. The aim of the ideal plan was to give evidence of uniformity, not reduced by considerations of the landscape or of technical and financial difficulties; and the geometrical synthesis in the scheme of the plan functions as hierarchical order for the details of the buildings. Political interpreted, we recognise the hierarchical subordination of the individual under the authority of the sovereign (Confurius, 1984).

Linked with the application of the central perspective, symmetry is characteristic for the conception of the ideal views. But we cannot call it a perfect symmetry: Buildings, each again symmetric with clear mathematical shapes, are placed on symmetric positions in the painting. Avoiding excessive rigidity, the buildings in those positions differ from one another and, in addition, guide the view of the observer towards the central building. Certainly, it must be regarded as casual, that in the centre of the three paintings we recognise symbols for the constituants of the Renaissance society: a church like a temple, a triumphal arch, and a harbor. (Leonardo da Vinci also used the central perspective together with the symmetric positioning of groups, each consisting of three disciples, for the composition of his famous "The Last Supper").

Also the English philosopher Thomas More (1478-1535) picked up symmetry and used a strong mathematical way for the description of his humanistic vision "Utopia" of an ideal state: He claimed 54(!) completely identical cities, with a square ground plan in order to spread justice and welfare.

Mathematics, then, should be regarded not only as a means to demonstrate the humanistic visions about ideal towns symbolising ideal states, but also, because of its attribution to be able to construct perfect rationality, can be viewed like the basics and the producer of the new society. 'Rationality shaping utopia' now means 'mathematics shaping society'.

Conclusion

The concrete historical conditions for a certain society and the challenges to be taken up presuppose the extent of the applied mechanisms of quantification, categorisation and formalisation. This mathematisation characterised by consistency as well as by decisiveness, directs on the need of educated citizens who are able to interpret mathematical information. In so far, the intended rationality of humanistic thoughts was an expression of the urgent necessity of an implementation of educational systems in renaissance Europe. In this context, the pushing through of church political arguments against scientific reasoning in the architectural decision of heightening the cathedral in Pienza, could be viewed as a fall on one's knees in front of irrationality and it was only possible, because nobody was able to discover the shameful belated correction: In a society, where the citizens would have been informed about the incorrectness of the determined dates of equinoxes, Pius II would have had to come to another decision, which would have been more directed towards scientific results.

The visions of an ideal town as well as the description of 'Utopia' also signify the wish to make humanistic thoughts transparent. The school of Piero della Francesca, and also Morus, especially influenced by the invention of the letterpress, picked up Pius' idea of broadening the peoples' contact with humanism. In this process, they used mathematics to describe reality and, on the other side, used mathematics to serve as the norm for the construction of a new reality.

But the new way of shaping the society and its environment was not completely fixed at that time. It was just the beginning of a new age, the modern age, and the fragility of the new ideal was demonstrated by the appearance of the monk Girolamo Savonarola, who succeeded in setting back the development of the city of Florence for years.

Diagrams

1 The relation between the travertine lines and the surrounding buildings (from: Pieper, 1986, p. 1729)

2 Ground plan and shadow of the cathedral on equinoxes (from: Pieper, 1986, p. 1714)

3 Views of the ideal town (from: Edition Lidiarte: 'La Città Ideale', Berlin)

References

Alberti, L.B. (1485) *Leonis Baptiste Alberti de re aedificatoria incipit.* Florence: Nicolaus Laurentius.

Confurius, G. (1984) *Sabbioneta.* München: Carl Hanser Verlag.

Davis, P.J. (1994) *Mathematics and Art: Cold Calipers Against Warm Flesh?* In: Ernest, P. (Ed.) Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective. London: The Falmer Press, p. 165-183.

Herrmann, M. (1995) *Die Utopie als Modell.* (The utopia as model). In: Evers, B. (Ed.) Architekturmodelle der Renaissance. Die Harmonie des Bauens von Alberti bis Michelangelo. München: Prestel, p. 56-73.

Hodgson Torres, M.L. (1995) *La geometría y el arte renacentista Leonardo-Luca Pacioli.* (The geometry and the art of Leonardo-Luca Pacioli). In: Seminario "Orotava" de Historia de la Ciencia (Eds.) De Arquímides a Leibniz tras los pasos de infinito matemático, teológico, físico y cosmológico. Canarias: Encuentros, p. 163-197.

Morus (More), T. (1517) *Utopia.* Basel.

Pacioli, L. (1509) *Divina proportione.* Venice: Paganino de' Paganini.

Palladio, A. (1570) *I quattro libri dell' architettura.* Venice: Dominico de Franceschi.

Pieper, J. (1986) *Pienza.* In: Bauwelt 1986, Heft 45, p. 1711-1732.

Thoenes, C. (1995) *Anmerkungen zur Architekturtheorie.* (Comments to the theory of architecture). In: Evers, B. (Ed.) Architekturmodelle der Renaissance. Die Harmonie des Bauens von Alberti bis Michelangelo. München: Prestel, p. 28-39.

Vitruvius, M.P. (1497) *L. Vitruvii Pollionis de architectura libri decem.* Venice: per Simonem Papiensem dictum Bevilaquam.

EUCLID VERSUS LIU HUI: A PEDAGOGICAL REFLECTION

Wann-Sheng Horng, National Taiwan Normal Univeristy

Introduction

It has been argued that ancient matheamticians of the West and East might have contributed complementary aspects, namely the structural and operational, to mathmatics. In the educational setting, if the comparison, say between Euclid and Liu Hui (third century A.D.), the two great mathematical masters in antiquity, could be presented to students around the wrold, then multicultural concern the mathematics educators like to share will become a real issue to mathematics teachers. In this article, the author will try to compare the epistemology and methodology reflected in both Euclid and Liu Hui's methods in finding the greatest common divisor of two natural numbers, their circle measurements as well as their proofs for the volume formula of a pyramid. Pedagogical comments will be therefore made to the contrast between Euclid's structural (or theoretical) and Liu Hui's algorithmic (or construcitive) approaches to the mathematical problems in question.

Arithmetica vs. "Suan Shu" (Logistica)

In the elementary school mathematics curriculum, "arithmetic" usually refers to the computational procedures, or algorithms, for numbers. In fact, arithmetic is commonly viewed as also including the solution of problems involving ratios, proportions, decimal fractions and percent. This aspect of mathematics was called *logistica* (a word related to our "logistics") by the ancient Greeks. For them, *arithmetica* (a word related to our discipline "number theory"), on the other hand, was a study of the abstract mathematical properties of numbers, chiefly the natural numbers. Greek enthusiasm about arithmetic, among other mathematical disciplines, was witnessed by Plato in his *The Republic*: "arithmetic has a very great and elevating effect, compelling the soul to resason about abstract number, and rebelling against the introduction of visible or tangible objects into the arguments...." In fact, arithmetic, along with geometry, astronomy and harmonics formed the quadrivium in Classical World. No wonder Euclid would devote Books VII, VIII and IX of his *Elements* to arithmetic, since it was regarded to have been written as a textbook for teaching matheamtics in ancient Greece.

In contrast, ancient Chinese matheamtics is well-known for its algorithmic aspect which devoted primarily to solving practical problems. This may explain in part why the *Jiu Zhang Suan Shu* introduces the rules for addition, subtraction, multiplication, and division of fractions m/n, from the very beginning. Since Chapter 1 of the *Jiu Zhang Suan Shu* was written to calculate the area of plane figures, so measurement of line segment might give rise to fractional numbers.

In fact, the rules of addition, subtraction, multiplication and division all agree with those we learn at school. More interesting is the method for simplifying fractions:

> If both [the denominator and numerator] can be halved, then halve them. When both cannot be halved, set down the numerals of the denominator and numerator, and subtract the smaller from the larger. Continue to diminish mutually through subtractions ("Geng Xiang Jian Sun") to seek a pair of equal numbers ("Deng Shu"). Use [this number called] the "Deng Shu" to reduce [the fraction] [Qian 1963, pp. 94-95. Here the translation follows Lam and Ang 1992, p. 56].

One of the two given examples is to simplify 49/91. We are instructed first to lay out

49	49	7	7	7	7	7	7
91	42	42	35	28	21	14	7

then to divide the numerator and denominator by the equal number 7 in order to get the answer 7/13. According to Van der Waerden, since it is quite easy to get the answer in this case, "[s]o the mention of the algorithm is not logical or didactcal necessary: it is just an addition by a systematically-minded teacher, who wanted to teach a never-failing method," [Van der Waerden 1983, p. 38].

Even so, Liu Hui's explanation of how the algorithm works is equally

> To reduce by using the "Deng Shu" means to divide [the denominator and numerator] by it. As the mutually subtracted numbers are all multiples ("Chong Die") of the "Deng Shu", this is the reason why the "Deng Shu" is used to reduce [the fraction] [Qian 1963, p. 95. Here too, the translation follows Lam and Ang 1992, p. 56].

Whatever the rigor of Liu Hui's argument may be, one has to admit that Liu Hui did tell us how the algorithm ("Geng Xiang Jian Sun") worked successfully in simplifying the fraction.

On the other hand, Euclid was primarily interested in finding a common measeure (divisor) of two [natural] numbers. For example, Proposition 1 of Book VII of the *Elements* reads:

> Two unequal numbers being set out, and the less being continually subtracted in turn from the greater, if the number which is left never measures the one before it until an unit is left, the original numbers will be prime to one another [Heath 1956 vol. 2, pp. 296-297].

Immediately follows Proposition 2 there is the method of finding the greatest common measure of two numbers not prime to one another:

> Given two numbers not prime to one another, to find their greatest common measure [Heath 1956 vol. 2, pp. 298-300].

These two propositions comprise the so-called Euclidean algorithm. It should be noted that the Euclidean algorithm is essentially the same as the Chinese "Geng Xiang Jian Sun" despite that the latter awaited Liu Hui to explain the reason why. Indeed the Greeks as well as the Chinese reduce the pair of numbers (m,n) by reciprocal subtractions until they become equal, and then they divide m and n by the resulting common divisor.

Nevertheless, since the ancient Chinese never paid any attention to mathematical problems which could be associated with numbers theory or arithmetic in Greek sense. This in turn may explain why the concepts like prime number and numbers prime to one another never occurred in the traditional Chinese mathematics. Nor did the relations between the greatest common measure and the least common multiple. In fact, Chapter 4 of the *Jiu Zhang Suan Shu* gives the concept like the greatest common multiple in order to deal with the addition of more than two fractions [Cf. Qian 1963, pp. 147-148; Lam and Ang 1992, p. 62]. However, the concept of the "Deng Shu" is never mentioned in the computational procedures. What surprise us is the fact that Liu Hui, a commentator of the text, also says nothing in this context. In other words, it seems that the structural relation between the greatest common measure and the least common multiple never came cross Liu Hui's mind despite that he paid much attention to the concept of the "Deng Shu" (the greatest common measure).

As mentioned above, Books VII, VIII and IX of Euclid's *Elements* are devoted to number theory. A theoretical framework therefore is provided for dealing with the properties of number *per se*, for example, definitions of prime number and composite number etc. [Heath 1956 vol. 2, pp. 277-278]. What still most concerns Euclid is the structural aspect of (natural) numbers which includes the relations between prime and composite numbers as well as that of the greatest common measure and the least common multiple [Heath 1956 vol. 2, pp. 336-341]. No wonder that Euclid would stress on the significant role of prime numbers played in number theory. Under such circumstances, it is not surprised to see that he even tries to count how many prime numbers are:

> Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers [Heath 1956 vol. 2, p. 412]

Moreover, Euclid's proofs of Propositions VII-1 and VII-2 deserve our special attention. This is all because even in the cases involving an algorithm, say, the Euclidean algorithm, he still appeals to the argument of *reductio ad absurdum* (reduction to absurdity) [Cf. Heath 1956 vol. 2, pp. 296-300]. Such an argument is also crucial in his proofs for the formulas involving a circle and a pyramid (topics that we going to discuss in the following sections). Doubtless he is primarily concerned with the structural aspect of mathematics even when he is doing something very algorithmical.

In the light of Euclid's number theory, Liu Hui seemed to have been confined to explaining the reason why algorithms like the "Geng Xian Jian Sun" worked in solving practical problems. His neglect of the least common multiple is one more piece of evidence showing that he never tried to go beyond the explanation of how the rules of addition, subtraction, multiplication and division were manipulated. Even so, his explanation of the "Geng Xiang Jian Sun" deserves special attention simply because it adds a complementary aspect of algorithmic mathematics, namely the structural. By emphasizing both the algorithmic and structural aspects of mathematical concepts in problem-solving, school teachers are not only able to help students to do mathematics but also to enhance the understanding of mathematics.

Circle Measurement

In Problems 31 and 32 of Chapter 1 in the *Jiu Zhang Suan Shu*, we are asked to calculate the areas of a circular fields. For example, Problem 31 reads:

> A cricular field has circumference 30 "Bu" [1 "Bu" is about 126 cm in 1st-century China] and diameter 10 "Bu". What is the area of the field? [Qian 1963, p. 103]

In solving this problem, the *Jiu Zhang Suan Shu* provides four formulas of the circle S. One of them is $S = (C/2)(D/2)$, where C, D is the circumference and diameter of the circle respectively [Cf. Qian 1963, pp. 103-108].

In order to prove this formula, Liu Hui suggests that from the beginning we can regard C/2 and D/2 respectively as two sides of a rectangle, say R. If we can transform the circle S into the rectangle R with area preserved, then the proof is well-done [Cf. Figure 1]. This is certainly the case with Liu Hui [Qian 1963, p. 103]. In fact it is very natural for Liu Hui to adopt this strategy for he has already proved the area formulas of triangle and trapesoid by transforming them respectively into the shapes of rectangle [Cf. Qian 1963, pp. 101-102]. What he uses is the so called In-Out Principle [Cf. the illustrations in Figure 2]. Since the circle is a curved plane figure, therefore in addition to the use of the In-Out Pinciple, Liu Hui apparently realizes that he needs something more. This may explain why he also counts on the method of limit to accomplish the proof of the formula: $S = (C/2)(D/2)$.

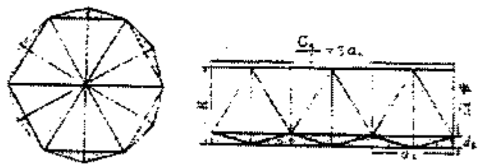


Fig. 1

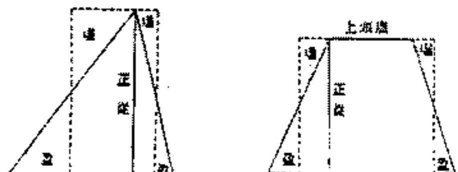


Fig. 2

In his proof, Liu Hui inscribed a regular hexagon within a circle. By successively doubling the number of sides -- a method known as the "Ge Yuan" (circle division) method, he believed it was possible to reach a polygon which coincided with the circle and therefore "exhausted" its area [Qian 1963, pp. 103-104; Lam and Ang 1986]. There is no doubt that Liu Hui would allow the cutting to be infinite, for "if one makes the cut finer, the loss [of the area of the inscribed regular polygon with respect to the area of the circle] will be smaller, " [Qian 1963, pp. 103-104]. Here Liu Hui's conception of infinity is also evident in his quantitative estimation of the loss of the area of the inscribed regular polygon with respect to the area of the circle. Yet then why Liu Hui needed to emphasize: "cut the circle again and again till it cannot be cut any more, then the inscribed regular polygon will coincide without any loss"? Perhaps to Liu Hui exhausting the cutting to reach an eventual geometric entity was meaningful only if he had a formula to prove. This certainly was not the case with the area of a segment of a circle ("Hu Tian") in Chapter 1 of the *Jiu Zhang Suan Shu* in which no exact formula of the area of a "Hu Tian" was given [Cf. Qian 1963, pp. 108-110; Horng 1995].

Now let us turn to Euclid's side. The "area formula" Euclid presents in his *Elements* is Proposition 2 of Book XII:

> Circles are to one another as the squares on the diameters [Heath 1956 vol. 3, pp. 371-373].

Insofar as the proposition implies, he only knows that the ratio of a circle to the square of its diameter is a constant. However, he never mentions what the ratio is. Perhaps what he might have in mind is actually $\pi : 4$. Yet any ratio, say a : b, in his *Elements* occurs only as an element of a proposition, say a : b = c : d and hence is not treated as a number a/b *per se* [Kline 1972, p. 73]. Therefore, Euclid shouldn't be credited to have given a formula for the area of a circle.

In order to prove this theorem [Cf. Figure 3], Euclid uses the method of exhaustion underlying which is the principle of exhaustion(a legacy of Eudoxus). He puts this principle as Proposition 1 of Book X in his *Element*:

> Two unequal magnitudes being given, if from the greater there is subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half, and if this process is repeated continually, there will be left some magnitude less than the lesser of the given magnitudes [Heath 1956 vol. 3, p.14].

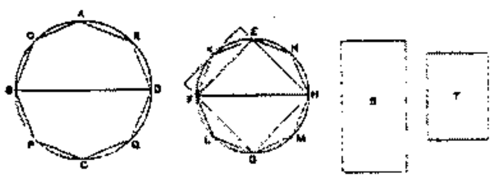


Fig. 3

The method does not really suggest that the inscribed polygons of the circle are going to "exhaust" the circle. Instead it allows us to "approximate" the circle with the inscribed polygons to whatever extent we like. His proof of the theorem begins by assuming that the result is not true -- an argument based on the *reductio ad absurdum*. Euclid concludes the proof by showing that the new assumption eventually leads to a contradiction.

It seems quite enough at this point for us to compare Liu Hui and Euclid's treatments of the circle measurement. From the argument Liu Hui put for the circle measurement, one cannot but agree that underlying his methodology Liu Hui had "the belief in a balanced employment of rigorous argument and heuristic reasoning with the aim of achieving better understanding," [Siu 1993]. By contrast with Euclid's proof, Liu Hui's argument is more intuitive and illuminating in that every stage of his proof shows clearly what is the goal to attain. In fact, to the audience for whom I have, in several occasssions, lectured on the comparison of the circle measurements by Liu Hui, Euclid and Archimedes [Horng 1994], Liu Hui's proofs is even more attractive than that of Archimedes's formula:

> The area of any circle is equal to the area of a right triangle in which one of the legs is equal to the radius and the other to the circumsference [Cf. Fauvel and Gray 1987, pp. 148-150].

Archimedes's formula is equivalent to the Chinese one, namely both have the same form of $(1/2)C \cdot r$, where C and r are the circumsference and radius of the circle respectively. Following Euclid, Archimedes also uses the method of exhaustion to give his proof [Cf. Fauvel and Gray 1987, pp. 148-150]. Unlike Euclid however, Archimedes knows what the area formula of a circle is.

Even so, just like Euclid's case, each step of Archimedes's proof hints at nothing to do with how the formula (1/2)C·r was obtained in a constructive manner. Judged by this standard, Liu Hui's treatment of circle measurement is more heuristic than Archimedes's despite that Archimedes had the treatise *The Method* showing how he was enthusiastic about the method of discovery [Cf. Katz 1992, pp. 104-105].

Volume of A Pyramid

Just as in the case of circle measurement, Liu Hui also makes use of a limit process in deriving the volume of the pyramid, "Yang Ma". Let us begin with a brief summary of Liu Hui's derivation which will be "translated" in terms of modern language and symbolism. Given a "Yang Ma" with dimensions a, b and h as shown in Figure 4. A tetrahedon "Bie Nao" could be chosen to fit together forming a wedge "Qian Du" [see Figure 5]. Here the "Yang Ma" is BDFEC and the "Bie Nao" is BACE. Set

c = the volume of the "Qian Du" ABDCEF,
y = the volume of the "Yang Ma" BDFEC,
p = the volume of the "Bie Nao" BACE.

Since Liu Hui has already proved that c = (1/2)abh, in order to prove that y = (1/3)abh it is sufficient to show that y = 2p. Now make the division as shown in Figures 6 and 7. Then the "Bie Nao" BACE is divided into two "Qian Du", AGIJML and ILMJCP; and two "Bie Nao", BGIL and EPML. The "Yang Ma" BDFEC is dividied into one box, HILKNDRO; two "Qian Du", ILORCP and KLONFQ; and two "Yang Ma", BHILK and LOPEQ. It is clear that the sum of the volumes of the two "Qian Du" pieces of the "Bie Nao" is exactly one-half of the sum of the volumes of the one box and two "Qian Du" pieces of the "Yang Ma". Thus it remains to show that the two smaller "Bie Nao" pieces of the "Bie Nao" together represent half the volume of the two smaller "Yang Ma" pieces of the "Yang Ma".

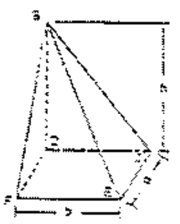


Fig. 4

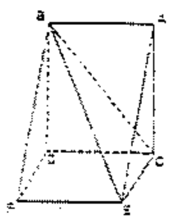


Fig. 5

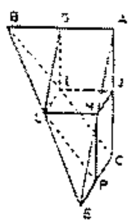


Fig. 6

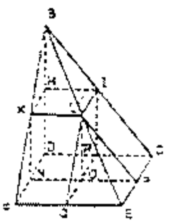


Fig. 7

These smaller "Bie Nao" and "Yang Ma" can again be divided up in the same way as shown in Figures 6 and 7. This division again yields some parts whose volumes have the desired ratio 1 : 2, and whcih altogether form 3/4 of the volumes remaining in the first step, plus the remainders, namely, four smaller "Bie Nao" and four smaller "Yang Ma". The still undetermined remainders are only 1/4 of 1/4 of the original "Qian Du". These can again be divided up in the same way. Eventually, "to exhaust the calculation," as Liu Hui puts it, "halves the remaining breadth, length, and height; an additional three-quarters can thus be determined," [Quoted Qian 1963, p. 168].

But how did Liu Hui actually carry the process to the limit? He says:

> The smaller they are halved, the finer ["Xi"] are the remaining [dimensions]. The extreme of fineness is called "subtle" ["Wei"]. That which is subtle is without form ["Xing"]. When it is explained in this way, why concern oneself with the remainder? [Quoted Qian 1963, p. 168; here the translation follows Wagner 1979].

This passage makes it clear that Liu Hui has an idea of carrying the process to the limit [Van der Waerden 1983, p. 202]. For Liu Hui it is possible to exhaust the process of halving to reach a state of "Wei". In fact, coupled with his (quantitative) estimation of the remainders, Liu Hui must have used the argument of "exhausting the halving" to convince his readers that his demonstration really works, as does his proof of the formula for the area of the circle.

In addition, at each stage of his halvings, Liu Hui is able to hint at the so-called "Liu Hui's Principle" -- "Yang Ma" : "Bie Nao" = 2 : 1 [Wu 1982] which leads eventually to his proof of the volume formula of the "Yang Ma". In other words, Liu Hui's method is constructive in a sense that each step of the argument repeatedly points to the goal to be obtained.

As in his circle measurement, Euclid also uses the method of exhaustion to prove his formula for the volume of a pyramid. In addition, the argument of *reductio ad absurdum* is adopted due apparently to the fact that, just like the case with his circle measurement, his formula for the volume of a pyramid is expressed as a proportion, namely Proposition XII-5:

> Pyramids which are of the same height and have triangular bases are to one another as the bases [Heath 1956 vol. 3, pp. 386-388].

Again he needs Proposition X-1 to approximate the pyramid with its inscribed prisms. Still he also needs to provide Propositions XII-3 and XII-4 in order to take away from the pyramid two prisms which together are more than half the pyramid. From the remainder he again takes away more than half, and so on, until the remainder is less than any assigned volume. Van der Waerden has noted its parallel in methodology to Liu Hui's proof of the "Yang Ma": Liu Hui takes away three quarters from the prism ("Qian Du"), and from the remainder he again takes away three quarters, and so on, until the remainder is completely negligible [Van der Waerden 1983, p. 203].

With the resemblance of Liu Hui and Euclid's methods in hand, one is tempted to agree with Van der Waerdern that Liu Hui was influenced by Greek sources [Van der Waerden 1983, p. 203]. Whatever the case, Liu Hui's method indeed provides a direct avenue which helps us to understand how the volume of the "Yang Ma" is two times the "Bie Nao". Here again Liu Hui's methodology reflects that he had "the belief in a balanced employment of rigorous argument and heuristic reasoning with the aim of achieving better understanding," [Siu 1993]. In contrast, due apparently to the argument of *reductio ad absurdum*, the indirect feature of Euclid's approach is evident in his proof of the formula for the volume of a pyramid, just as does his proof of the formula for the area of a circle. Meanwhile, one has to admit that Euclid does not say anything about what the volume of the pyramid is.

Conclusion: A pedagogical reflection

After the *Elements* of C. Clavius's edition had been transmitted to China for about 250 years Chinese mathematicians in the 1860s came to realize that the *Elements* and the *Jiu Zhang Suan Shu* were complementary to each other. Perhaps the most typical comment on the contrast of the *Elements* and the *Jiu Zhang Suan Shu* was made by Zeng Guofan, the notable higher scholar-official in the late Qing dynasty, in his preface to the *Ji He Yuan Ben* (Chinese edition of the *Elements*, 1865). He clearly appreciated the significance of the theoretical character of the *Elements*, but also reminded his readers not to ignore the *Jiu Zhang Suan Shu*, since, on the other hand, it provided methods and examples that were excellent illustrations of the results covered in the *Elements*. In other words, Zeng Guofan regarded the *Elements* and the *Jiu Zhang Suan Shu* as complementary in the sense that one was concerned basically with theoretical structure while the other with algorithmic or operational aspects. Consequently, readers could benefit from both books [Cf. Honrg 1993].

The reason why Zeng Guofan neglected Liu Hui is unknown. Had he referred to Liu Hui, he should have awared of Liu Hui's structural concern. However, he was quite right in pointing out the striking contrast between the *Elements* and the *Jiu Zhang Suan Shu*. Since Liu Hui did not set a paradigmatic example for subsequent mathematicians to follow, the ancient Chinese mathematics remained basically algorithmic. Therefore, the contrast between the *Elements* and the *Jiu Zhang Suan Shu* is applicable to our discussion on "Euclid versus Liu Hui". Now how can we learn from the masters, especially in terms of the comparison of their epistemology and methodology?

First of all, one should aware that "the terms 'operational' and 'structural' refer to separable, though dramatically different, facets of the same thing, " [Sfard 1991]. In other words, these two aspects are regarded as "the different sides of the same coin". Therefore, their duality rather than dichotomy is emphasized [Sfard 1991].

If that indeed is the case, we would like to recommend Liu Hui's approach to mathematics for school teachers, especially in Taiwan. This is not merely because of its cultural affinity. But rather underlying Liu Hui's mathematics readers are instructed to know "both what and how to do" or "both rules and reasons" [Skemp 1995, pp. 203-213, 221-225]. In the case with finding the greatest common divisor of two natural numbers, the "Geng Xiang Jian Sun" method suggests that a series of "reciprocal subtraction" would be performed with counting rods ("Suan Chou") on the counting board in the manner shown in Section II above [Cf. Lam and Ang 1992, pp. 54-56]. According Van der Waerden, the algorithm manifests itself even without Liu Hui's explanation [Cf. citation in Section II above]. However, to our students who learn the same procedure manipulated in terms of Hindu-Arabic numerals, Liu Hui's explanation reminds them of checking the procedure once error occurs in the final result. Of course, the Euclidean algorithm now familiar to school teachers and students is easy to manipulate too. Yet the "Geng Xiang Jian Sun" method and its accompanying Liu Hui's explanation are still more illuminating in "both rules and reasons". Nevetheless, Euclid's algorithm should not be ignored for the reason that it devoted to the more advanced stage of concept formation. For example, after students have been familiar with how to find the greatest common divisor and in turn how to simplify fractions, they should be encouraged to entertain what the concept of divisor *per se* is all about. For them then the structural aspect of the (natural) number may become a genuine issue. In other words, maybe now the students are ready for some features of elementary number theory.

In the cases with circle measurement and the volume of a pyramid, we also think that it is more appropriate to introduce to students Liu Hui's approach at the first stage of their learning. This is largely because that Liu Hui's method shows a very heuristic flavour that lacks in Euclid's structural concern. Neverthelss, Euclid's circle measurement and volume of a pyramid deserve a place in geometry teaching not only for its standard of rigor but also for their emphasis on the structural relations between geometrical entities. In so doing, brighter students would come to realize that exploring geometrical entities for their own sake is worthwhile. This would in turn help them to appreciate the beauty of mathematics -- an intellectual satisfaction that any qualified teacher would like to share with his class.

As a concluding remark, let me utter a few words about how the history of mathematics should be related to the pedagogy of mathematics. The argument of this article, I hope, has shown how a comparison of mathematical methods developed in different civilizations could be beneficial to mathematical teaching. In fact, the contrast of Euclid and Liu Hui should have suggested that a meaningful teaching can be accomplished by approaching mathematics from different epistemological and methodological perspectives. Such a pedagogy is even more fruitful than the usual one practiced in classrooms in its multicultural concern. In this respect, historians of matheamtics around the world all have something to contribute due to the primary concern with the socio-cultural aspects of mathematics in their enterprise. We are looking forward to seeing a closer cooperation of historians and educators in the setting of mathematics education.

Bibliography

Bekken, Otto *et al.*, eds. 1992. *Learn from the Masters!* Harisburg: The Pennsylvania State University.

Boyer, Carl B. 1949. *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, Inc.

Bunt, Lucas N.H., Phillip S. Jones and Jack D. Bedient 1988. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publication, Inc.

Davis, Philip J. and Reuben Hersh 1981. *The Mathematical Experience*. New York: The Harvest Press.

Fauvel, John and Jeremy Gray eds. 1987. *The History of Mathematics: A reader*. London: The Open University.

Gou Shuchun 1995. *Gu Dai Shi Jie Shu Xue Tai Dou Liu Hui* (Liu Hui -- One of the Greatest Masters of Mathematics in Antiquity World). Taipei: Ming Wen Book Co.

Heath, Thomas L. 1956. *The Thirteen Books of the Elements* (three olumes). New York: Dover Publications, Inc.

Horng, Wann-Sheng 1993. "Hua Hengfang (1833-1902) and His Notebook on Learning Mathematics -- *Xue Suan Bi Tan*," *Philosophy and the History of Science: A Taiwanese Journal* **2** (2), pp. 27-76.

Horng, Wann-Sheng 1994. "San Ge Gong Shi Ji Yuan Mian (Three Formulas for the Area of a Circle)," *Science Monthly* (in Chinese) **25**, no. 7.

Horng, Wann-Sheng 1995. "How Did Liu Hui Perceive the Concept of Infinity: A Revisit," *Hisotria Scientiarum* Vol. 4-3, pp. 207-222.

Katz, Victor J. 1993. *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: HarperCollins College Publishers.

Kline, Morris 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Lam Lay Yong and Ang Tian-Se 1986. "Circle Measurements in Ancient China," *Historia Mathematica* 12, pp. 325-340.

Lam Lay Yong and Ang Tian Se 1992. *Fleeting Footsteps*. Singapore: World Scientific.

Li Yan and Du Shiran 1987. *Chinese Mathematics: A Concise History*. Oxford: Clarendon Press.

Lloyd, G.E.R. 1984. *Magic, Reason and Experience*. London: Cambridge University Press.

Polya, George 1985. *How to Solve It?* New Jersey: Princeton University Press.

Qian Bacong 1963. *Suan Jing Shi Shu Dian Jiao* (Annotation on the Chinese Ten Classics of Mathematics). Beijing: Zhong Hua Book Co.

Sfard, Anna 1991. "On theDual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin," *Educational Studies in Mathematics* **22**, pp. 1-36.

Siu, Man-Keung 1993. "Proof and Pedagogy in Ancient China: Examples from Liu Hui's Commentary on *Jiu Zhang Suan Shu*," *Educational Studies in Mathematics* **24**, pp. 345-357.

Skemp, Richard R. 1995. *The Psychology of Learning Mathematics*. Taipei: Jiu Zhang Press. A Chinese translation based on the revised 2nd edition (1987) published by LawrenceRelbaum Associates Inc., Publishers.

Van Der Waerden, B.L. 1983. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*. Berlin / Heidelberg / New York / Tokyo: Springer-Verlag.

Wagner, Donald B. 1979. "An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid," *Historia Mathematica* **6**, pp. 164-188.

Wu Wenjing 1981. "Chu Ru Xiang Bu Yang Li (In-Out Principle)," in Wu Wenjing ed. *Jiu Zhang Suan Shu Yu Liu Hui (Jiu Zhang Suan Shu* and Liu Hui) (in Chinese) (Beijing: Beijing Normal University Press), pp. 58-75.

MATEMATICA SEM FRONTEIRAS

Cândida Queiroz Moreira, Universidade do Porto

Não obstante ser considerada uma linguagem universal, a Matemática constitui na prática algo inacessível à maioria dos alunos e do público em geral. A Matemática goza, de facto, de uma fama terrível, e muita gente comunga da opinião de que a aptidão para esta disciplina é coisa rara. Como afirma Dias Agudo (1995), "vivemos numa época em que se generalizou a ideia de que a Matemática é assunto árido, desumanizado, desenvolvido por uma pequena minoria, essencialmente jovem que usa uma linguagem demasiado hermética para ser entendida por não iniciados" (p. 14).

Esta comunicação é um breve relato de uma iniciativa com o objectivo de desfazer tal tipo de crenças. A ideia passa, essencialmente, por apresentar uma *Matemática sem Fronteiras* - uma visão global da Matemática, cruzando espaços geográficos e o tempo, organizada mas aberta, que integra em si ramificações múltiplas, e que vale tanto por si própria como pelas ligações com outras áreas do saber. *Matemática sem Fronteiras* tem a intenção, também, de simbolizar que a esta ciência podem ter acesso todos, independentemente da idade, sexo, raça e classe social. Finalmente, o nome, a lembrar um conhecido programa televisivo, procura chamar a atenção para o facto da Matemática poder ser um veículo de diversão, lazer e criatividade.

A iniciativa foi levada a cabo no âmbito da disciplina de Metodologia da Matemática, do 4° ano da licenciatura em Matemática - Ramo Educacional, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (com a participação voluntária e espontânea dos alunos dessa disciplina), e teve a cooperação de professores da Escola Secundária de Valongo. Dirigiu-se, inicialmente, aos alunos e professores desta Escola, mas pretende-se estendê-la a um público mais vasto

Origem da Ideia

São várias as tentativas que têm sido feitas no sentido de popularizar a Matemática, de a tornar mais acessível e atractiva (para uma breve resenha de tais tentativas, ver Howson e Kahane, 1990). É evidente que se trata de uma tarefa colossal para a qual não se poderão esperar triunfos rápidos. Mas é importante continuar a tentar.

Porque será que a Matemática tem a fama de Monstro? Para Pereira Gomes, por exemplo, "a Matemática, no consenso geral, encontra-se transformada num mito, longe e acima das ciências do real, fruto do pensamento puro e sem erro, símbolo da exactidão e do indiscutível" e "matemáticos há que para isso contribuem, aliás, de vários modos, inocentemente" (p. 179).

Uma outra causa provável está no carácter autoritário, abstracto e mecanicista que é frequentemente transmitido através das aulas da disciplina. É nas escolas que se desenham as conotações, embora haja, naturalmente, outras razões cúmplices deste estado de coisas.

Que Matemática se ensina nas escolas? Uma Matemática acabada, eterna, velha como os caminhos. Nos últimos anos, tem havido mudanças e contra-mudanças nos curricula da disciplina, têm-se vivido experiências e contra-experiências, mas, no reforma do ensino da Matemática se não houver uma profunda modificação da própria concepção do que é a Matemática e do que significa fazer Matemática, nomeadamente entre os professores da disciplina.

Nas aulas de Matemática, ao contrário do que acontece noutras disciplinas, não se tacteia, não se hesita, não se procura. Na aula típica de Matemática, "o professor explica, explica, e os alunos não percebem nada". Torna-se por demais evidente que não basta saber Matemática para fomentar nos aprendizes desta ciência o gosto pelos conteúdos e actividades da mesma.

Nesta perspectiva, a formação dos professores da disciplina assume um papel crucial. É imprescindível (1) suscitar, entre aqueles que têm (ou que irão ter) a seu cargo ensinar a disciplina, uma reflexão sobre as suas representações acerca do que é a Matemática, (2) propocionar-lhes a oportunidade para se debruçarem sobre a essência desta ciência, a sua história e filosofia, e o processo de criação do conhecimento matemático, (3) estimulá-los a entrarem no universo fascinante da resolução de problemas.

Estas têm sido, resumidamente, algumas das finalidades fundamentais a que me propus no contexto da disciplina de Metodologia da Matemática. É assim que nela se têm sido tratados temas ligados à História e Filosofia da Matemática, tentando fazê-lo de forma a transformar o acto pedagógico em algo animado por um gosto de procura e construção do saber, não o impondo somente. A aposta na criatividade dos estudantes e o desenvolvimento de espírito de equipa são outras duas opções pedagógicas e metodológicas de suma importância. Como corolário desta orientação, os estudantes elaboram, fazendo parte da sua avaliação, dois projectos de grupo. Um, envolvendo a pesquisa e discussão de um tema teórico situado no âmbito do ponto 2) acima, tem permitido a incursão no mundo, às vezes desconhecido, da Matemática. No segundo, os estudantes são instigados, para além de resolverem uma actividade matemática que lhes é sugerida, a utilizarem-na como ponto de partida para a exploração de novas questões e ideias.

Trata-se de uma viagem duplamente iniciática que os estudantes fazem na minha companhia. O ambiente cultural que se tem criado com este tipo de actividades é extremamente rico. Os estudantes entusiasmam-se e interessam-se por elas (inevitavelmente, motivados, também, pela ideia de obterem um boa nota).

E os resultados têm sido, em alguns casos, admiráveis. Daí o desejo de os dar a conhecer a um público novo. Nos anos anteriores, foram divulgadas em seminários, abertos a todos os interessados, realizados na Faculdade de Ciências. No ano corrente, avançou-se com a ideia de a divulgação ser feita não apenas na Faculdade, mas em escolas secundárias. E a ideia não levou muito tempo a pôr-se em prática. Foi assim que nasceu *Matemática sem Fronteiras*.

Uma Viagem ao Mundo da Matemática

Regressando no tempo uns milhares de anos, e mergulhando as suas raízes nas civilizações da Antiguidade, a Matemática começou por corresponder a questões de carácter prático e utilitário. Depois transformou-se, na Grécia Antiga, na ciência da dedução por excelência. Platão empurra-a para o domínio das ideias, dando dela uma imagem de uma sabedoria destinada apenas para os espíritos mais finos. Como escreve Serres (1989), pela mão de Platão, "o pensamento algorítmico é absorvido pelo esquecimento e apenas constitui, pelas suas cantilenas, a pré-história da ciência" (p. 101). Trata-se de um saber que o platonismo despreza. A Matemática passa a ser sinónimo de geometria, os cálculos são substituídos por demonstrações.

O grande divulgador desta visão é Euclides (c. 300 AC). Nos *Elementos*, Euclides oferece o modelo da Matemática Pura, totalmente não aritmética, baseada apenas num conjunto de definições e postulados das quais seguem, por via da demonstração lógica, um sem número de proposições. De forma despojada e severa, Euclides expõe, em 13 livros, a totalidade do saber matemático acumulado, até então, no mundo Grego. No esquecimento parecem ficar os contributos matemáticos de civilizações orientais, como a Chinesa e a Hindu. É assim que, por exemplo, o resultado mais famoso e mais conhecido da Matemática elementar, o Teorema de Pitágoras, com que Euclides termina o livro I, é deduzido rigorosamente a partir das proposições que o precedem, como que ignorando o facto desse resultado ser conhecido e aplicado, muito antes de Pitágoras, naquelas civilizações orientais.

Ainda hoje, somos tentados a deixar de parte tais contribuições. Tal repousa, pelo menos em parte, sobre um imperialismo cultural que permite o controlo do poder. No entanto, não fora o trabalho de matemáticos chineses, hindus e árabes, e o renascimento da Matemática na Europa, no século XIV, não teria sido, muito provavelmente possível.

Uma viagem ao mundo da Matemática tem de incluir necessariamente uma visita às experiências matemáticas dessas civilizações. A este respeito, convém salientar que o mundo da matemática não ocidental não se confina aquelas três civilizações. Katz (1993), na sua *Introdução à História da Matemática* mostra-nos, ainda de que forma bem rápida, a existência, ao longo dos séculos, de uma Matemática à volta do mundo, desde a América Central ao Sul do Pacífico, passando pela África negra. A Matemática, ou a *Etnomatemática* se se preferir, surge numa mutiplicidade de regiões com relações de contiguidade com uma variedade de saberes e de actividades humanas, e cada uma destas tradições matemáticas fornece o seu lote de questões e problemas.

Passando para um plano mais próximo, temporal e culturalmente, vale a pena lançar os olhos sobre o estado da Matemática nos séculos XIV e XV, no quadro europeu, para constatar que esta tinha um carácter eminentemente prático e fazuia-se essencialmente nas ruas. Diz Benoit "as inovações essenciais aparecem fora da Universidade onde o lugar dos matemáticos continua limitado e se orienta mais para o estudo dos movimentos" (p. 36).

Já no século XVII, um período áureo no desenvolvimento desta ciência, as manifestações de actividade matemática, como Goldstein (1989) sugere, não estavam nem unificadas nem isentas de contradições. A par de desenvolvimentos matemáticos que pareciam não ter qualquer utilidade, arquitectos, engenheiros, artilheiros e especialistas da navegação utilizavam resultados matemáticos, e, por vezes, desenvolviam outros. Para além disso, existia uma actividade matemática de carácter eminentemente lúdico na qual se envolviam os nobres para, de acordo com um cronista da época, "contentar o seu espírito, para empregar honestamente o tempo e ter com que entreter uma companhia com conversas convenientes e no entanto recreativas" (citado em Goldstein, 1989, p. 100).

Na segunda metade do século XIX, assiste-se à reapropriação e consagração do modelo matemático da Antiga Grécia. Tal resulta, por um lado, das tentativas associadas com o desvendar de um dos mistérios dos *Elementos* de Euclides - o do postulado das paralelas, e por outro lado do trabalho de Cantor sobre os conjuntos infinitos. O choque causado pelo aparecimento tanto de Geometrias não euclideanas como de conjunto infinitos leva os matemáticos a questionarem-se sobre a natureza da Matemática e a validade das suas verdades.

Este estado de espírito conduz a uma verdadeira revolução nesta Ciência, iniciada pelo matemático alemão Frege, que pretende reduzir a Aritmética à Lógica, e vai ao ponto de estabelecer, no cerne da sua obra os *Fundamentos da Artimética,* uma definição rigorosa para o número *um*.. O logicismo, como este movimento ficou a ser conhecido, é continuado, já no corrente século, por Russell e Whitehead. Em oposição a esta corrente, surgiriam, entretanto,variadas reacções e outras escolas fundacionais, tais como o intuicionismo de Brower e o formalismo de Hilbert. No entanto, também nas posições destes matemáticos se tratava de repôr o rigôr e o purismo.

Os objectos básicos da Matemática, número e recta, deixam, assim, de ter o seu carácter familiar para passarem a ser entendidos como seres abstractos e, desta forma, as relações da Matemática com o mundo real deixaram de fazer sentido. Para além disso, como afirma Goldstein (1989), "as matemáticas ditas 'puras' implantaram-se preferencialmente às disciplinas orientadas para aplicações práticas imediatas" (p. 119).

É este o estado da Matemática na primeira metade do século XX. Naturalmente, esta viagem, que reflecte a história e filosofia da Matemática, ao longo e através do tempo, não termina aqui. Mas, como em qualquer viagem, é importante fazer-se uma paragem. A segunda etapa, bem diferente da primeira, constituída por *Desafios Matemáticos* virá a seguir.

Também, em *Matemática sem Fronteiras* se distinguem dois itinerários de características distintas. O primeiro é o equivalente a uma visita guiada. Corresponde a uma exposição onde se proporciona uma expressiva visão do lugar e forma que a Matemática tem ocupado através dos séculos em diferentes culturas. O percurso começa com *O Teorema de Pitágoras* e acaba com *Os Desenvolvimentos Recentes da Matemática.* No caminho ficam outros locais dignos de visita, como por exemplo, *A Matemática na China* e *Etnomatemática.* Não sendo possível passar em revista todos esses locais, limito-me a chamar a atenção para um - *Mulheres e Matemática* - com tudo o que simbolicamente ele implica.

Mulheres e Matemática

A exemplo do que acontece em outras domínios, a participação activa das mulheres na construção do mundo da Matemática foi e continua a ser relativamente diminuta. Para além disso, nenhuma mulher obteve, ainda, a reputação de um Gauss ou de um Euler.

Para melhor compreender tal situação, é importante lembrar as tentativas recorrentes de impedir as mulheres, ainda neste século, de leccionarem Matemática nas Universidades. Jamais se saberá ao certo quantas mulheres foram deixadas de fora do mundo da Matemática pelo simples facto de serem mulheres.

A História da Matemática, porém, fornece exemplos em número suficiente para refutar a ideia de que esta cência é apenas um assunto para homens por excelência. É assim que em *Matemática sem Fronteiras* se analisam três ou quatro exemplos flgrantes de mulheres matemáticas com considerável prestígio: Hypathia, Maria Agnesi e Sophie Germain. Hypathia, que viveu em Alexandria no século IV da nossa era, é comummente apontado como o caso da primeira mulher a distinguir-se no campo da Matemática. A sua obra é tanto mais digna de registo quanto ela surge numa época de grande crise para o mundo matemático ocidental, estando mesmo a morte trágica de Hypathia, por assassínio, associada ao fim da tradição da matemática grega de Alexandria.

É preciso esperar mais de 1200 anos para encontrar outras referências de mulheres matemáticas dignas de registo. Está-se em pleno século XVIII, e a Matemática recuperara já o prestígio que reconhecera noutros tempos. Em Itália, uma rapariga, filha de um professor de Matemática da Universidade de Bolonha, vê desde muito cedo traçado o seu destino como matemática. Encorajada pelo pai, tal como Hypatia séculos atrás, Maria Agnesi (1718-1799) estuda obras matemáticas, e acaba por publicar alguns trabalhos que lhe granjeiam considerável prestígio junto das elites. Chega mesmo a ser convidada para ser professora de Matemática na mesma Universidade onde seu pai leccionara.

As coisas não se passam da mesma forma para outra mulher, Sophie Germain (1776-1831), na França. O seu exemplo é especialmente relevante já que mostra que a via familiar não é a única a dar acesso ao desenvolvimento de actividade matemática entre as mulheres. Sem qualquer apoio dos pais, esta mulher viu-se, em virtude do seu sexo, afastada de uma formação superior. Não obstante este contexto pouco favorável, Sophie consegue estudar e fazer afirmar a sua atracção pela Matemática, tendo-se correspondido com alguns matemáticos notáveis, entre os quais Gauss. O receio das dificuldades que poderia ter que enfrentar pelo facto de ser mulher leva-a a fazê-lo sob um pseudónimo. Para apreciar o seu valor como matemática, observe-se o que Gauss disse a seu respeito, ao saber que se tratava de uma mulher: "deve ter sem dúvida a mais nobre coragem, um talento bastante extraordinário e um génio superior" (citado em Katz, 1993, p. 591)

Desafios Matemáticos

Todos os anos, um vasto corpo de teoremas, práticas e conceitos que fazem parte da Matemática é publicado nas revistas da especialidade. A Matemática está viva e fecunda. Mas vive, na maior parte dos casos, no Éden onde é criada, praticamente isolada do mundo que a rodeia.

De quando em vez, surge uma notícia nos jornais a dar conta de algum desenvolvimento importante desta ciência. Uma, bastante recente, teve honras de primeira página: O Último Teorema de Fermat tinha sido definitivamente provado. Numa outra, vinda a lume em 1992, podia ler-se: "Número primo com 227832 algarismos. Recorde matemático". E autor da notícia acrescentava: "A descoberta não vai servir provavelmente para nada, mas tem o fascínio de todos os recordes", para, no fim da mesma, admitir que "existe uma utilidade para este tipo de entidades matemáticas: são elas que estão na base de muitos dos modernos códigos dos sistemas de criptografia utilizados nas telecomunicações" (Gerschenfeld, p. 25).

Que a Matemática tem mudado é inquestionável. No entanto, não obstante estas notícias, para o público não especializado a Matemática está morta. Isto deve-se, por um lado, ao facto da Matemática se fazer no silêncio e isolamento dos gabinetes das Universidades, e, por outro lado, às suas aplicações se tornarem cada vez mais invisíveis ao cidadão comum. Nas escolas secundárias, bem os professores dizem aos seus alunos que a Matemática é muito útil e está em toda a parte. No entanto, a realidade dos trabalhos efectuados nas aula da dsciplina não faz mais do que favorecer a ideia de que tal é falso.

É bem possível, no entanto, que se esteja no limiar de mais uma revolução matemática. Neste último quartel do século XX, o computador, olhado primeiro com alguma suspeição (talvez por ser um produto com raízes nas ideias de matemáticos) massificou-se e popularizou-se. Não obstante existirem matemáticos que afirmam a sua desconfiança acerca do uso do computador na sua disciplina (Katz,1993), parece que é cada vez maior o número matemáticos que o usam não só para costruir exemplos como também para construir provas. Devlin (1990) afirma mesmo que: "a maioria reconhece que a chegada do computador transformou não só a maneira como a investigação em Matemática é levada a cabo, mas também o próprio conceito do que é considerado uma demonstração" (p. 149).

Qualquer que seja o futuro, a História não poderá deixar de registar aquele dia, em 1976, em que dois homens completaram a prova do Teorema das Quatro Cores com o auxílio do computador.

A propósito de computadores, vale a pena referir que investigação e ensino em Matemática aparecem aqui mais estreitamente ligados. Neste segundo domínio, o nome de Papert (1980) paira nos artigos sobre o assunto, pondo em relevo a idea de que o computador permite ensinar e aprender Matemática duma forma que vai muito para além de fazer exercícios rotineiros. De facto, os computadores (e as calculadoras) ao serem capazes de fazer em segundos aquilo que os professores levavam horas a ensinar, exigem o repensar as 'coisas', e trazem com eles a possibilidade de recuperar, na sala de aula, uma das facetas de fazer Matemática - a de experimentar e fazer conjecturas.

Sob muitos aspectos, a utilização dos computadores em Matemática ilustra os temas fundamentais de Lakatos: derrube do método hipotético-dedutivo puro e simples, e apelo ao uso de estratégias heurísticas, até à ideia da falibilidade desta ciência. Discípulo de Popper e seguidor de Polya, Lakatos (1976), na sua obra *Provas e Refutações*, ao recriar a história da demonstração da igualdade de Euler, não só tenta mostrar a realidade do trabalho dos matemáticos, como também pretende transformar a imagem da Matemática.

A segunda etapa da viagem ao mundo da Matemática, a que são convidados os estudantes de Metodologia da Matemática, põe exactamente em relevo os aspectos mais actuais desta ciência, e sugere, ao mesmo tempo, que ela não é só feita por sábios. O objectivo principal deste itinerário é mostrar que a Matemática é acessível a todos, e que ela pode mesmo ser uma 'brincadeira de crianças'. A este respeito, vale a pena relembrar o exemplo deixado por Descartes, que fala de um seu criado como o aluno de Matemática mais talentoso que jamais teve.

Para medir o alcance do trabalho realizado, cito apenas dois ou três casos de verdadeiras explorações matemáticas, por eles levadas a cabo, por terras nunca dantes visitadas: *A curva do Dragão, O Enigma MU, O Jogo de Ramsey*. Também, em *Matemática sem Fronteiras*, os alunos da Escola Secundária de Valongo, tiveram a oportunidade de se aventurar nestas paragens.

Num ambiente criado à imagem do programa televisivo *Jogos sem Fronteiras*, e constituídos em equipas de seis elementos que ostentavam nomes relacionados com a Matemática (como por exemplo, *As Catetas* ou *Os Casos Notáveis*), os alunos do 7° ao 12° ano de escolaridade, entregaram-se, com interesse e empenho semelhantes aqueles que estamos habituados a ver nos jogos televisivos, à procura das soluções dos nove *Desafios Matemáticos* que lhe foram propostos. De realçar o facto de que não obstante a imagem de entretenimento que era dada pelos jovens, os desafios não deixaram de ser verdadeiras tarefas matemáticas.

A aventura mais significativa, pelo entusiasmo que gerou, foi aquela levada a cabo *Na Terra dos Mentirosos*. É sobre ela que me demorarei um pouco a seguir.

Na Terra dos Mentirosos

Desde Aristóteles e até à segunda metade do século passado, a Lógica foi uma preocupação dos filósofos. Com a obra *As Leis do Pensamento* de Boole, ela passou a fazer parte do território dos matemáticos. Bertrand Russell vai mesmo ao ponto de dizer que "a Matemática Pura foi descoberta por Boole" (citado em Tymoczko e Henle, 1995, p. 404).

Dieudonné (1996) refere-se à Lógica como um dos domínios de investigação de ponta do século XX, notando nomeadamente que ela passou a ter um campo de aplicação preferido em computação e em teoria dos autómatos. Por outro lado, como se pode ler na contracapa de um livro recente de Tymoczko e Henle (1995), "tudo desde puzzles, paradoxos, e provas matemáticas até excertos de debates, regulamentos, e cartoons serve para mostrar como a lógica está ao serviço de filósofos, matemáticos, publicitários, investigadores no domínio da ciência dos computadores, políticos, e outros".

A Lógica de que se ocupam estes últimos autores, rudimentos de lógica, formal e informal, está em toda a parte. Eis-nos, pois, perante uma Matemática, ou pelo menos parte dela, global, e, portanto, acessível.

Na Terra dos Mentirosos situa-se no campo da Lógica, e foi sugerida pelo matemático Raymond Smullyan. no seu livro *Forever Undecided* (com o qual o autor procura levar os leitores a familiarizarem-se com o trabalho de Gödel). O problema em questão diz respeito a um clube frequentado por habitantes, homens e mulheres, dos planetas Vénus e Marte, os quais são indistinguíveis pela aparência. Apenas o conhecimento do facto dos homens de Marte dizerem sempre a verdade e as mulheres de Marte mentirem sempre, e os homens de Vénus mentirem sempre e as mulheres deste planeta dizerem sempre a verdade, dá ao visitante de tal clube uma pista que lhe permita saber quem é quem.

Não se tratou de um desafio duro para os estudantes de Metodologia da Matemática. Apoiando-se em conhecimentos prévios de Lógica, encontraram, sem grande dificuldade, uma solução para o problema proposto. Digno de registo foi o facto do grupo de estudantes a quem coube explorar este desafio ter sido capaz de transcender os limites do cenário dado e construir uma história, em banda desenhada, também, ela inspirada em pessoas que mentem sempre e outras que dizem sempre a verdade. O argumento, baseado nos personagens dos Irmãos Dalton (que no caso criado eram gémeos), envolve um assassínio, e a grande questão a resolver é descobrir quem é o assassino.

É preciso dizer que o trabalho destes estudantes não se limitou à criação desta história. Tendo em atenção a população a que, potencialmente, se destinava - alunos do Ensino Básico e Secundário, eles criaram uma excelente banda sonora, em que as suas próprias vozes retratam com rigôr e precisão os pormenores da banda desenhada. O estilo, apesar de nada ter de matemático, mostrou o seu valor. Com efeito, ele contribui de modo decisivo para 'agarrar' os alunos da Escola Secundária de Valongo e conduzi-los a encontrar a solução para o problema.

É Preciso Começar...

Pode-se dizer que a iniciativa *Matemática sem Fronteiras* constituiu um verdadeiro sucesso. Mantendo fidelidade à acepção do nome, pretendeu-se, e julgo que se conseguiu, apresentar a Matemática na sua multifacetada pluralidade, reagregando o que muitas vezes é separado, cruzando várias culturas, articulando o respeito pelo passado criativo com a possibildade de descobertas mais ou menos contemporâneas, abandonando, enfim, as separações entre fronteiras.

A experiência parece ter confirmado completamente as minhas conjecturas. A metodologia seguida na disciplina de Metodologia da Matemática permite que os estudantes vão tomando, pouco a pouco, posse daquilo que parece ser um novo território desta disciplina. Não se trata da substituição de um território por outro, mas tão somente dum alargamento de fronteiras. Por outro lado, a iniciativa levada a cabo na Escola Secundária de Valongo ratificou a ideia de que a Matemática não tem que ser necessariamente entediante, e reforçou antes a perspectiva de que é possível apresentá-la de forma excitante capaz de atrair e entusiasmar os alunos.

Para os alunos da Escola Secundária de Valongo que participaram nos *Desafios Matemáticos*, a experiência foi, na quase totalidade, muito apreciada. Eis aqui algumas das suas opiniões:

> Achei uma ideia incrível, adorei participar e acho que deveriam fazer isto mais vezes. Dou nota 20 (escala 0-20).

> Penso que estes jogos foram muito divertidos. Deviam realizar-se mais vezes. Convivemos com colegas e pofessores. Foi o MÁXIMO.

> A Equipa Mersenne adorou participar em todos os jogos apesar de não ter tido os melhores resultados. Achamos muito interessante, e o jogo que mais gostamos foi o último [Na Terra dos Mentirosos]. Pelo simples facto de se notar o empenho dos professores (ou dos potenciais professores) neste projecto, gostamos muito. Foi uma experiência inovadora, o que é raro dada a objectividade da disciplina e as escassas aulas para despertarem o interesse dos alunos. Concluindo: ADORAMOS e esperamos que alunos doutras escolas tenham a mesma sorte.

Muito do sucesso da iniciativa ficou-se a dever ao seu talento e empenho dos estudantes de Metodologia da Matemática, futuros professores da disciplina..Também, estes foram extremamente favoráveis nos seus comentários. Para estes, penso, a soma dos valores que esta iniciativa promoveu vai para além da imagem da Matemática que lhe estava subjacente. A cultura criada, através do desenvolvimento da sua responsabilização, determinação e capacidade de aceitar riscos é um activo pouco visível e dificilmente mensurável, mas constitui sem dúvida um precioso valor para o futuro.

Na sequência disto, parece haver algumas razões para estar optimista. Já foram mesmo dado novos passos no sentido de garantir a continuidade da iniciativa. Mas, na realidade, tudo isto é de valor limitado. O grande desafio é encontrar maneiras de estender o espírito de *Matemática sem Fronteiras* a todo o currículo e a todas as aulas de Matemática. Para muitos trata-se, sem dúvida de uma missão impossível, já que, em boa verdade, tal meta constitui o oposto absoluto da concepção da escola dos tempos modernos. Para mim, continuo a ter por lema as palavras do poeta: "É preciso acreditar...".

Referências

Benoit, P. (1995). Cálculo, Álgebra e Comércio. Em M. Serres, *Elementos para uma História das Ciências, II Vol.* (pp. 7-36) (Tradução para língua portuguesa de *Éléments pour une Histoire des Sciences*). Lisboa: Terramar.

Devlin, K. (1990). *Mathematics: The New Golden Age*. London: Pinguin Books.

Dias Agudo, F. (1995). Matemática: Bela ou Monstro. Em J. Coelho (Ed.), *Matemática e Cultura II* (pp. 13-25). Lisboa: Centro Nacional de Cultura e SPB Editores.

Dieudonné, J (1996). Mathematics of our Day. Em *The Mathematical Gazette*, 80(487), 45-53.

Gerschenfeld, A. (1992). Recorde Matemático. Em *Público*, 29/3, 25.

Goldstein, C. (1995). O Mister dos Números nos Séculos XVII e XIX. Em M. Serres, *Elementos para uma História das Ciências, II Vol.* (pp. 97-121) (Tradução para língua portuguesa de *Éléments pour une Histoire des Sciences*). Lisboa: Terramar.

Howson, A.G. & Kahane, J.-P. (Eds.) (1990). *The Popularization of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Katz, V. (1993). *A History of Mathematics: An Introduction*. New York: Harper Collins College Publishers.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Pereira Gomes, A. (1995). O Elogio do Erro. Em J. Coelho (Ed.), *Matemática e Cultura II* (pp. 143-182). Lisboa: Centro Nacional de Cultura e SPB Editores.

Serres, M (1995). Prefácio. Em M. Serres, *Elementos para uma História das Ciências, I Vol.* (pp. 7-22) (Tradução para língua portuguesa de *Éléments pour une Histoire des Sciences*). Lisboa: Terramar.

Smullyan, R. (1987). *Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel*. Oxford: Oxford University Press.

Tymoczko. T. & Henle, J. (1995). *Sweet reason: A Field Guide to Modern Logic*. New York: W. H. Freeman and Company.

NOMBRES ET OPERATIONS : DE LA TRANSFORMATION CONJOINTE DE LEURS SIGNIFICATIONS

M.J. Durand-Richard. CNRS. Equipe 318. REHSEIS. PARIS

En mathématiques comme dans la langue naturelle, la notion de nombre est intuitivement associée à celle d'entier. Et cette association est aussi prégnante dans la phase d'acquisition de cette notion que dans la façon dont sont axiomatiquement construits les ensembles de nombres (négatifs, fractionnaires, complexes, ...) à partir des entiers. Historiquement, l'élaboration de ces entités nouvelles a plusieurs fois bousculé les significations du moment, relatives à la "nature" de ce qu'on entend alors par "nombre", et aux opérations dont il est censé relever. Le processus d'abstraction qui accompagne l'élimination de ces frictions présuppose certaines analogies opératoires, avant de devoir renoncer à certaines des significations antérieures. C'est ce renoncement, les transformations qu'il engage, et la restructuration de ces analogies, que je présente ici sur quelques exemples :
- comment, dans le monde grec, la notion de grandeur tend à résoudre les problèmes issus des visées ontologico-opératoires de la conception pythagoricienne du "nombre", et comment elle installe la "proportion" au cœur des opérations,
- comment, chez les mathématiciens arabes, l'extension des méthodes géométriques et algébriques de résolution de problèmes conduit à qualifier de nombres d'autres entités que les entiers,
- comment, du XVIème au XIXème siècle, l'écriture de quantités négatives ou imaginaires aboutit aux définitions algébrico-géométriques des opérations.

I. LA TRADITION EUCLIDIENNE ET LE CONCEPT DE GRANDEUR

La notion de nombre comme celle de grandeur s'enracinent dans la tradition des *Eléments* d'Euclide (IVème-IIIème siècle av. J.C.), auxquels la rigueur démonstrative confèrera valeur canonique jusqu'au XIXème siècle. Cette double dénomination correspond à une distinction d'ordre épistémologique, isue de la tentative de résolution d'une véritable crise de la rationalité.

La crise de la rationalité dans les mathématiques grecques

Elle intervient parce que les Pythagoriciens établissent qu'il n'existe aucun rapport d'entiers entre la diagonale et le côté du carré. Cette absence de représentation numérique entre en contradiction, non seulement avec l'existence constructible de la diagonale du carré, mais avec leur devise : "Toutes choses sont nombres". Pour les Pythagoriciens en effet, le nombre ne renvoie pas à l'art de compter, considéré comme un artifice de l'ordre de la pratique, mais à une conception métaphysique de l'entité numérique, porteuse d'une interrogation philosophique fondamentale sur l'origine et l'engendrement des choses[1]. Si l'arithmétique pythagoricienne représente les nombres par des assemblages de points, les propriétés qu'ils rendent manifestes ne relèvent pas seulement de la théorie des nombres. Ainsi, la disposition des points en triangle à partir de l'unité, donne les "nombres triangulaires", 1, 3, 6,

[1] Guthrie, W.K., 1965. *A History of Greek Philosophy*, Cambridge University Press, p. 83-88.

10, etc., qui correspondent aux sommes des entiers consécutifs, et les Pythagoriciens savent montrer qu'ils correspondent au demi-produit du dernier de ces entiers par le suivant[2]. Mais chaque point représente en fait une monade, une unité substantielle envisagée comme "cause" (*arché* en grec) et principe générateur, donc porteur en ce sens de toutes ses potentialités de permanence et de changement[3].
Pour la philosophie pythagoricienne, la première à envisager l'univers comme un *cosmos* harmonieux et parfait, l'intelligible, associé à l'idée d'ordre et de mesure, se confond avec ce qui est limité et fini. Et ce sont les nombres (entiers) et leurs rapports qui expriment l'harmonie et la perfection de ce *cosmos*. Dans cette langue grecque où le terme *logos* (raison) désigne aussi bien le rapport d'entiers que ce qui est mis en rapport par le biais du discours, le fait de ne pouvoir exprimer en nombres le rapport de la diagonale au côté du carré menace l'existence même de toute pensée. Ce rapport est alors qualifié d'irrationnel, c'est-à-dire de non-calculable tout autant que d'impensable, et la doxographie le rapporte souvent comme un naufrage, pour signifier cet "univers redoutable de la démesure"[4].

La grandeur comme différenciation de l'ontologique et de l'opératoire

La résolution de cette crise aboutit à une différenciation radicale entre le champ de l'être et le champ de l'opératoire.
En philosophie, Aristote pose, pour tous les êtres, l'existence d'une nature comme principe même de son changement, qui est mouvement et qu'il définit comme médiation entre l'être en acte et l'être en puissance. Le continu est défini comme ce qui "est divisible en parties qui sont toujours divisibles"[5], une division dont la répétition n'est elle-même que potentielle, puisqu'Aristote précise que l'infini en acte n'existe pas et que les mathématiciens n'ont recours qu'à l'infini en puissance. La quantité étant un des modes de caractérisation de l'être, elle est grandeur lorsqu'elle est continue, et nombre lorsqu'elle est discontinue.
Au livre V de ses *Eléments*, Euclide ne définit pas ce qu'il appelle grandeur, mais définit sa mesure à l'aide d'une autre grandeur. Il ne précise pas ce qu'est le rapport ("logos") entre deux grandeurs homogènes (longueurs, surfaces, volumes) (déf. 3). Par contre, il caractérise la proportion, ou identité de raisons, par la célèbre définition 5, qui est au cœur de toutes les démonstrations concernant la proportionalité. Qualifiée d'analogie ("analogon"), elle s'énonce : "A est à B comme C est à D", et s'écrira A : B :: C : D jusqu'au XIXème siècle.
Déf. 5. Des grandeurs sont dites être dans le même rapport, *une première relativement à une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la*

---

[2] Dahan-Dalmédico, A., Peiffer, J., 1982, *Histoire des mathématiques, Routes et dédales*. Paris, Montréal, Etudes vivantes, Paris, Seuil, Points Sciences, p. 44.

[3] Vernant, J.P., 1962, *Les origines de la pensée grecque*. Paris, Quadrige, 4ème éd. 1981, p. 101.

[4] Jamblique, *Vie pythagorique*, 88; *De la science mathématique commune*, 25; in (éd.) Dumont, J.P., Delattre, D., Poirier J.L., 1988, *Les Présocratiques*, Paris, Gallimard, p. 76. Desanti, J.T., 1967, "Une crise de développement exemplaire : la "découverte" des nombres irrationnels, in (éd.) Piaget, J., *Logique et connaissance scientifique*. Paris, Gallimard, 439-64, p. 441.

[5] Aristote, 1926, *Physique*, Paris, Belles-Lettres, § 231a21-25, 231b11, 231b16-18, 232b4.

quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante [6].

Déf. 6. Et que les grandeurs qui ont le même rapport sont dites en proportion.[7]

La proposition 1 du livre X, qui permet d'obtenir, par une procédure finie, une grandeur plus petite que n'importe quelle grandeur donnée, rend opératoire ce continu qu'Aristote concevait comme divisible en parties toujours divisibles. Euclide l'utilise pour démontrer, par exemple, que "les cercles sont entre eux en raison double de leurs diamètres"[8]. Le contenu de ce livre V est conceptuellement suffisamment solide pour permettre à Euclide d'entreprendre la classification des grandeurs irrationnelles (livre X) et de démontrer rigoureusement certains résultats concernant l'aire du cercle, le volume de la pyramide et du cône (livre XII).

L'élaboration du concept de grandeur répond donc davantage à la nécessité de fournir un discours logique sur le continu qu'au projet de le soumettre aux opérations traditionnelles de l'art de compter; alors appelé logistique. Les opérations, surtout l'addition et la multiplication, interviennent essentiellement comme outils de transformation des proportions, et en rapport avec la relation d'ordre. En l'absence de signes pour les représenter, les opérations sont exprimées par les mots de la langue usuelle, qui les rattachent aux pratiques qui les ont fait naître, avec leurs limitations spécifiques. La somme de deux "droites" est une "droite", leur produit un "rectangle" ou un "volume", et on peut répéter une grandeur un certain nombre de fois. Il n'existe pas de définition générale du produit de deux raisons quelconques, seulement celui d'un rapport par lui-même, qui donne la raison doublée ou triplée, dans le seul cas des proportions continues. Et il n'est pas question d'additionner des rapports quelconques, ne serait-ce qu'à cause de la référence constante aux grandeurs, qui d'un rapport à l'autre, peuvent être de natures différentes. Le vocabulaire restera longtemps enraciné dans la géométrie, comme en témoignent les expressions "rectification d'une courbe"[9] ou "quadrature d'une surface"[10]. Jusqu'à l'établissement du symbolisme algébrique, du XVème au XVIIème siècle, les traités de mathématiques maintiendront cette référence, parlant de nombres carrés, de nombres cubes, de nombres plans et de nombres solides[11]. Et ce sont de telles les possibilités du devenir qu'associeront les premières extensions des puissances au-delà de la dimension 3, désignant par exemple "mil-mille" par "carré-cube"[12].

---

6 Cette définition est très difficile à comprendre en l'absence de quelques-unes de nos notations : Si A est à B comme C est à D, alors, deux équimultiples quelconques de A et C, comme nA et nC, sont dans le même ordre de grandeur que deux autres équimultiples queslconques de B et de D, comme mB et mD. Autrement dit, ou bien $nA>mB$ et $nC>mD$, ou bien $nA=mB$ et $nC=mD$, ou bien $nA<mB$ et $nC<mD$. Elle supplée, dans toutes les démonstrations concernant les propriétés des proportions, à la propriété caractéristique : "Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens", qui demeurera impensable tant que se maintiendra l'exigence de n'écrire que des raisons entre grandeurs homogènes.

7 Euclide d'Alexandrie, 1990-94, *Les Eléments*, traduction et commentaires par B. Vitrac, Paris, Presses Universitaires de France, 2 vol. parus, t. 2, livre V, 35-41.

8 Autrement dit que l'aire du cercle est proportionnelle au carré de son diamètre. La proportionalité permet de donner un résultat exact, en l'absence de toute connaissance précise sur le rapport de l'aire du cercle au carré de son rayon. Euclide-Peyrard, 1966, *Oeuvres*, traduction Peyrard, Paris, Blanchard, livre XII, prop. 2.

9 On recherche un segment de même longueur que cette courbe.

10 On recherche un carré de même aire que cette surface.

11 Euclide-Vitrac, ibid., t. 2, p. 321-27.

12 Cet exemple, qui présente une conception multiplicative de la dénomination des puissances, a l'intérêt de montrer que la dénomination additive habituelle ne va pas forcément de soi. Rashed, R., 1984, *Entre Arithmétique et Algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Les Belles-Lettres, p. 21.

La persistance de la dualité nombre-grandeur

A cette théorie des grandeurs, Euclide juxtapose une théorie des nombres exclusivement consacrée aux entiers, qui témoigne de la persistance d'une dualité continu-discontinu, d'ailleurs articulée sur une dichotomie géométrie-arithmétique. L'unité euclidienne reste monade indivisible. Et le nombre, défini comme multiplicité d'unités, devient synonyme d'entier positif supérieur ou égal à 2. Du point de vue opératoire, à la théorie des proportions pour les grandeurs correspond pour les entiers l'algorithme d'Euclide ou "anthyphérèse", qui permet de déterminer la "plus grande commune mesure" de deux nombres entiers.

Ainsi se trouve scindée pour longtemps la représentation du champ numérique en deux concepts aux spécificités épistémologiques distinctes. Dichotomie qui ne s'évanouira que lorsque les opérations auront été définies d'un point de vue strictement mathématique.

II. L'ALGEBRE ET L'EVOLUTION DU CHAMP NUMERIQUE

C'est à travers des méthodes de résolution de problèmes que les mathématiciens arabes puis européens vont élaborer un concept de nombre qui échappe aux limitations dans lesquelles il se trouve contenu dans les *Eléments*. Cette élaboration se produit au cœur des relations dialectiques qui s'établissent explicitement entre géométrie, arithmétique et algèbre[13].
Le monde hellénistique est déjà marqué par un déplacement des centres d'intérêt, en particulier des mathématiques vers l'astronomie. Les *Arithmétiques* de Diophante (IIIe s.) témoignent d'un rapprochement entre arithmétique et logistique. L'organisation socio-culturelle des pays de culture islamique dessine un contexte dans lequel les fonctions des "kuttab", ces écrivains et secrétaires des bureaux de l'administration, rapprochent l'arithmétique de problèmes économiques et juridiques (échanges commerciaux, arpentage des terres, succession)[14]. Du Moyen-Age à la Renaissance, les mathématiciens européens hériteront des travaux des mathématiciens arabes[15], d'abord grâce aux traductions latines de manuscrits arabes, comme celles de Jean de Tolède et de Gerbert de Crémone (XIIIème s.), puis grâce aux influences directes, qu'on trouve dans les ouvrages de Léonard de Pise dit Fibonacci (début XIIIème s.) et de Luca Pacioli (1445-1514).

L'extension des techniques opératoires

Les mathématiciens hellénistiques utilisent l'anthyphérèse pour trouver des approximations de rapports de grands nombres, voire de grandeurs

[13] Rashed, R., 1984, *Entre Arithmétique et Algèbre, Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Paris, Les Belles-Lettres, p. 9.

[14] Rashed, op. cit., p. 63.

[15] Les historiens des mathématiques ont coutume de désigner ainsi les mathématiciens ayant vécu et travaillé dans les pays de culture islamique entre l'Hégire (622) et le XIVème siècle, où l langue arabe est un facteur essentiel d'unification.

incommensurables[16]. Et les mathématiciens arabes, notamment al-Khayyam (~1048,~1131) développant les techniques de calcul, préféreront l'algorithme d'Euclide à la présentation du livre V. Ils identifieront un rapport à la suite des quotients ainsi obtenus, qui sont les termes de son développement en fraction continue; et leurs procédures d'approximation leur permettront de ramener le cas de l'incommensurabilité à celui de la commensurabilité. Le statut du rapport change : envisagé dans un autre contexte et avec des conventions mathématiques différentes, il devient, non plus une entité fondamentale à définir, mais une quantité à déterminer[17]. Sur le plan conceptuel, le rapprochement entre arithmétique et logistique est issu de la confrontation des systèmes de numération et des techniques opératoires que présente al-Khwarizmi (avt 800, ap. 847) dans son *Livre de Calcul Indien.* Non seulement cette confrontation rend manifeste la généralité et la nature abstraite du concept d'opération, mais le système décimal adopté ouvre la voie à des méthodes de calcul qui permettent de traiter entiers et rationnels selon les mêmes techniques opératoires, et qui interviennent aussi comme méthode d'approximation pour les grandeurs irrationnelles.

L'unification du nombre et de la grandeur en algèbre

L'extension du concept de nombre passe par la conceptualisation de ce qu'est une équation, par l'établissement de règles donnant les solutions, et par un nouveau transfert opératoire, appliquant aux irrationnels les règles d'opération d'abord étendues aux racines.

Dans *Le livre concis du calcul de l'algèbre et d'al-muqabala,* Al-Khwarizmi soumet aux mêmes méthodes de résolution des problèmes d'origine arithmétique, où la solution cherchée est un nombre entier, et des problèmes d'origine géométrique, où la solution cherchée est une grandeur. Et la solution d'une équation devient une entité spécifique. La résolution géométrique, conçue en s'inspirant du livre II des *Eléments* d'Euclide, est présentée comme la "cause" de la solution, donnée également par l'algorithme de résolution, énoncé sous forme de règle générale pour les équations du second degré. Par exemple, pour l'équation $x^2 + 10x = 39$, al-Khwarizmi énonce :

La règle en cela est que tu divises les racines en deux moitiés, dans ce problème (on obtient) cinq, que tu multiplies par lui-même, on a vingt-cinq, tu l'ajoutes à trente neuf, on a soixante-quatre; tu prends sa racine qui est huit, tu en retranches la moitié des racines, qui est cinq, il reste trois, qui est la racine du carré que tu cherches, et le carré est neuf [18]

Ainsi nait l'espoir d'atteindre toute grandeur par un algorithme, espoir que renforcera la symbolisation de l'algèbre au XVIème s. en lui substituant une formule.

Le développement des méthodes de l'algèbre par la géométrie

---

[16] Euclide-Vitrac, ibid., t. 2, p. 515 et 535.

[17] Euclide-Vitrac, ibid., p. 548.

[18] C'est-à-dire $\sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 39} - \frac{10}{2}$. Youschkevitch, A.P., 1974, *Les mathématiques arabes,* Paris, Vrin, p. 37.

Prolongeant l'étude systématique des équations et des puissances de l'inconnue, entreprise par Al-Karaji (fin Xème-déb. XIème s.), et systématisant le travail de traduction algébrique des problèmes géométriques posés par l'astronomie, Al-Khayyam (~1048,~1131) et al-Tusi (XIIème s.) aboutissent à une classification des équations du 3ème degré, dont la méthode de résolution est un mixte géométrico-algébrique. L'expression géométrique du problème est traduite algébriquement grâce à la définition, donnée pour la première fois, d'une longueur unité :
Toutes les fois que dans ce traité nous dirons : un nombre est égal à une surface, nous entendrons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné, et tel que chacune des parties de sa mesure soit égale au deuxième côté, je veux dire celui que nous avons supposé un [19].
Et la solution est donnée par une intersection de coniques dont l'existence est démontrée par des considérations algébriques sur les équations des courbes. La distinction entre nombre et grandeur demeure cependant.

C'est autour de l'inconnue que se réalise le rapprochement. Une fois qu'elle est nommée, on peut opèrer sur elle sans la connaître, en osant transposer pr analogie les opérations connues sur les nombres et sur leurs rapports. Al-Khwarizmi étudie ainsi l'application des lois élémentaires de l'arithmétique (multiplication, addition, soustraction, division, extraction de la racine carrée) sur les expressions algébriques. Il montre par exemple "comment multiplier les choses (les inconnues), qui sont les racines, les unes par les autres, si elles sont seules ou si elles sont ajoutées à un nombre, ou si on en soustrait un nombre, ou si elles sont soustraites d'un nombre", soit, avec nos notations, $(a\pm bx)(c\pm dx)$, où a, b, c, d sont des rationnels positifs. Si les exemples d'équations proposées dans l'ouvrage d'algèbre d'al-Khwarizmi ont tous des cœfficients rationnels et des racines entières, il y est cependant fait référence, pour les équations de la forme $x^2 = q$, aux irrationnelles quadratiques, nommées "racines muettes ou aveugles" (**gidr assam**) à partir de la traduction du grec αλογοζ, "inexprimable par la parole". C'est cette expression que Gérard de Crémone traduira par le latin *surdus*, et qui donnera la dénomination de "nombres sourds" attribuée aux irrationnels jusqu'au XIXème siècle[20]. De manière systématique chez les successeurs d'al-Khwarizmi, les techniques de calcul développées sur les inconnues sont transférées analogiquement aux irrationnels.

Toutes ces équations algébriques sont donc résolues dans un domaine numérique issu de l'extension technique des opérations de l'arithmétique. La liste des formes canoniques, donnée aussi bien pour les équations du 2ème que du 3ème degré, montre que seuls les cœfficients positifs sont pris en compte dans la formulation des équations, et qu'il n'est pas question d'oser égaler le premier membre à zéro. C'est là un blocage conceptuel à l'écriture d'une forme unique de l'équation de degré quelconque, et à l'acceptation, a fortiori, de racines négatives, un blocage qui perdure depuis les travaux babyloniens sur ce qui correspond à l'équation du 2d degré, et qu'on retrouve aussi bien chez Diophante que chez les mathématiciens

[19] Djebbar A. & Rashed R. (éds), 1981, *L'œuvre Algébrique d'al-Khayyam*, University of Alepp, I.H.A.S., Sources and Studies in the History of Arabic Mathematics, p. 14-16 et 20.
[20] Youschkevitch, ibid., p. 39.

indiens, ceux-ci osant écrire des solutions négatives, mais s'y arrêtant. Même l'utilisation de cœfficients négatifs chez Al-Karaji reste marginale.

DE LA LEGITIMATION GEOMETRIQUE DE L'ALGEBRE A LA TRANSFROMATION DU SENS DES OPERATIONS

La symbolisation de l'algèbre entreprise en Europe du XVème au XVIIème siècle, d'abord par les écoles allemande et italienne, ne fera que renforcer cette audace dont est porteuse l'opérativité de l'inconnue, support de toutes les promesses d'extension du calcul[21]. De ce fait, il n'est pas fondamentalement étonnant que ce soit dans la lancée de cette production foisonnante de symboles, que les mathématiciens italiens osent utiliser les écritures dépourvues de signification que constituent les formules de Cardan (1501-71) dans le cas irréductible.

Descartes et la légitimation géométrique de l'algèbre

Parce que les formules de résolution de l'équation du 2d degré livrent explicitement soit des solutions positives, soit des solutions négatives, soit des solutions impossibles, il est relativement simple de concevoir que les solutions négatives ou impossibles aient pu être tout simplement délaissées comme non conformes au cadre de pensée d'une époque. Le problème est tout autre avec l'équation du 3ème degré, $X^3=pX+q$, puisque la formule de Cardan,

$X = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$, produite par les algébristes italiens de la Renaissance, fournit des solutions réelles par addition de racines impossibles, obligeant du même coup à reconnaître à ces quantités une certaine forme d'existence. Bombelli (1526-72) donne dès 1572 une règle des signes portant sur leur multiplication. Et Girard (1595-1632) énonce en 1629 une conjecture qui va déterminer le champ de l'algèbre pour les deux siècles à venir : "toute équation de degré n doit avoir exactement n racines". Elle marque l'intégration de ces racines impossibles à la pratique du mathématicien. C'est désormais au niveau de leur mode de légitimation que se situe l'enjeu des débats.
Si *La Géométrie* (1637) de Descartes (1596-1650) donne à l'algèbre l'aspect que nous lui connaissons, elle légitime toutes les pratiques algébriques par l'existence corrélée d'opérations sur les grandeurs, à partir de l'affirmation du choix arbitraire d'une unité. Ce faisant, elle fige la légitimation des quantités dans une forme de représentation qui est celle d'une géométrie statique. Si les racines négatives d'une équation, qui peuvent devenir de "vraies racines" grâce à un changement de variables, sont alors qualifiées de "fausses", les racines impossibles, qualifiées "d'imaginaires", échappent, dans ce contexte, à tout recours au réel. Si Cardan parlait à leur sujet de "torture morale", si Bombelli les qualifiait de "sophistiquées", Girard d'"irrépéribles", Descartes les rejette dans le domaine de l'imagination. Elles sont provisoirement condamnées à n'exister que dans le langage, à n'être considérées que comme un artifice de calcul. Et ceux qui, sur les traces de Léonard

21 Cette algèbre naissante a été qualifiée, préalablement aux travaux de François Viète (1540-1603), d'algèbre syncopée, parce que l'inconnue y est d'abord symbolisée par son absence, seuls ses exposants étant écrits.

Euler (1707-83), les qualifient d'"impossibles", y voient la manifestation de l'impossibilité de résoudre les problèmes où elles interviennent.

Acquis opératoires et problèmes conceptuels relatifs aux imaginaires

Le cas de la formule de Cardan oriente plusieurs tentatives[22] visant à les faire disparaître d'expressions plus générales telles que $\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}}$, dont les résultats ne font que renforcer leurs liens avec les quantités réelles. En dépit de la difficulté à leur trouver un référent hors du langage, les mathématiciens des XVIIe et XVIIIe siècles vont développer leur utilisation grâce aux analogies opératoires issues de la substitution de $y\sqrt{-1}$ à y, et à l'hypothèse d'une permanence des opérations de l'algèbre autorisant les transferts de méthode. Ainsi l'analogie entre l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 1$, et l'équation de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ offre-t-elle des possibilités de légitimation géométrique. Mais c'est de la trigonométrie qui vient au XVIIIème siècle l'apport essentiel concernant ces entités, au double sens où elle permet de jeter un nouveau pont entre algèbre et géométrie, et où elle met en relation la multiplicité des racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ avec la possibilité de les représenter comme les points d'un cercle.

Si ces entités nouvelles, souvent acceptées comme moyen à condition de disparaître des résultats, provoquent tant de discussions, c'est également parce que leur présence introduit des difficultés conceptuelles vis-à-vis des propriétés ordinairement utilisées en géométrie. Proportionnalité et relation d'ordre sont devenues incompatibles, comme le remarque Antoine Arnaud (1612-94) au sujet de la proportion $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, puisque -1 est plus petit que 1 dans le premier membre et que 1 est plus grand que -1 dans le second membre : comment une quantité plus petite peut-elle être à la plus grande ce que la plus grande est à la plus petite? A l'ambiguïté du signe -, qui désigne à la fois la soustraction et ces quantités "moindres que rien", vient s'ajouter celle de fonction multiforme, introduite avec le logarithme des imaginaires lorsque Leibniz et Jean Bernoulli transposent les règles du calcul intégral de $\int \frac{adz}{b^2-z^2}$ à $\int \frac{adz}{b^2+z^2}$, toujours par le même type de substitution.

En l'absence de prise en compte de cette multiplicité, comment admettre que : $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$ entraîne $\log(a\sqrt{-1})^4 = \log a^4$ et $\log(a\sqrt{-1}) = \log a$. Quant aux premières tentatives pour échapper à une conception linéaire du nombre, et pour représenter les quantités imaginaires dans le plan, elles butent sur le problème de l'indépendance linéaire. Car si on représente a et $b\sqrt{-1}$ sur deux axes perpendiculaires, l'hypoténuse du triangle rectangle ainsi formé n'a plus pour carré a^2+b^2, mais a^2-b^2.

---

22 Flament, D., 1982, "Contribution à l'étude historique des quantités imaginaires", *Thèse pour le doctorat de 3ème cycle*, Paris, p. 51-66.

Les solutions qui permettent d'échapper à ces difficultés seront d'abord proposées, au tout début du XIXème siècle, par des mathématiciens marginaux, dont l'histoire n'a pas retenu beaucoup plus que le nom, mais dont l'isolement a pu autoriser une audace renouvelée face aux conceptions institutionnalisées du savoir de ce temps.

De nouvelles significations pour les opérations

L'assimilation des imaginaires au champ numérique passe par une redéfinition générale des opérations de l'algèbre, et par l'acceptation du fait que la cohérence du discours mathématique va de pair avec une stricte délimitation du domaine auquel il s'applique, ouvrant la voie à la coexistence de plusieurs types de discours possibles, entre lesquels des correspondances peuvent être établies. Mourey se réjouit explicitement d'avoir mis à jour une telle correspondance :
Une difficulté, c'est qu'on applique à des figures qui n'expriment rien, des transformations, des règles et des équations qui n'ont été démontrées que pour les formules qui expriment des quantités. On n'a pas encore fait voir, par le raisonnement, que cette application soit légitime. ...
Non seulement j'ai atteint ce but, mais j'ai rencontré, en même temps, un autre résultat qui n'est peut-être pas moins précieux; avec un nouveau système d'Algèbre, que je cherchais, j'ai trouvé un nouveau système de Géométrie; auquel je ne m'attendais pas. Ce ne sont cependant pas deux sciences; ce n'est qu'une seule science, une seule théorie, laquelle a deux faces, l'une algébrique, et l'autre géométrique. C'est une Algèbre émanée de la Géométrie; c'est une Géométrie généralisée et rendue algébrique [23].
Comme Wessel au Danemark, il introduit délibérément les nouveaux concepts à partir de la notion de mouvement, s'orientant ainsi vers une représentation vectorielle du plan. Mourey a recours à la notion de flux, parle de chemin ou de voyage pour introduire la notion de ligne directrice,et exprime la rotation par un vocabulaire spécifique.
La représentation géométrique des nombres complexes opère avant tout l'intégration d'une conception dynamique des opérations : l'addition est associée à la construction du parallélogramme des forces parallèlement étudiée en mécanique, tandis que la multiplication, associée à la notion de similitude, s'appuie sur la rotation d'une figure initiale autour de l'origine des coordonnées.

CONCLUSION

Une fois établies ces nouvelles définitions des opérations, il devient possible d'en donner une théorie algébrique indépendante de la géométrie, comme le feront Hamilton (1805-65) et Cauchy, et de concevoir, comme Peacock (1791-1858), qu'une opération soit désormais définie à partir ses propriétés. Et le fait qu'un ensemble puisse être fermé pour une opération débouchera sur de nouvelles spécifications numériques.

---

[23] Mourey, C.V., (1828), *La vraie théorie des Quantités négatives et des Quantités prétendues Imaginaires., dédiée aux amis de l'évidence,* Paris, Bachelier, 2ème éd. 1861p. 4-5.

P65

Aspectos da Abstração na Matemática Mesopotâmica

Matheus Grasselli, Instituto de Física - Universidade de São Paulo

1 Em busca de uma Matemática Pré-Helênica.

Ainda que desacreditada por fontes da própria Grécia, a cultura do milagre grego, que atribui ao helenos a criação, dentre outras, da política, da ética e da filosofia, insistentemente situa a matemática, seja lá em qual definição, como "um fato tipicamente grego", sem precedente no mundo antigo. De Tales, os gregos diziam que era "discípulo dos egípcios e caldeus" e Demócrito, o abderita, contava vantagem de ser um geômetra melhor até "que os estiradores de corda do Egito". Contudo, somente depois de muitos trabalhos de transcrição, tradução e compilação de textos matemáticos egípcios e mesopotâmicos, realizados nas primeiras décadas deste século[1], é que se transferiu o nascimento da matemática para muitos séculos antes da era de Tales e Pitágoras.

Novos dogmas injustificados, no entanto, passaram a orientar as opiniões sobre a ciência matemática do Egito e da Babilônia. Defende-se, ainda atualmente, que toda a ciência praticada no Nilo e entre o Tigre e o Eufrates teve direcionamento pragmático, sendo desprovida de princípios gerais e abstratos. Assim, o conjunto de técnicas matemáticas executadas por estes povos não mereceria o nome de ciência matemática, tal qual a entendemos, e que, ingenuamente, acredita-se ter sido praticada pelos gregos.

Em artigos anteriores[2], analisamos o surgimento e o desenvolvimento da matemática no Egito, relacionando suas características concretas e sua especificidade marcante com aspectos políticos e sociais da história egípcia.

Neste trabalho, procuramos apresentar situações contraditórias com a tese de ausência de abstração na matemática babilônica.

Certamente não se mede a qualidade da produção matemática de um povo, ou de uma escola, ou de um matemático, por comparações com características da matemática atual, nem por aferições da quantidade de suas descobertas que permaneceram nos nossos livros. Precisamos reconhecer os ambientes culturais dos problemas atacados e das soluções apresentadas. Mas, como é impossível reproduzir hoje o pensamento de milênios, séculos ou mesmo décadas passadas, pois que pensamos com as nossas mentes e não com as dos que nos antecederam, podemos e devemos estudar a matemática babilônica com os nossos olhos, procurando similitudes, diferenças, problemas e angústias comuns ou divergentes.

Procuramos então nos antigos mesopotâmicos predecessores tanto dos gregos quanto de nós próprios. Procuramos, talvez para espanto de algum cientista mais

[1] Nos referimos principalmente aos trabalhos de Otto Neugebauer e seus colaboradores. Neste sentido veja O.Neugebauer, *Mathematische Keilschrifttexte* (1937) e O.Neugebauer a A.Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts* (1945). Veja também F. Thureau-Dangin, *Textes mathématiques Babyloniens* (1938).

[2] M. Grasselli, *Ciência Pragmática no Egito e Mesopotâmia: um paralelo com o pensamento técnico atual.* (1995) e *Pragmatismo e Conservadorismo na Matemática Egípcia* (1994).

prepotente, parceiros, colaboradores de nossas próprias e originais descobertas científicas.

2 Sobre o Sistema de Numeração

Nossas primeiras considerações sobre a matemática babilônica dizem respeito ao sistema de numeração encontrado nas tábuas cuneiformes de caráter matemático. Encontramos, diferentemente das outras culturas antigas, um sistema posicional de base 60. Sobre a escolha da base, argumenta-se que possa ter surgido aleatoriamente, ou por fusão de um sistema de base 10 com um sistema de base 6, ou por qualquer outro processo "natural". Mais plausível é a hipótese de ter se originado da metrologia, uma vez que o 60, com seus diversos divisores, apresenta-se confortável em situações da prática comercial. Nesta hipótese, mesmo que impulsionada por uma necessidade utilitária, a escolha da base leva em conta uma característica geral e inerente aos números: a quantidade de divisores que possui.

Quanto à invenção do sistema posicional, uma evolução paulatina foi sugerida[3]: do hábito de se escrever à esquerda, em dígitos maiores, as quantidades expressas em uma "unidade" 60 vezes maior que outra (tal como 1 talento, que equivale a 60 manas) passa-se gradualmente a diminuir o numeral até reduzi-lo a um tamanho ordinário, apenas deslocado em posição em relação ao numeral da "unidade" pequena. A generalização deste princípio, qual seja, que deslocar um caracter n posições à esquerda corresponde a multiplicar seu valor pela n-ésima potência da base adotada, leva ao sistema posicional para os números inteiros. Assim, com apenas dois dígitos, uma cunha vertical para a unidade e uma em forma de parêntesis angulosos para as dezenas, os babilônicos formavam qualquer inteiro, por maior que fosse, pela simples repetição dos símbolos em casa sexagesimais diferentes.

Neste ponto, é importante notar a ausência de um caracter definido para o zero final num número (nas tábuas mais antigas, nem um zero intermediário era indicado. Após o período selêucida, duas cunhas passaram a representar uma casa sexagesimal vazia). Assim, quatro cunhas verticais, por exemplo, podiam representar, dependendo unicamente do contexto, o número 4, ou $4 \cdot 60$, ou $4 \cdot 3600$, ou $4 \cdot 60^n$, com n natural. Não nos iludamos primariamente, pensando ter descoberto uma grande falha na matemática babilônica, pois foi justamente esta ambigüidade que conduziu à maior contribuição posterior desta ciência: as frações sexagesimais. Uma extensão simples do que foi dito acima faz com que as tais quatro cunhas verticais também possam representar 4/60, ou 4/3600, ou $4/60^n$. Assim, qualquer conjunto de cunhas pode assumir valores que diferem por um fator multiplicativo 60^k, onde k, agora, é qualquer inteiro, seja positivo ou negativo. Isto torna as frações sexagesimais tão facilmente manipuláveis quanto as nossas frações decimais, com respeito a todas as operações elementares.

[3] Veja A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics* (1964), p. 20.

Surge aqui uma consideração que nos faz retornar ao assunto da escolha da base. Uma fração p/q só pode ser escrita em forma decimal, ou seja, cujo denominador é alguma potência inteira de 10, se q contém apenas os fatores primos constantes em 10, a saber, 2 e 5. Assim é que 1/9, por exemplo, não possui expansão finita em frações decimais. Tomando 60 como base, qualquer fração p/q onde q contém somente os fatores primos 2,3 e 5 (pois $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$), pode ser escrita na forma de frações sexagesimais. Claramente, essas frações são bem mais numerosas que as redutíveis a frações decimais. O uso intensivo que os matemáticos babilônicos fizeram de tais frações nos encoraja a dizer que estas vantagens também foram levadas em conta numa escolha consciente da base para o seu sistema de numeração.

3 Tabletas Tabelas

Grande parte dos textos matemáticos babilônicos é constituída de diversas tabelas de manipulação aritmética. Existem, por exemplo, as tabelas de multiplicação por diversos números (nem todos os inteiros menores que 60, como seria de se supor, à primeira vista), tais como as nossas tabuadas, que, aliadas à distributividade do produto, dão conta rapidamente de qualquer operação de multiplicação. Tabelas de inversos, principalmente dos números regulares (aqueles cujos inversos se escrevem como frações sexagesimais finitas), combinadas às de multiplicação, permitem facilmente efetuar divisões. Tabelas de um número elevado a sucessivos expoentes inteiros provavelmente eram usadas em operações com juros compostos (em taxas que variavam de 20 a 30 % !!!), e assim por diante.

Praticamente para todas as operações cotidianas, os matemáticos, estudantes ou comerciantes babilônicos dispunham de extensas e úteis tabelas, aliadas a alguns algoritmos engenhosos, tais como o de obtenção da raiz quadrada de um número, muito mais eficiente que os ensinados hoje nos cursos primários.[4]

Contudo, algumas tabelas apresentam conteúdo aplicável não tão diretamente, como as tabelas de quadrados, cubos, ou as que apresentam a quantidade $n^2 (n + 1)$ para diversos valores, inteiros ou não, de n.

Estas tabelas eram aplicadas em outra parte significativa dos textos matemáticos mesopotâmicos: as tabletas contendo listas de problemas e suas soluções.

Antes de tratar destes textos, é impossível resistir à tentação de citar a mais extraordinária tabela matemática babilônica, chamada de Plimpton 322.[5] Trata-se de uma singela tabela de 15 linhas e quatro colunas, onde a primeira coluna à direita é apenas uma coluna de contagem (numerada de 1 a 15) e as duas seguintes trazem números aparentemente disconexos. É a quarta coluna, mais à esquerda, que fornece a chave para o entendimento desta tabela: se chamarmos de c e a os números da segunda e terceira coluna (da esquerda para a direita) para qualquer linha, então a quarta coluna apresenta a razão c^2 / b^2 onde $c^2 = a^2 + b^2$. Ou seja, a e c são os

[4] Veja C. Boyer, *Historia da Matemática* (1974), p.21.
[5] Para uma exposição completa desta tabela recomendamos H.Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (1964), pp. 35-37, além de O. Neugebauer, *Exact Sciences in Antiquity* (1957), pp. 36-40.

lados de um triângulo retângulo e a quarta coluna corresponde a $\sec^2 A$, onde A é o ângulo oposto ao lado a. Talvez o mais espantoso é que os valores para $\sec^2 A$ estão dispostos em ordem decrescente de A, em intervalos de decrescimento aproximadamente iguais, entre os extremos aproximados de 45° e 31°.

Dificilmente uma aplicação prática exigiria uma tal tabela, e o método para obtenção das tríades pitagóricas dela constantes ultrapassa de muito o escopo de uma ciência pragmática e utilitária.

4 Listas de Problemas

Diferentemente do que é encontrado nos papiros matemáticos egípcios, como o de Rhind[6] e o de Moscou, onde diversos problemas cotidianos, sem conexão clara entre si, são apresentados juntamente com receitas para suas soluções, os textos cuneiformes mesopotâmicos apresentam listas extensas de problemas semelhantes cuidadosamente arranjados e até com uma preocupação pedagógica de ordem crescente de dificuldade.

Apenas este fato já é relevante para supormos que os babilônicos tinham conhecimento das relações teóricas existentes entre problemas diferentes. Não faz sentido pensar que utilidades práticas aleatórias tenham ordenado justamente problemas semelhantes com semelhantes e separado os casos diversos.

Outra característica marcante aumenta a força da hipótese de que os mesopotâmicos conheciam as regras gerais por detrás dos casos específicos. O método de resolução de um problema é geralmente dado na forma de uma sucessão de operações efetuadas sobre os números envolvidos, mas esta sucessão é rigorosamente a mesma para todos os problemas de um mesmo tipo. Assim, ao resolver uma equação equivalente a $x^2 + px = q$ o escriba apresenta sempre a mesma seqüência de passos sobre p e q, correspondendo exatamente à nossa solução $x = \sqrt{q + (p/2)^2} - p/2$.[7] O fato de não apresentar uma fórmula geral, preferindo trabalhar diretamente com os números, apenas mostra uma tradição de fluência matemática diferente da nossa. Por exemplo, em determinado problema, ao executar a soma de duas equações $xy + x - y = 183$ e $x + y = 27$, o escriba simplesmente diz que $27 + 183 = 210$ e passa a tratar da equação $xy + 2x = 210$.[8]

Não somente o mesmo método se repete em problemas do mesmo tipo, como também o mesmo tratamento geral é dispensado em diversos tipos de problemas. Por exemplo, em sistemas de equações de duas incógnitas onde aparece a soma (ou a diferença) entre elas, tipo $x + y = a$, o texto faz $x = 1/2a + w$ e $y = 1/2a - w$ e se põe a obter w a partir da condição expressa pela outra equação, seja ela da forma que for. Este tratamento é dispensado mesmo em sistemas de equações de maior número

[6] Uma tradução completa, com comentários e rica bibliografia, do Papiro Rhind é encontrada em A.B. Chace, L.S. Bull, H.P. Manning e R.C. Archibal, *The Rhind Mathematical Papirus* (1927-1929).

[7] Como exemplo de tal problema, veja a tableta BM 13901 (British Museum), comentada em Aaboe, obra citada, p. 23.

[8] Estas equações são discutidas por B. L. van der Waerden em *Science Awakening* (1963), p.63. Aproveitamos para observar que todos os números presentes nos exemplos citados aqui encontram-se na forma decimal, ao invés da sexagesimal original, para evitar maiores confusões.

de incógnitas (até 10 !) e é interessante notar que se trata do mesmo método empregado pelo algebrista grego Diofante (século III d.C.).

Ainda sobre este método, é pertinente discutir o possível caminho para a descoberta da fórmula especial apresentada acima para a solução de uma equação quadrática na forma $x^2 + px = q$. Foi sugerido[9] que os babilônicos tivessem sido os primeiros matemáticios a empregar o recurso genial de completação de quadrados, tal como os algebristas árabes fariam muito mais tarde. Assim,

$$\begin{aligned} x^2 + px + (p/2)^2 &= q + (p/2)^2 \\ (x + p/2)^2 &= q + (p/2)^2 \\ x &= \sqrt{q + (p/2)^2} - p/2 \end{aligned}$$

Contudo, podemos argumentar quanto a mudança de variáveis $y = x + a$ (expediente comum aos algebristas babilônicos), que reduz a equação original ao sistema

$$y - x = p \quad \text{e} \quad xy = q,$$

para o qual sentiam-se absolutamente confortáveis em fazer[10] $y = w + 1/2p$ e $x = w - 1/2p$ e obter

$$\begin{aligned} & w^2 - (p/2)^2 = q \\ & w = \sqrt{q + (p/2)^2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{q + (p/2)^2} - p/2 \end{aligned}$$

Podemos nos perguntar agora como os mesopotâmicos tratavam problemas envolvendo equações quadráticas na forma geral $ax^2 + bx + c = 0$. A questão é pertinente e leva a mais um feito notável de sua habilidade algébrica. Nestes casos, o escriba multiplica a equação por a, obtendo $(ax)^2 + b(ax) + ac = 0$ e passa a trabalhar com uma nova equação na incógnita $y = ax$, que claramente está na forma padrão $y^2 + py = q$. Resolvendo esta equação, o texto fornece a seguir o valor desejado para x. Observamos o óbvio domínio teórico revelado no problema na transformação de uma equação em outra equivalente e no reconhecimento de que, numa incógnita diferente, a nova equação corresponde a uma forma padrão já exaustivamente trabalhada. Nesta mesma direção, encontramos diversas equações cúbicas reduzidas à forma $x^3 + x^2 = a$,[11] para a qual obtém-se facilmente o valor de x numa das tabelas anteriormente citadas de valores $n^2(n + 1)$, mesmo quando o valor de a não consta diretamente na tabela, situação em que os babilônicos recorriam freqüentemente ao recurso de interpolações lineares. Como último exemplo do nível de generalidade atingido pelos mesopotâmicos na solução de

[9] B.L. van der Waerden, em obra citada, p.69, apresenta ambas as hipóteses aqui consideradas, mas julga menos provável justamente aquela pela qual temos mais predileção.

[10] Por exemplo, no texto VAT 6 598 (Vorder-Asiatische Textsammlung Berliner Museum), constante de Neugebauer, MKT I (Mathematische Keilschrifttexte), p. 280.

[11] Como exemplo citamos o problema 23 do texto BM 85 200, constante de Neugebauer, MKT I, p. 193.

equações algébricas, citamos o reconhecimento que fizeram de que equações nas formas $ax^4 + bx^2 = c$ ou $ax^8 + bx^4 = c$ podem ser tratadas como uma quadrática $ay^2 + by = c$, onde $y = x^2$ ou $y = x^4$, respectivamente.

Até aqui apresentamos todas estas equações em nosso simbolismo, sem nos preocuparmos em como elas eram enunciadas nos textos babilônicos. Uma análise destes enunciados oferece outra indicação no caminho da abstração presente nesta matemática. Ao se referir a termos correspondentes aos nossos x^3, x^2 e x, um escriba babilônico usa as palavras "volume", "área" e "comprimento", respectivamente. Uma primeira interpretação pode assumir que se tratam de palavras diretamente representativas daquilo que é encontrado na vida prática cotidiana, donde todos estes problemas corresponderiam a situações concretas. Mas a seguir vemos áreas somadas a comprimentos e volumes, ou mesmo áreas multiplicadas entre si, sem qualquer relação inteligível com o mundo dos problemas práticos. Trata-se do que batizei de "surrealismo algébrico": tal como num quadro surrealista, os elementos utilizados na composição da cena são concretos, mas a situação formada, absurda e, por vezes, incompatível com a realidade, não tem compromisso de representar qualquer concretude.

Mesmo em problemas geométricos mais comportados, o que verificamos são aplicações da aritmética e da álgebra ao tratamento de figuras geométricas, uma ordem que posteriormente seria invertida pelo senso plástico empregado pelos gregos na sua matemática. Neste sentido é que encontramos, por exemplo, os repetidos problemas em que se aplica sistematicamente o Teorema de Pitágoras (isso lá pelos idos de 1700 a.C.)[12], ou os cálculos (corretos) de áreas de triângulos e trapezóides diversos.

5 Considerações finais: ressalvas e influências.

Vem justamente da geometria uma característica que, esta sim, difere a matemática dos babilônicos (aliás, também dos egípcios) da matemática realizada pelos gregos posteriores. Em nenhum momento de seus textos, encontramos a preocupação em distinguir resultados exatos de resultados aproximados. Sem nenhuma ressalva, utilizam $6r$ e $3r^2$ para, respectivamente, o comprimento e a área do círculo delimitado por uma circunferência de raio r.[13] Em outros textos, o volume de um tronco de pirâmide quadrada de bases com áreas a^2 e b^2 e altura h é inadvertidamente dado por

$$V = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 h$$

embora O. Neugebauer, um pouco forçosamente, apresente um texto[14] com fórmula

[12] Veja a série de problemas deste tipo de BM 34 568, apresentados por Neugebauer, MKT III, p. 22, e também a figura da pequena tableta YBC 7 289 (Yale Babylonian Collection), comentada por Aaboe, obra citada, p. 25.
[13] Uma melhor aproximação para π (cerca de 3 1/8) é apresentada numa tableta discutida por Boyer, obra citada, p. 28.
[14] Veja discussão apresentada por van der Waerden, obra citada, p. 75.

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]h$$

que é correta e equivalente à apresentada pelos egípcios no Papiro de Moscou.

Mas não nos esqueçamos de que a geometria não era a preocupação fundamental dos babilônicos, posto ocupado pela álgebra e pela aritmética. É justamente esta preocupação com questões da teoria dos números, juntamente com o enorme poder computacional que obtiveram da numeração posicional sexagesimal, que impulsionaria a veneração numerológica da escola pitagórica. Os gregos receberiam também dos mesopotâmicos o hábito, depois tranformado em quase dogma, de evitar considerações sobre quantidades infinitas, processos infinitos, repeticões infinitamente periódicas, evidenciado, por exemplo, pela ausência de uma representação para o inverso de 7, que na forma de fração sexagesimal tem periodicidade de três posições sexagesimais.[15]

E por falar em ausências, há que se notar a falta, talvez por despreocupação sistemática, talvez por inexistência do conceito, de qualquer menção a provas dos possíveis teoremas e procedimentos utilizados. Parece que, no que diz respeito à necessidade de provas, efetivamente, nos deparamos com uma novidade de origem grega.

Longe de um agrupamento de regras e técnicas destinadas exclusivamente ao terra-a-terra da vida cotidiana, a matemática mesopotâmica se nos apresenta como uma atividade densa, elaborada e espantosamente duradoura. Podemos inclusive apontá-la como um dos fortes fatores de unificação cultural para os diversos povos que habitaram a Mesopotâmia, ao lado da escrita cuneiforme, da mitologia e da religiosidade. Retornando à idéia esboçada quando introduzimos este trabalho, encontramos nela elementos de reflexão presentes nas matemáticas de qualquer civilização posterior. Analisá-los e relacioná-los é, portanto, uma das forma de entender a atividade científica de qualquer tempo, inclusive do nosso, na medida exata em que todo resgate do passado é um resgate interior, mesmo que seja do passado da matemática.

[15] Conforme Boyer, obra citada, p. 22.

Referências

[1] AABOE, A. *Episodes from the Early of Mathematics.* New York; Random House, 1964.

[2] ARCHIBAL, R. C. *Outline of the History of Mathematics.* 6. ed. Buffalo; Slaught Papers of the Mathematicl Association of America, 1949.

[3] BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

[4] CHACE, A. B., BULL, L. S., MANNING, H. P. e ARCHIBAL, R.C. *The Rhind Mathematical Papyrus.* 2 vols. Oberlin; Ohio, 1927-1929.

[5] EVES, H. W. *An Introduction to the History of Mathematics.* 3. ed. New York; Holt, Rinehart and Wiston, 1969.

[6] HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics.* 2 vols. Oxford; Claredon, 1921.

[7] NEUGEBAUER, O. *The Exact Science in Antiquity.* 2. ed. New York; Harper, 1957.

[8] NEUGEBAUER, O. *Mathematische Keilschrifttexte.* 3 vols. Berlin; Springer, 1934.

[9] NEUGEBAUER, O. e SACHS, A. *Mathematical Cuneiform Texts.* New Haven; Yale University Press, 1945.

[10] GRASSELLI, M. *Pragmatismo e Conservadorismo na Matemática Egipcia.* Anais do XI Colóquio de Iniciação Científica - Instituto de Matemática e Estatística. São Paulo; IME - Universidade de São Paulo, 1994.

[11] GRASSELLI, M. *Ciência Pragmática no Egito e Mesopotâmia: um paralelo com o pensamento técnico atual.* Anais do V Congresso Nacional de História da Ciência e Tecnologia. Ouro Preto; Sociedade Brasileira de História da Ciência, 1995.

[12] THUREAU-DANGIN, F. *Textes mathématiques Babyloniens.* Leiden; Brill, 1938.

[13] VAN DER WAERDEN, B. L. *Science Awakening.* New York; Oxford University Press, 1961.

Observations about teaching mathematical definitions and cocepts to non-native speakers of English in Papua New Guinea.

George C. Krajcsik, ISLA

Abstract: *Mathematics instruction to non-native English speaking students poses difficulties not encountered in linguistically homogeneous societies. Even having a near-native facility with the language, words do not evoke the same cerebral-visceral response in students as those in their native tongue. Learning a new abstract concept, these students go through various stages of adaptation-translation. The writer conducted experiments at The University of Papua New Guinea--Goroka Campus, with second- and third-year calculus students to observe how mathematical definitions were understood and assimilated. To illustrate difficulties with abstract concepts learnt in a foreign language, two examples are given: 1. definition of a function, 2. definition of a limit. The results of these experiments were studied, and was concluded that analogies and examples serve understanding to a greater degree than formal definitions. Students were observed handling non-verbal proofs much better than formal, verbally exacting proofs. Where a proof can be derived by analogy, an example is provided to show students' facility with diagrams versus algebraic proofs. Implications for future mathematics instruction are given, and further research are called for.*

Language of Instruction and Vehicle of Thought.

On the island of New Guinea, according to linguists, there are more than 800 distinct languages and dialects. On the eastern half of the island, in Papua New Guinea, English has been the official language, since 1921 when the German colony of Neu Guinea (Berlin Neu Guinea Kompanie) had been mandated to Australia. The first New Guinea Education Ordinance in 1922 made English the language of instruction in Papua New Guinea schools. Even greater emphasis has been laid on teaching and learning English since the country gained independence in 1975. By government policy the language of instruction in all Papua New Guinea (PNG) schools is English[1], even though

> "one of the greatest frustrations to efficient learning and understanding is the presentation of complex material in a language which is not the mother tongue of the students." [2]

Though vernacular education is currently encouraged in PNG, it had been until recently, agreed by the Department of Education bureaucracy, that it was not feasible to successfully mount vernacular education programmes in a nation of more than 800 languages. The difficulty with this policy is that those responsible for its implementation, the nation's classroom teachers, are themselves far from competent. The result is that teachers lacking in knowledge are expected to do something they cannot do. They either avoid the use of English much of the time, or teach it badly. Thus, rote learning has been forced upon students in their early schooling and, unfortunately, is still carried on, even at the university level.

Students at Papua New Guinea universities have a tenuous grasp of English. To some, English is their third, or fourth foreign language; to none is it a native tongue. While some reach a certain level of mastery of the language, the great majority silently struggles to achieve clarity of thought.

Learning Mathematics

Teaching mathematics under these circumstances calls for ingenuity. One must not only teach new concepts (new to the students, that is) but teach them in such a way that students can comprehend them in spite of their lack of concept, or word for that concept, in their native tongue.

The author claims that understanding is the most important facet in mathematics learning. This may seem a truism. But how many professors, lecturers, instructors and others "working in the vineyard" are still forcing students to memorize definitions, theorems, and other ideas and regurgitate them at examinations. And we can be just as certain that a week or two later all that memorization will vanish. Making exams "open book, open notebook, open anything" might be a novel idea, and it might force the lecturer to devise problems that test understanding, but that would help students learn more mathematics than memorization would. It would also be a learning experience for student.

In mathematics, learning definitions create a serious obstacle. Definitions represent the conflict between the structure of mathematics, as conceived by professional mathematicians, and the cognitive process of knowledge acquisition. To most mathematicians, mathematics is a deductive science and as such it starts with primary notions and axioms. By means of primary notions all other notions are defined. All the theorems, which are not axioms, are proved from the axioms by means of certain rules of inference. This is a short and over-simplified description, but most mathematicians hold, essentially, the same view. Mathematics is not "created" this way, rather this is the way it is presented in most mathematical texts and journals. Quite a number of textbooks as well as mathematics teachers follow a similar path. They build their courses on definitions, theorems and proofs. Their tacit assumption is that students will suddenly see "the brilliance of an idea" when they learn the definition. Unfortunately, that does not happen. Rather, students find themselves entangled in some, to them, meaningless maze of poorly understood words. To the students, just understanding the words is problem enough. Hearing the definition in a foreign tongue of which they have poor command compounds the problem.

Understanding Definitions

It has been observed in the pedagogy of mathematics that most teachers and text-book authors believe in, and often voice, the following assumptions:

> Students acquire concepts by learning their definitions, and once learnt, the students will use them in solving problems or proving theorems.
>
> The more concise and elegant a definition, the better it is.

The author's experience is contrary to the first assumption and, he agrees with the second so far as mathematics is concerned. However, in a context such as exists in PNG, the second assumption is misplaced.

In everyday language many words do not have definitions (although they are "defined" somehow in dictionaries). Think of "house", "dog", "table", "faithful", etc., and you realize immediately that when understanding, for example, the sentence "my faithful dog lies at my feet" you do not consult a dictionary, nor think of definitions. Such sentence in a native speaker evokes an image automatically. In a non-native speaker, it has almost the same effect, usually after a lightning-fast translation or image recall. On the other hand, in mathematics (or physics, or other fields of science, or technology, or any esoteric field) we find "technical context". In these contexts meaning is assigned to a term by stipulation. Terms are defined as in mathematics. Hence, if one is in a technical context one should consult definitions, otherwise mistakes might occur. Certainly, there is no need to consult a dictionary when one reads the sentence "dogs that bark don't bite". However, one should have a clear understanding and grasp of the words when trying to understand the sentence: "of all rectangles of a given perimeter the square has the maximal area". Note that in everyday communication a square is not considered a rectangle by most people, whereas in all mathematical context it is.

Hearing the name of an object, or a concept, is a stimulus to our memory. Something is evoked by the name. The native speaker has an automatic, reflex reaction. He usually conjures up a picture or a collection of impressions. The non-native speaker "processes" the name first, then evokes images or experiences associated with the name. Depending on how accurately he processed the information he may or may not get the right image. After the image appears in his mind may the person, native and non-native speaker alike, think of verbal forms. For example, when hearing the word "table", the picture of a certain table can be evoked in one's mind. Images of studying at a table, eating at a table, etc., can be evoked as well. One can recall that many tables are made of wood, some of steel, or plastic, most of them have four legs; usually one doesn't lie on a table, one can put his feet up on the table but this is regarded by some as impolite behaviour. When one hears the word "function", on the other hand, one might visualize a graph of a function, or recall the expression "$y=f(x)$", one might think of specific functions like $y=x^2$ or $y=\sin x$, $y=\ln x$, etc. From this we may conclude that the image evoked by a student is highly specific to that individual. Also, the same individual might react differently to a certain term (name of a concept) in different situations.

We assume that to acquire a concept means to form a mental image of it. To know a concept definition by heart does not guarantee understanding of that concept. It is anecdotal that school children in PNG sometimes memorize definitions or passages from text without understanding them. The teacher writes on the board: " A jabberwocky puts a gizmo on the umbrongate" and then asks the children what's a jabberwocky. To which they faithfully answer: "it is the thing that puts a gizmo on the umbrongate." What images are evoked in the mind when such a sentence is heard?

Most people hold the view that to understand we must have a concept image. Certain meaning should be associated with the words. For example, knowing the definition that the power set of a given set is the set of all subsets of that given set, does not mean many thing unless one can construct some power sets of given sets. Hence the image of the power set concept might include a memory of actually solving such problems, i.e. constructing a power set. Concepts in everyday life, like food, house, dog, cat, etc. are acquired without resorting to definitions. Some other concepts, even in everyday life, might be introduced by definition. The word "jungle" might be introduced to a child by saying "many, many trees and bushes together" (The Concise Oxford Dictionary definition " land overgrown with underwood or tangled vegetation, especially in tropics" is, of course, useless for a little child). Definitions like these help form a concept image. But the moment the image is formed, the definition becomes dispensable; it served as scaffold to help erect understanding. It will become inactive, even forgotten, when that person deals with that word again. Clearly, once a building is erected, we can dismantle the scaffolds.

How To Teach Definitions

Not wanting to end up with students reciting "jabberwocky" definitions in mathematics, the author took a different path. Hoping to appeal to students' curiosity and experiences, the author constructed analogies and examples that were familiar to the students. Results of a quiz, given to second-year students, having had one semester of calculus, and to third year students who had two semesters of calculus, reinforced the notion that students can recite a definition, but do not understand it. This experimental evidence supports the author's claim that the majority of the students do not use definitions when working on cognitive tasks in technical contexts. In more specific terms, definitions memorized in a foreign language do not become thought habits needed for solving problems in mathematics. Students continue to use everyday life thought habits in their native (or "most comfortable") tongue.

The concept of a function, and its definition, is one of the fundamental ideas in mathematics. The following quiz (on the concept of function) was given to 38 students, all of whom studied mathematics for, at least, 3 semesters (1.5 years) at the university level.

1. Is there a functions in which each number different from zero corresponds to zero and zero corresponds to infinity?

2. Is there a function in which each positive number corresponds to 1, each negative number corresponds to -1, and zero corresponds to zero.

3. Is there a function whose graph looks as follows:

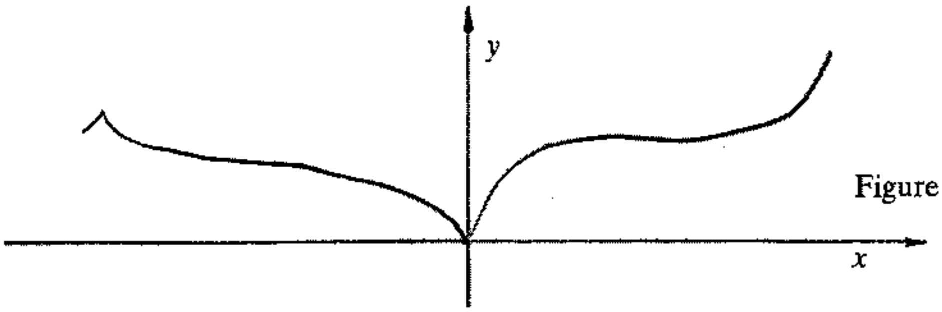


Figure 1.

The concept of a function was taught to all the students who took part in the experiment according to the modern approach, i. e. a function f is a set of ordered pairs of elements $(a, f(a))$ such that no two ordered pairs have the same first elements and different second elements. On the test not one student answered all three questions correctly, 52% answered 2 out of 3, 40% answered 1 out of 3, and 8% none out of three. Clearly, that shows a lack of comprehension.

After such discouraging results, the concept of function was reviewed. This time the author tried an analogy. In PNG polygynous family relationships are not uncommon; polyandrous unheard of. Think of married women as the set of first elements and married men as the set of second elements (a function being a set of ordered pairs of elements). A woman can have a relationship with only one man, but a man may have one or more women. The function is the set of married people where a married woman owes allegiance to only one man. Thus, if you take the women as elements in the domain of the function and the men as elements of the range, you have the concept of a function. A post-test revealed surprising results. 48% identified all functions correctly on the test, 27% identified two-thirds, 20% identified one-third, and only 5% failed to identify any.

A second concept and definition, that of a limit, was taught after the excitement of function had died down. Again, the definition taught was taken from a standard college mathematics text: The value of $f(x)$ of the function f is said to *approach* the constant L as a limit as x approaches a, if to each positive number ϵ, there corresponds a number $\delta(\epsilon)$ such that, if $0 < |x - a| < \delta(\epsilon)$ then $|f(x) - L| < \epsilon$.

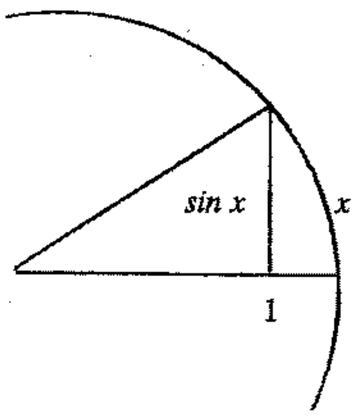
The definition of a limit was harder to memorize than the definition of a function. Even the best students in the class, although able to repeat the definition, were not able to show comprehension. Next, the class was given an experiment: From the middle of the room a student is asked to approach the opposite wall by taking half the distance between him and the wall. Then half of the distance , again, then again, repeating the procedure until he gets to the wall. Will he ever get there? Most students will comprehend the notion. The brighter ones will also point out that our student, while he can never reach the wall, will get as close to it as he wants to. The next experiment is to take a sheet of paper, fold it in half, then half again, and again, and so on. The area is halved each time. Will the area ever disappear (become zero)? Or writing the infinite series 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,... Will any member of this series ever become zero? At this point the majority of the students begin to grasp the notion of a limit. Next, Euclid's definition of the area of a circle was used to give the students an example that is easy to see: The area of a circle is the limiting value of the area of an inscribed (or circumscribed) regular polygon of n sides as the number of sides n is increased indefinitely.

In another quiz, half the class was asked to find:

$$\lim_{x \to 0} [(\sin x) / x]$$

while the other half was asked to answer the same question but with the aid of a diagram where in a unit circle x is an acute angle measured in radians and $(\sin x)$ is the opposite side of the inscribed right triangle.

Figure 2.



The results are revealing. From the first group (without the aid of a diagram) 91% answered "undefined". From the second group 58% answered correctly, (1) and the rest answered zero, or "undefined."

The second question on the quiz was: What does the diagram below indicate? How can you use this diagram to illustrate an important concept in geometry?

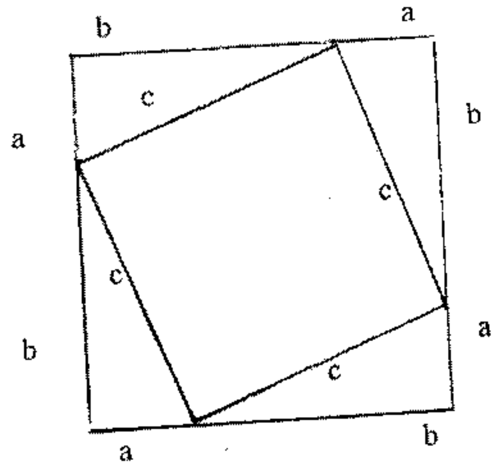


Figure 3.

To this question, we had a surprising number of "correct" answers. Obviously, the diagram is an illustration of the Pythagorean Theorem. Adding the areas of the four triangles and the area of the small square yields the area of the large square. Slightly more than 60% of the student recognized the diagram; 38% also derived the Pythagorean Theorem from it. Thus, they not only "discovered" for themselves the Pythagorean Theorem but understood it and committed its proof to memory by the aid of that simple diagram.

Implications for Classroom Use

It appears that mathematical definitions cause unnecessary cognitive conflicts with poorly prepared and non-native speaking students. They respond more readily to diagrams or examples and analogies, than to formal definitions. This may not be news to anyone who spent a few years teaching mathematics, even to native speakers of English, let alone to non-native speakers. But the situation is different when teaching on a graduate-school level. There students can reasonable be expected to have a greater degree of mathematical sophistication. Formal definitions do have their place and indisputable importance on that level of instruction.

Some mathematics educators claim that one of the goals of teaching mathematics is to change the thought habits from "everyday thinking" to "technical thinking." The author contends that, rather than changing to "technical thinking", the student's "everyday thinking" needs to be enlarged and integrated with concepts learned in mathematics. This forms a neat circle: problems in mathematics arose from everyday life thus, it is fitting and proper that mathematical concepts be integrated with and be part of everyday life and thus, enrich our way of looking at the world.

This does not imply that formal definitions should not be introduced to students. However, the mathematics educator should be aware of the effect that such introduction can have on students' thinking. If the concept, or formal definition, is not too complicated, students should be asked to supply their own analogies. On the other hand, students who wish to continue on to advanced mathematics should use formal definitions as ultimate criteria in various mathematical tasks. Definitions play differing roles in various mathematics courses according to goals set for the students. If the students are candidates for advanced mathematics then, not only that definitions should be given and discussed, students should be trained to use them as an ultimate criterion in mathematical proofs. Still, a well-devised analogy or everyday example will go a long way in instilling the concept even in the most abstract thinker. The author advocates the use of definition, but it ought to be well illustrated and even then, it cannot be taught to all students.

No doubt, there's a plethora of opinions about the proportion of students who are capable of this aspect. And then, there is a more practical question: how to determine whether a certain student will benefit from this aspect of enlarged and integrated "everyday thinking." This calls for further research. In this essay, the author simply attempted to present general guidelines. As to decisions about the methods of teaching mathematical concepts and definitions, the author think it best to leave such matter to the intelligent and sensitive mathematics educator.

REFERENCES

[1] *Papua New Guinea Education Gazette*, Language of Instruction in Schools and Colleges, Department of Education (1976), vol. 10, p.11.

[2] *Papua New Guinea Journal of Education*, An Investigation of the Difficulties Experienced by Students at Tertiary Institutions in Papua New Guinea, Lewis, N. (1974), vol. 11, pp. 393-405.

[3] *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics, S. Vinner, (Warwick, 1979)

INTEGRAÇÃO DA HISTÓRIA A UM CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nilza Eigenheer Bertoni e Maria Terezinha Jesus Gaspar - Universidade de Brasília

A questão da formação do professor tem sido, no Brasil, objeto de estudo constante na última década. Encontros e foruns foram constituídos com o objetivo de aprofundar o tema, artigos e publicações a respeito têm sido freqüentes. Boa parte dessa produção volta-se para a formação do professor de matemática e da área de ciências. No caso da matemática, os estudos têm apontado para a necessidade de consolidação e reformulação referente a três eixos que devem compor a formação desse professor: o dos conteúdos específicos à sua atuação (matemática e áreas afins), o dos conteúdos concernentes à formação geral de um educador docente (psicologia, pedagogia e outras) e o dos conteúdos relativos à educação matemática. Paralelamente a esses estudos, modificações incipientes ou de maior monta têm ocorrido em vários cursos de formação do professor, ou de licenciatura, como são chamados no Brasil. Na Universidade de Brasília tivemos, em 85, alteração no currículo da licenciatura de matemática, com mudanças significativas no eixo de educação matemática. Em 1993, tendo em vista as licenciaturas noturnas a serem implantadas, foi elaborado um projeto orgânico para as mesmas, nas áreas de Língua Portuguesa, Matemática, Educação Artística, Ciências Biológicas, Química e Física. As modificações mais acentuadas ocorreram no eixo da formação geral de um educador docente.

Em 1992 foi autorizada a implantação da Universidade Aberta do Distrito Federal, planejada para ser uma universidade à distância. Em 1995 o novo governo deu início ao processo visando à implantação da mesma, definindo os cursos iniciais a serem oferecidos: licenciaturas nas áreas de ciências e de matemática, devido à carência desses professores, no Distrito Federal. Quatro equipes foram formadas, a convite, as quais elaboraram projeto orgânico, contemplando os cursos de licenciatura em biologia, física e matemática - a quarta equipe ficando responsável pela integração, aos cursos, da parte psico-pedagógica. Esse projeto global foi entregue ao governo em abril de 1996.

Tendo participado da equipe que elaborou a proposta da matemática, juntamente com mais dois colegas, gostaríamos de expor algumas características do mesmo, principalmente no que se refere à integração da história da matemática nesse currículo.

A equipe sentiu, desde o início, que o desafio maior estava em elaborar o componente referente à área específica da matemática, tornando-o adequado à formação do professor, conforme os objetivos amplos do curso. Enquanto nos outros componentes já haviam precedentes de modificações, nesse, entretanto, perdurava uma estrutura tradicional, incluindo, entre outras, disciplinas clássicas como cálculo infinitesimal., álgebra moderna, álgebra linear, física, probabilidade e estatística, da mesma forma como são dadas nos cursos de bacharelado, que visam à formação do especialista em matemática.

Constatamos, de início, uma diferença substancial entre os conteúdos matemáticos e as formas como se apresentam nos cursos universitários de formação do professor e os conteúdos e as formas da matemática que serão desenvolvidos pelo professor, em sala de aula, no ensino fundamental e médio. De modo geral, os cursos de formação não têm contribuído para que o futuro professor estabeleça as necessárias conexões entre esses dois tipos de conhecimento. Como exemplos, o professor aprende a formalização dos conjuntos numéricos mas revela-se incapaz de explicações sobre a lógica das operações elementares; ou aprende a definição dos logaritmos, como área sob uma curva, e não consegue relaciona-la com a outra definição, como expoente. Assim, mesmo com estudos relativamente avançados, entre outros em álgebra, análise matemática, geometria, restam ao professor inúmeras indagações: qual a lógica da regra de sinais para as operações entre números inteiros? qual a razão das definições de potências para expoentes nulo, negativo, fracionário? por quê dividindo-se o numerador pelo denominador chega-se à representação decimal da fração? Além de conduzir a essa incapacidade de explicação lógica da matemática elementar, os cursos de formação do professor não têm contribuído para uma visão do processo de criação em matemática. Os alunos defrontam-se, nesses cursos, com o produto final desse processo - uma matemática formal e cristalizada, que esconde suas origens e, em grande parte, suas finalidades. O professor, ao longo dos anos, "especializa-se" na maquinaria da matemática elementar, ficando com uma visão unilateral dessa ciência, não chegando a perceber sua essência, nem podendo transmitir aos alunos uma visão mais consistente da mesma.

Para superar esses hiatos procuramos integrar no planejamento curricular que estamos realizando, do curso de formação de professores, uma fase referente à construção histórica de processos matemáticos e de como muitos desses processos levaram à criação de conceitos. Não se trata só de aprender história da matemática, mas de acompanhar essa construção, aprendendo, portanto, a matemática construída.

Nesse sentido foram introduzidas, no primeiro ano do curso, disciplinas que contemplam tanto a construção histórica como a explicitação da lógica e das relações entre as várias representações dos conceitos elementares da matemática. Foram denominadas Aritmética Revisitada e Álgebra Elementar Revisitada. Na primeira são estudadas, por exemplo, as origens dos números, dos sistemas numéricos e dos algoritmos, abrangendo números naturais, inteiros e racionais, com abertura para a existência de não racionais e não reais. São explorados algoritmos operacionais antigos, com lógica mais explícita, evoluindo, ao longo dos séculos, para outros mais concisos e herméticos. São evidenciadas as motivações históricas para a construção e uso desses números bem como os obstáculos à sua aceitação e generalização. No caso da álgebra um ponto importante será acompanhar a longa trajetória da álgebra não simbólica, os resultados obtidos e a aceleração do processo após o advento do simbolismo algébrico. Relações entre a álgebra e a geometria fazem parte do programa, incluindo o tratamento grego dos problemas algébricos e soluções geométricas de equações por Newton e Descartes. Serão estudados os principais métodos históricos de solução de equações ou de sistemas lineares e o surgimento de determinantes e matrizes. Também será abordada a solução de equações por aproximações sucessivas e métodos de Legendre, Gauss e Jacobi para a solução de sistemas lineares.

No segundo ano do curso mais quatro disciplinas dão seqüência à aprendizagem da matemática através de sua evolução histórica: Construção Histórica de Algoritmos, Construção Histórica da Geometria, Gênese do Cálculo Infinitesimal e Gênese da Álgebra Moderna.

Tendo sido vistos, no primeiro ano, algoritmos relativos a operações numéricas e a processos algébricos para solução de equações e sistemas, a disciplina Construção Histórica de Algoritmos, do segundo ano, diz mais respeito a tabelas e processos de interpolação, incluindo interpolação linear, o método das diferenças finitas, polinômios de interpolação de Newton e Lagrange e funções interpolares de Cauchy.

A disciplina Construção Histórica da Geometria parte da geometria experimental dos babilônios e egípcios e inclui a geometria dedutiva e os problemas clássicos dos gregos. A parte de áreas e volumes vai de Arquimedes a elementos do cálculo integral por Newton e Leibniz. Explora-se as origens e a construção da geometria analítica e das geometrias não euclidianas. Um módulo optativo inclui o surgimento e elementos da geometria diferencial e da topologia.

Os primórdios da especulação grega sobre infinitesimais iniciam a disciplina Gênese do Cálculo Infinitesimal, que estuda também métodos variados de quadraturas, problemas de tangente e a relação de inversão existente entre esses dois problemas. São também estudadas a emergência do conceito de aproximação de funções - fórmula de Taylor, resto de Lagrange - e métodos, como o de Euler, para a resolução aproximada de equações diferenciais.

A Gênese da Álgebra Moderna parte da formalização da álgebra elementar no início do século XIX e de três conceitos básicos em direção às estruturas matemáticas: a congruência por Gauss, a teoria das equações algébricas por Galois e o programa de Kronecker relativo ao embasamento da matemática sobre os números naturais. Ela inclui os primórdios da teoria dos grupos e da teoria dos corpos numéricos. São vistos os dois conceitos fundamentais da teoria de Galois: domínio de racionalidade ou corpos e grupos. Ao final, são feitas considerações sobre a álgebra como um sistema matemático puramente formal e sobre a liberdade de criação dentro da matemática.

A idéia de integrar a história a um curso de formação de professores fundamenta-se, como já falamos, nas relações entre professor, matemática, curso de formação e exercício da profissão. Tomando contacto, na maioria da vezes, somente com aspectos formais e lógico-dedutivos da matemática em seu curso de formação, e não sendo um pesquisador da área, que teria um aprofundamento constante dessa ciência; necessitando, ao contrário, em seu dia-a-dia, apenas de aspectos elementares da matemática, o professor do ensino fundamental e médio tende a esquecer a matemática aprendida na universidade, ou a conservar na memória apenas alguns métodos e processos. Isso distorce sua representação da matemática, impossibilitando uma interpretação mais profunda dos fatos elementares e dificultando sua capacidade de construir nos alunos uma visão mais global e consistente da área. Nossas experiências em cursos universitários e em formação continuada de professores têm-nos levado a observar que a construção histórica da matemática conduz os alunos, de modo geral, a uma postura diferenciada em relação à mesma, permitindo-lhes, nesse navegar pela gestação das teorias, maior compreensão e atribuição de significado a essas teorias e uma liberdade maior na explicitação de suas dúvidas, já que o terreno propicia a dúvida, a investigação, a produção de idéias.

Temos intenção de fazer confluir essas diversas linhas de desenvolvimento da matemática, exploradas durante o curso, para uma disciplina final, que explore como elas se imbricam para constituir o panorama atual da matemática, em suas múltiplas frentes; procurando-se evidenciar os ramos da matemática essenciais a cada uma dessas frentes e como estas se abrem para novos desenvolvimentos.

Bibliografia básica das disciplinas

BEKKEN, O.B. (1994). *Equações de Ahmes até Abel.* Rio de Janeiro, GEPEM. 113 p.

BELL, E. T. (1945) *The development of mathematics.* New York, McGraw-Hill. 637 p.

BOYER, C.B. (1993). *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. Cálculo.* São Paulo, Atual. 93 p.

CAJORI, F. (1980). *A history of mathematics.* New York, Chelsea. 524 p.

CHABERT, J. L.;BARBIN, E. *et allii* (1994). *Histoire d'algorithmes.* Paris, Belin. 592 p.

DORIER, J. L. A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica* n° 22, p. 227 - 261.

EVES, H. (1993). *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. Geometria.* São Paulo, Atual. 77 p.

GREENBERG, M. J. (1974) *Euclidean and non-euclidean geometries. Development and history.* San Francisco, W. H. Freeman. 303 p.

GUNDLACH, B. H. (1993). *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. Números e numerais.* São Paulo, Atual. 77 p.

KENNEDY, E. S. (1993). *Tópicos da história da matemática para uso em sala de aula. Trigonometria.* São Paulo, Atual. 48 p.

PRADO, E. L. B. (1990). *História da matemática: um estudo de seus significados na educação matemática.* Rio Claro, UNESP. Dissertação d mestrado.

PROJETO ORGÂNICO DOS CURSOS DE LICENCIATURA da UnAB/DF (1996). Secretaria da Educação do Distrito Federal. Brasília.

TIGNOL, J. P. (1988) *Galois' theory of algebraic equations.* London, Longman.

TOEPLITZ, O. (1967) *The calculus. A genetic approach.* Chicago, The University of Chicago Press. 192 p.

YAGLOM, I. M. (1988) Felix Klein and Sophus Lie. *Evolution of the idea of symmetry in the nineteenth century.* Boston, Basel, Birkhäuser. 237 p.

CONICS
a teaching experience

Giuliano Testa, Liceo Scientifico 'P. Lioy', Vicenza, Italy

The experience took place in a fourth form of Liceo Scientifico 'P. Lioy' in Vicenza (Italy) among a group of 16 students (11 girls and 7 boys, aged 17) who volunteered to take part in an extra-curriculum afternoon activity.

The course fell into two parts, 8 hours each. In the first part, which was carried out in November and December 1995, students were given a historical and cultural background concerning the birth and development of the conic theory in Greek antiquity with the aim of discovering the meaning of the names of the conics and the reason for their ordinary names of parabola, hyperbola and ellipse, and, at the same time, of enlivening historical information through the use of non-mathematical documents.

The second part of the course, which took place in February and March 1996, was instead centred on the active participation of the students busily engaged in reading an XVIIIth-century French text *Traité des Sections Coniques, et autres Courbes Anciennes* by M.de la Chapelle (Debure, Paris, 1765). Students were given worksheets (see the appendix for an example) of increasing difficulty (4 for the parabola, 3 for the ellipse, 1 for the hyperbola and finally 1 for the conchoid and its use in the duplication of the cube).

The course was also integrated with an outing to Modena where students attended a lesson at the Liceo Scientifico 'Tassoni' and used geometric machine models constructed by teachers of the school.

At the end of each lesson students filled in a questionnaire meant to collect information on the quality of the course and on their appreciation of the topics and the exposition of the teacher. A very detailed final questionnaire was given for the over-all assessment of the course.

Part one

The key-concepts behind the historical background to the course were:

1. a view of Math in a wide cultural context including frequent readings from different fields, both literary and philosophical, mainly texts by Proclus, Vitruvius, Eratosthenes, Aristotle but also more recent literary texts, by J. Donne, T.S. Eliot and J. Joyce, since students were familiar with English literature;
2. analysis of the role of the ruler and compass in geometric constructions (a search into philosophic, aesthetic, religious and mathematical reasons);
3. contrast between complexity and simplicity in some significant geometric constructions (Menaechmus and Anaritius);

4. analysis of a few problems concerning the concept of a curve (construction and criteria of classification);
5. transformation of one problem into another (Hippocrates), and of figures (Euclid, Book II of the Elements: parallelograms and triangles);
6. search for the 'symptoma' of a conic.

Here follows an outiline of each lesson; its aim are reported in the items *a)* and some significant remarks by students in *b)*.

LESSON ONE: **Classical problems (in particular the Delian problem)**

a) To discover that mathematical reflection arises within a complex cultural and human situation; to grasp the impact, even emotional, on the layman (see plays by Aristofanes); appreciate literary references.

b) As to the Delian Problem students remarked: «I didn't think it could arouse so many difficulties». «I was interested in the problem concerning Apollo's altar, it is quoted in many texts that we've considered with variants». As to squaring the circle students wrote: «I was struck by this problem because of its unsolvability». «I'd like to examine the original texts out of curiosity».

LESSON TWO: **Meaning of geometric constructions**

a) To understand the role of the ruler and compass; to understand why Plato allowed the use of the ruler and compass alone; to discover extra-mathematical motivation in such limitations (cultural, philosophical and religious): to understand mathematical reasons (ruler and compass defined by postulates).

b) One student remarked: «It is clear that geometry was closely connected with human experience». As to Proclus commentary on the circle another added: «I did not think they could give it importance above all because they thought that the sky had a circular form and that it inspired Gods'return». On Proclus's description of the circle as 'primigenial and simple figure' one student wrote: «It does not make sense, another one I was struck by the fact that mathematical thought is founded on an ampler thought because I could not imagine that at the beginning reasoning could be intertwined with religious, aesthetic and philosophical matter; another one asked the question: why just conic sections?». Finally, one student said: «I'd like to see the first circumferences described».

LESSON THREE: **The problem of finding two mean proportionals between two given lines**

a) To understand how the solution of the Delian problem is connected to the subject (conics); to appreciate the role of Ipparcus's transformation (to find two mean proportionals; to investigate into the connections between figures generated in space (conic sections) and solution of a problem in a plane.

b) A few students were struck by the geometric constructions contrived to solve the problem of finding two mean proportionals «because of their complexity or the variety of interpretations»; one student remarked that Menaechmus's solution was a sort of «cunning plus simplicity»; finally, another one underlined: «I enjoyed the lesson very much and I'd like to go into all aspects in a more detailed way».

LESSON FOUR: **Application of areas-I**

a) To illustrate the meaning of the term *gnomon* (its origins linked to the measuring of time; etymology, Euclid's Elements II, def.II; Critical edition by Heiberg, Scholium n.11, 'from the part to the whole'; to recall the themes already faced and also the charm of the circular figure in connection with 'the new instrument' (gnomon); to find echoes in a few English literary texts.

b) The gnomon figure really charmed most students who remarked: «The first instrument for telling the time, and a concept we meet in other subjects». «I had heard of it but I did not really know what it was». «It was in a short story in Dubliners that we've just read». «How can a mathematical concept turn up with some consistent meaning in a literary context». «I'd like to have more lessons like this one to widen my horizons and understand what cultural conditions support the development of mathematical thought».

LESSON FIVE: **Application of areas-II (Parabola)**

a) To understand the archaic (Pythagorean) meaning of the terms Parabola, Hyperbola and Ellipse in relation to the application of areas (testimony of Proclus); to observe the change in meaning of such terms by later authors (Apollonius) in relation to conics (the reason will be clarified later in connection with the concept of 'symptoma'); to understand the meaning of the 'Parabola of areas' (Euclid, *Elements*, I, 44).

b) A few students enjoyed the trisection by Anaritius, for different reasons: in fact, the construction seemed complex to a few but others found it simple and ingenious at the same time. Someone else found the initial meaning of Parabola, Ellipse quite interesting.

LESSON SIX: **Mathematical models (Modena)**

a) To illustrate the mesolabe theory and the way it works; to illustrate the genesis of the conics according to Menaehcmus and Apollonius; to derive the 'symptoma' of orthotome; to illustrate the change in thought in the XVIIth century; to illustrate the working of some machines, in particular the construction of parabola and ellipse.

b) The mechanical models to trace curves were mostly appreciated: the conchoid and the mesolabe in particular: as to the conchoid they remarked: «Though it looks simple it is complex and quite interesting». «By using the same equation, it obtains two different figures; and as to the mesolabe they said: «Interesting for the possibility to carry out calculations».

LESSON SEVEN: **Application of areas-III (Ellipse, Hyperbola)**

a) To understand the meaning of the 'ellipse of areas' (Euclid, *Elements*, II, 5; construction of Simson); to understand the meaning of the 'hyperbola of areas' (Euclid, *Elements*, I, 6).

b) A few students have really caught the originality, the simplicity and the clarity of Simson's construction and also the novelty of the elliptic application of areas.

LESSON EIGHT: **Conics in their origins-I (Genesis of conics: Euclid, Serenus)**

a) To illustrate the central position of proposition III, 35 (Euclid) and of the IV (Serenus) in the determination of the 'symptoma' of a conic; to illustrare the ways of construction of curves in antiquity; to illustrate the different viewpoints in the definition of conics; to further insist on the meaning of the names of conics, in view of a complete clarification by singling out the 'symptoma' in each conic.

LESSON NINE: **Conics in their origins-II (Apollonius; 'Symptoma' of a conic).**

a) To obtain the 'symptoma' of the parabola through a plausible reconstruction of some archaic proof (use of the III, 35 of *Elements*); to understand the reasons for Apollonius's introduction of the new names; to discuss the meaning of «Lactus Rectum», to inspect a few ancient texts.

b) Students were fascinated by the ancient texts, by the fact the could 'touch' history as they could leaf through them.

Part two

The choice of the book by M. de la Chapelle was suggested by the possibility to use the original text, but above all by the elegance and simplicity of proofs of conic main properties, which basically depends on Euclid III, 35.

Some practical problems had to be faced: first, students study English and not French as a foreign language; second, eighteenth-century French presents language structures that can make comprehension somewhat difficult; third, there exist differences, not only linguistic but also conceptual, in the way to prove theorems as compared to the present time. Finally, the lay-out characterstics and the old-fashioned notations are to be taken into account.

To cope with the impossible direct reading of the original text a sort of reading simulatiom was envisaged by means of worksheets based on the following guidelines: 1) progression of difficulties; 2) use of the original book notations, in particular to indicate proportions and brackets; 3) reproduction of the text figures; 4) literal translation of the text in order to keep its language structures. Students were asked to reconstruct the original proofs that had been left incomplete on purpose.

They worked on their sheets in small groups, and their results were then checked and commented on when the transparencies with the complete proofs were shown to them. Students' remarks showed their preference for these more active lessons: they make things easier and more pleasant to do; the second part of the course was more difficult but more engaging and rewarding for the student. I liked the accurate and guided way we did things and I enjoyed the teacher's explanations.

Final questionnaire

Over-all assessment ranging from 1 to 5

	total	part one	part two
Apreciation	4.3	4.3	4.1
Difficulty	3.8	3.6	4.4
Interest	4.2	4.1	4.3

The question «**what subjects would you have liked to study more in depth**?» received different answers: some would have liked more historical information, some more discussion on the philosophic and religious implications, others more biographical facts and details on the authors studied. An interesting remark by a student stated that «it is important to understand that math is not only a school subject you have to learn to pass an exam or get through in a class test, but a discipline that is closely related to man's deepest needs».

The question «**do you think the course has widened your cultural horizons and enriched your way of thinking?**» received interesting answers: «I'm now aware of how ingenius the ancients were and of how much they did for us and of how little clever we are». «I have learnt something I would never have learned in the ordinary school syllabus». «I liked the two ways of doing the course: first part theory and then practice. The proofs I have had to complete helped me to learn to work on my own». «I liked working with the gradual worksheets because they implied a step-by-step reasoning unlike my usual way of thinking». «I now look at things in a more critical way. What the teacher has taught us is difficult to find and rarely available to secondary school students. The course helped me to reflect more on apparently simple problems. The intuitions of some mathematicians in the solution of some proofs have helped me to be more openminded and solve problems and questions without disregarding any points of view«.

The question «**Did the course produce any change in your way of studying school subjects in general?**» received ten positive answers, five negative and one uncertain. For example: «I ask myself more questions, I no longer keep to what I am told to study but I try to reach a more thorough understanding. In tackling problems, I now proceed methodically, steep-by-step, point by point. Things must be seen in depth, we have to investigate into their nature and not accept them as they are. Now, I very often organize my study by following schemes or building them; moreover, I try and reason in a more systematic way. I no longer focus my attention on a detail, but I consider a problem in general, by transformimg it, if possible, into a more simple one».

The question «**Do you think that a historical approach to the study of math is important?**» got all positive answers. Here is a selection of some interesting ones. «It is very important to identify oneself with ancient mathematicians and guess how they could come to those conclusions». «Yes, certainly to understand how interpretations of the same problem have changed in times». «Yes, because we see mathematics not as a cold discipline for someone brainy, but as something permeated by feelings and rooted in human needss». «To better understand the process of theorems and of proofs it is important to learn 'what lies behind them'». »Yes, you can even happen to love math a little mores».

To the question «**Would you be prepared to attend another course?**» 11 said «yes», 3 «no» and 2 «I don't know».

Here are some interesting and unexpected answers to the question «**If yes, which subjects would you like to deal with?**»: «I'd like to know about the history of mathematics of non-western countries». «I'd be interested in the philosophical implications of other math questions; about the square figure». «I'd like to know who worked on such an important figure». «Is Math an opinion or not?».

To the question: «**Did you have the impression of being 'tortured'?**» 14 answered no, 1 yes, 1 was left unanswered.

To the question: «**Did you enjoy yourself?**» 16 answered yes, with one exception: 1 added very much.

Answers to the questions «**What do you think were your teacher's intentions?**» were: «To present a new approach to math very different from the one we are used to». «To convey some of his great passion for Math to his students». «To stimulate our *Mens Mathematica* (Mathematical Mind)». «To improve our way of proceeding not only in math but also in other fields». «You should ask him but I saw him immensely interested in showing us what he seems to like very much». «To teach us how to change our way of thinking in math., and in general». «He wanted to make us go beyond theorems and get near the roots of math».

The comments to the last item of the questionnaire «**Finally, briefly describe your own experience in the course**» were: «It has been interesting and amusing, an original experience, difficult, stimulating». «It was very enjoyble, sometimes a little boring, perhaps». «The course was too long, but I know the subject was vast». «It was a reason for meeting and devoting more time to math». «It was a work elegantly and pleasantly proposed». «A new experience and a good stimulus for working together».

Bibliography

Apollonius, *Conics*, Great books of the western world, Encyclopaedia Britannica Inc., The University of Chicago, 1975

Bkouche, R., '*Un peu d'histoire*', in: D. Lehmann - R. Bkouche, *Initiation à la géométrie*, puf, Paris, 1988

Boyer, C.B., *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1968

Bunt, L. N. H. - Jones, P. S., Bedient, J. D., *The Historical roots of elementary mathematics*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976

M. de la Chapelle, *Traité des sections coniques, et autres courbes anciennes*, Debure, Paris, 1765

Chasles, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, J. Gabay, Paris, 1989

Colenso, J. W., *The Elements of Euclid (The parts usually read in the Universities) from the text of Dr. Robert Simson. With geometrical exercises*, Longmans, Green, and co, London, 1866

Coolidge, J. L., *A History of the conic sections and quadric surfaces*, Dover, New York, 1968 (Oxford University Press, 1945)

Dedron, P. & Itard, J., *Mathematics and mathematicians*, 2 vols, The Open University Press, Milton Keynes, 1978

Dijksterhuis, E. J., *Archimedes*, Princeton University Press, Princeton, 1987

Diocles, *On burning mirrors*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1976

ver Eecke, P., *Les oeuvres complètes d'Archimède suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, 2 vols, Blanchard, Paris, 1960

Euclide, *Les Éléments*, vol 1, vol. 2, puf, Paris, 1990, 1994

Euclide, *Gli Elementi*, UTET, Torino,1970

Euclide, *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna* (Enriques, F. ed.), 4 vols, Zanichelli, Bologna, 1930

Euclide (Heath, T. L. ed.), *The thirteen books of Euclid's Elements*, 3 vols, Dover, New York, 1956

Heath, T., *A History of Greek mathematics*, 2 vols., Dover, New York, 1981

Heath, T., *The Works of Archimedes*, Dover, New York, 1953

Hoefer, F., *Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusq'au commencement du dix-neuvième siècle*, Hachette, Paris, 1879

Knorr, W. R., *The ancient tradition of geometric problems*, Dover, New York, 1993 (Birkhauser, Boston, 1986)

Lebesgue, H., *Les coniques*, 1942 (Editions Jacques Gabay, Paris, 1988)

Loria, G., *Le scienze esatte nell'antica grecia*, Hoepli, Milano, 1914 (II ed.)

Pappus d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, trad. par Paul Ver Eecke, 2 vols, nouveau tirage), Blanchard, Paris, 1982

Pergola, M. & Zanoli, C., 'Introduzione alla geometria delle coniche', *NUMI*, a.22, supplemento al n.8-9, 225-231

Proclo, *Commento al I Libro degli Elementi di Euclide*, Giardini, Pisa, 1978

Proclus de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide*, Desclée de Brouver, Bruges, 1948

Salmon, G., *Treatise on conic sections*, Sixth ed., Chelsea, New York

M. l'Abbé Sauri, *Institutions mathématiques, servant d'introduction a un cours de philosophie, a l'usage des Universités de France*, Valade, Paris, 1777

Serenus d'Antinoe, Le *livre de la section du cylindre et le livre de la section du cone*, Blanchard, Paris, 1969

Simson, R., *Euclidis Elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini*, Glasguae, M.DCC.LVI

Smith, D., E., *History of mathematics*, Dover, New York, 1958 (Constable & co, London, 1923)

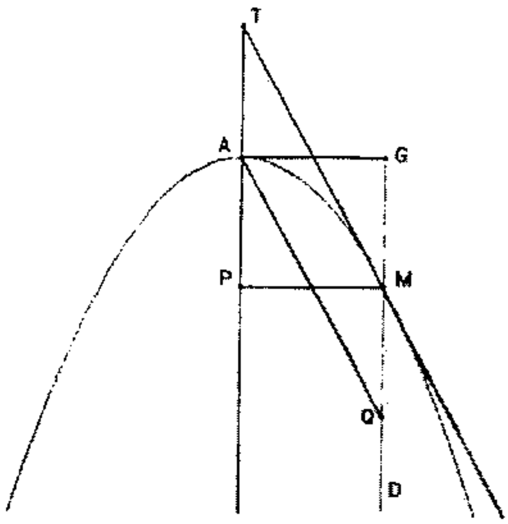
Tannery, P., *La géométrie grecque*, J. Gabay, Paris, 1988 (Gauthier - Villars, Paris, 1887)

Appendix. Worksheet 14. Parameter of a Diameter - 2

PROPOSITION XIV (p. 63). Le quart du Paramètre t d'un Diamètre quelconque MD est égal au quart du Paramètre p de l'Axe, joint à l'Abscisse AP déterminée par l'Ordonnée MP menée du Sommet M de ce Diamètre, c'est-à-dire que

$$t/4 = x + p/4$$

Draw TM tangent to the parabola in M and AQ parallel to TM (see figure):
$AQ = MT$; $MQ = AT = AP = x$. Hence $PT = 2x$
Then: $\overline{PT}^2 = 4xx$; $\overline{PM}^2 = px$, because ....
But: $\overline{AQ}^2 = MQ \times t$; because ....
Then: $t = \overline{AQ}^2/MQ = \overline{MT}^2/AT = (\overline{PT}^2 + \ldots.)/AP = (4xx + \ldots.)/\ldots = \ldots + \ldots$
Hence the conclusion.
COROLLARY (p. 63). $p < t$, that is ....



DA MATEMÁTICA À MÚSICA: UM PASSEIO NUMÉRICO ATRAVÉS DOS SONS

Oscar João Abdounur, Universidade de São Paulo
Christina Brito Bottura

INTRODUÇÃO

A partir da comparação das trajetórias da matemática e da música, esta comunicação pretende fornecer subsídios para tornar visíveis esquemas comuns reveladores da proximidade silenciosa entre as linguagens referidas. Do ponto de vista didático/pedagógico, o presente trabalho aplica concepções de *conhecimento como rede* e de *inteligência como espectro de múltiplas competências* ao eixo matemática-música, relevando caminhos interdisciplinares no acesso e construção de significados. Sem perder de vista as características originais de cada área, analogias tornam-se poderosas ferramentas nessa dinâmica, podendo desencadear e configurar pensamentos, sentimentos e ações a partir de relações estabelecidas em domínios já familiares, o que aproxima cognição e afeto.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: ANALOGIAS NA CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS

O conhecimento se organiza em redes de significados. Esta idéia, que se opõe à de construção linear ou vertical do conhecimento, vem conquistando importância crescente nos terrenos da epistemologia e da didática. No dizer de Capra (1992: 133) agora nos estamos movendo em direção à metáfora do conhecimento como uma rede, um tecido onde todos os elementos encontram-se conectados.

Lévy (1993) referindo-se ao universo de significações criou a metáfora de hipertexto, talvez válida para todas as esferas da realidade envolvendo significações (Lévy, 1993: 25). O hipertexto obedece a seis princípios conformadores: Metamorfose, Heterogeneidade, Multiplicidade e Encaixe das escalas, Exterioridade, Topologia, Mobilidade dos centros (Levy, 1993, p.26). A percepção de relações analógicas é tão essencial que o filósofo Dreyfus, da Universidade de Berkeley afirmou que ser inteligente é ver as relações analógicas existentes entre situações novas e antigas nas quais já sabemos como agir. (apud Machado, 1994:39)

A concepção de inteligência múltipla, organizada por Gardner e equipe defende a inteligência como possuidora de um vasto espectro manifestado através das dimensões linguísticas e lógico-matemáticas, musical e corporal-cinestésica, espacial, intrapessoal, interpessoal e outras.

A construção de significados pode ser comparada à famosa história dos seis cegos solicitados a descrever um elefante a partir da experiência tátil. Cada um descreveu baseado na parte que tocou: o que pegou a perna disse trata-se de uma árvore, o que segurou a cauda disse tratar-se de uma corda e assim por diante. Ou seja o significado de elefante deveria ser construído pela reunião de todas essas associações analógicas - multianalogia - dado que na redução uma das analogias é supervalorizada.

Um significado pode ser construído utilizando-se dos diversos espectros da inteligência. Por exemplo, um aluno com deficiência no eixo lógico-matemático, mas promissor na competência musical pode assimilar o significado de séries de Fourier a partir de uma metáfora onde olha-se seus termos como harmônicos do som agora relacionados também com a matemática e portanto com novo significado, assim como a melodia, harmonia e todos os conceitos enredados direta ou indiretamente ao significado de séries de Fourier e harmônicos do som.

Uma conduta didático-pedagógica que concorda em aproximar e equilibrar as diversas competências da inteligência, reconhecendo distintas formas de argumentação e negociação mentais existentes nos indivíduos, valorizando uma poderosa forma de pensar, integrando diferentes contextos, resgata o sentido de universidade como diversidade dentro da unidade, vários ofícios integrados, ofícios e ciências que buscam princípios válidos em vários ramos do saber.

UMA APLICAÇÃO AO EIXO MATEMÁTICA/MÚSICA

As reflexões sobre as relações de matemática e música não se baseiam somente nos estudos separados dessas áreas, mas também em experiências adquiridas ministrando aulas de "Fundamentos de matemática e acústica aplicados à música" no departamento de música da *Escola de Comunicação e Artes da Universidade de São Paulo,* bem como oficinas interdisciplinares de música e matemática oferecidas pelo *Instituto de Matemática* e pela Estação Ciência da Universidade de São Paulo.

A matemática e a música possuem vínculos profundos já conhecidos desde a Antiguidade, por exemplo no experimento com o monocórdio realizado por Pitágoras. Neste primeiro experimento científico que se tem registro, Pitágoras não somente estabeleceu correspondência entre frações e intervalos musicais, mas relacionou razões simples a consonâncias - oitava : 1:1/2, quinta: 1:2/3, quarta: 1:3/4. Este fenômeno teve diferentes explicações em distintas épocas da história ocidental, refletindo as concepções científicas vigentes. Pitágoras estabeleceu a questão que atravessaria parte da Antiguidade, a Idade Média e parte da Era Moderna até o século XIX:
Por que subjazem razões de pequenos números inteiros às consonâncias musicais?

No século XVII, Galileo Galilei estabeleceu o elo entre a matemática e a música que permitiria catalisar assustadoramente as pesquisas desta época correspondentes a interface matemática/música. O pensador italiano apresenta-se como aquele que melhor explica o fenômeno da altura musical ao caracterizá-la pela frequência de vibração de pulsações de ar correspondentes a onda sonora que chega ao ouvido. A partir daí, a altura musical abandona sua associação parcial a comprimentos de uma corda vibrante, em vigor desde Pitágoras, para assumir o significado de frequência, diretamente ligado ao conceito de função periódica.

Tal resignificação propiciará a compreensão de distintos conceitos acústico-musicais atrofiados por ancorarem-se a explicações apoiadas na antiga concepcão de altura musical. Por exemplo, à luz da idéia de frequência, torna-se mais claro conjecturar os harmônicos do som como a superposição de configurações de ondas no ar de diferentes frequências, do que como a composição de diversos modos de vibração de uma corda. Nesse contexto, o legado de Galileo, a correspondência entre distintas frequências de vibração numa corda e diferentes configurações de nós, estabelecida por Wallis, bem como outras observações de téoricos em acústica-musical da época contribuirão para que Saveur, concebendo o Princípio da Superposição, explique matematicamente os fenômenos de batimento, timbre e harmônicos do som, agora re-significados. .

A dinâmica epistemólogica mencionada prenuncia em linguagem musical o nascimento do conceito subjacente a *Séries de Fourier*, induzindo a inteligência coletiva ao estabelecimento de tal teorema na pessoa de Fourier um século mais tarde. Este resultado resignifica novamente os conceitos referidos, propiciando, ainda, explicações para fenômenos musicais relacionados a regras de harmonia tradicional estabelecidas a partir de critérios sustentados apenas na sonoridade e desprovidos de explicação teórica satisfatória. O Teorema de Fourier engloba e adequa os conceitos referidos num esquema cognitivo que, já vindo sendo construído, adquire um significado mais amplo em sua nova forma. Tal processo pode ser comparado aos diversos pontos pretos que compõe o negativo de uma foto. A princípio, observando de perto, não percebemos a figura da qual aqueles pontos são o negativo, mas depois, afastando-se, percebe-se o todo. O teorema de Fourier possui, portanto, o sentido da emergência de um conceito que já vinha sendo construído desde a associação de altura musical a frequência.

Com a visão apoiada no futuro e à luz das concepções teóricas defendidas nesse trabalho, podemos retomar a Grécia Antiga observando, com óculos mais poderosos, o desenvolvimento da música no que diz respeito, por exemplo, a processos de formação de escalas, transformações de concepções melódicas em harmônicas e emergência do temperamento, ressaltando, ainda, a maneira como a matemática atua tacitamente nessa dinâmica.

As *Séries de Fourier* permitem, agora, compreender, de maneira mais satisfatória na concepção atual de ciência, porque a oitava, a quinta e a quarta eram considerados consonâncias perfeitas na Grécia, já que estas correspondem respectivamente aos primeiros três intervalos da série referida. Além disso, a oitava mostra-se como o primeiro intervalo em que a nota superior possue todos os seus harmônicos contidos nos harmônicos da inferior. Por um raciocínio análogo, o intervalo de quinta apresenta-se como aquele de maior coincidência harmônica depois da oitava. Os aspectos anteriores, presentes silenciosamente na época, não apenas vinculados ao desejo de estabelecer-se um sistema musical com o máximo de intervalos consonantes, mas inseridos num contexto filosófico-epistemológico sustentado pelo conceito de comensuralidade, justificam a construção de uma escala a partir dos dois intervalos referidos.

A partir do estabelecimento da escala pitagórica, a música ocidental herda da matemática uma linguagem sustentada ocultamente por número racionais, que apoiará seu desenvolvimento por quase 2000 anos. Esse período significativo justifica-se pelo fato da concepção pitagórica possuir muitos aspectos comuns com aquela sustentada pelas *Séries de Fourier*, que já estando presente silenciosamente, viria a substituí-la de maneira mais direta. O dogmatismo aritmético de Pitágoras vigora enquanto os fenômenos acústico-musicais observados se adequam a ele e as necessidades da música não põe em risco sua validade. Observando a dinâmica epistemológica de desenvolvimento da música nesse período ciente das descobertas acústico-musicais referidas, podemos compreender, agora, à luz da matemática, alguns mecanismos presentes ocultamente na trajetória desta ciência.

Desde o início da Idade Média até o Renascimento, a música perpassa pelo Canto Gregoriano, Organum Paralelo - o que poderíamos caracterizar como o início da Polifonia - , Organum Melismático e outras formas musicais. A música ocidental, nesse período, abandona gradativamente concepções estritamente melódicas para vestir uma roupagem essencialmente harmônica.

Do ponto de vista epistemológico, o contexto referido caracteriza-se fortemente por mudanças de estrutura/dinâmica de pensamento coletivo, que abandonam esquemas regidos por concepções monistas, não somente na música, para assumir a diversidade em todos os sentidos. Tal cenário histórico-cultural munido do Teorema de Fourier possibilita compreender, sob uma ótica matemático-epistemológica, distintos significados musicais e regras de harmonia tradicional, tais como o fato do intervalo de quarta firmar-se como dissonância, bem como a proibição de quartas, quintas e oitavas paralelas com a consolidação da polifonia, estabelecidos por teórico-musicais da época unicamente a partir de suas vivências sonoras.

O consolidação do intervalo de terça como consonância no Renascimento, juntamente com o contexto acústico-musical dessa época apresentado anteriormente, possibilitam, conscientemente ou não, a mudança na escala sugerida por Zarlino em 1573. Os pitagóricos haviam utilizado números de 1 a 4 para construir seus intervalos/frações e caminhado por quintas para a construção das escalas obtendo para cada nota do sistema diatônico - escala que corresponde as teclas branca do teclado- uma fração múltipla de 3/2 exceto para o 4° grau. Cabe ressaltar aqui as modificações, para relações mais simples, nas razões de frequências de notas do sistema pitagórico constituídas por números muitos grandes, justificadas pelo pensador italiano pelo fato de que deveríamos considerar não apenas os números 1, 2, 3 e 4 como geradores de tudo, mas o 5 e 6 também, já que havia 6 planetas, 6 direções, 6 faces no cubo, etc. Zarlino modificou o 3°, 6° e°7° graus respectivamente de 81/64, 27/16 e 243/128, correspondentes à concepção pitagórica - para 5/4, 5/3 e 15/8, no sentido de obter frações que utilizassem menores números inteiros. Zarlino ampliou o antigo conceito de consonância agregando àquelas estabelecidas por Pitagóras, a terça e a sua inversão - a sexta -, então denominadas consonâncias imperfeitas. O mais interessante é que, ao estabelecer esta nova escala, Zarlino assume diferentes relações de frequência somente para os intervalos que não correspondiam aqueles existentes na *Série de Fourier*, utilizando exatamente os seis primeiros harmônicos da série , ou seja, ele busca as frequências pertinentes a Série de Fourier dois séculos antes do descobrimento deste resultado. Além disso, a mudança no sistema musical de Zarlino acompanha a modificação na concepção de consonância de Pitágoras, caracterizada pela relação de números com fatores 1, 2, 3 e 4, para a de Galileo, definida como a coincidência de pulsações das notas superior ou inferior, que matematicamente significa a proximidade do mínimo múltiplo comum das frequências correspondentes as notas do intervalo.

Essa mudança de *status* do intervalo de terça, bem como o crescente reconhecimento do papel do baixo como base harmônica na polifonia renascentista finalizam a evolução da música ocidental no sentido da verticalização triádica, estabelecida pelo teórico musical Rameau no início do século XVIII. Cabe, ainda, ressaltar que a tríade maior aparece no início da série harmônica de um tom, assim como a tríade menor mostra-se como aquela cujas notas correspondem a frequências em que o MMC apresenta-se mais próximo. Além disso, a tríade maior é a primeira combinação de três notas diferentes dentro da série harmônica, considerando como equivalentes duas notas de mesmo nome. Para Zarlino, a sonoridade maior era mais consonante que a menor pois a terça maior correspondia ao comprimento resultante da média harmônica entre os comprimentos da fundamental e da quinta, enquanto que a terça menor correspondia a média aritmética. Tal observação concede um caráter fractal ao descobrimento de notas harmônicas dentro de um intervalo.

Zarlino modifica a 3^{as}, 6^{as} e 7^{as}, que correspondem na concepção futura de tríade as terças do primeiro, quarto e quinto graus. Nesse sentido o pensador italiano contribui significativamente para a tendência triádica. Poderíamos, ainda, interpretar que Zarlino constrói a escala por terças, a partir do momento que este intervalo ganha caráter consonante, assim como Pitágoras o fez com a quinta. Nesse, sentido, a própria construção de escalas também obedece a um padrão fractal, confirmado posteriormente pelas *Séries de Fourier*. Do ponto de vista epistemológico, Zarlino utiliza argumentações as vezes mais ou menos científicas, numa ótica moderna, o que o caracteriza como representante da transição nas concepções científicas, que intimam um processo de matematização, mecanização e experimentação com a Revolução Científica.

A construção de escalas por Pitágoras utilizando ciclos de quintas até atingir uma oitava composta não se fecha, pois uma potência de 2 (ciclos de oitavas) nunca poderá igualar-se a uma potência de 3/2 (ciclos de quintas), o que geraria teoricamente uma escala infinita. Porém, após 12 quintas tem-se aproximadamente 7 oitavas, ou seja, matematicamente a potência sétima de 2 é aproximadamente igual a potência 12 de 3/2. Denominada coma pitagórica, esta pequena diferença correspondente a relação dos dois intervalos compostos construídos, será uma das principais reponsáveis pelo fenômeno do *Temperamento*. No processo do ciclo das quintas, a última última quinta passaria da oitava composta consecutiva da coma pitagórica. A fim de fechar o ciclo, e descartar simulatnemante a possibilidade de assumir uma escala infinita, tomava-se esta última quinta como o restante entre a última nota obtida e a oitava seguinte, chamada quinta do lobo, de natureza bem impura.

Enquanto a música permaneceu sem explorar territórios harmônicos muito distantes do início do ciclo das quintas, esta diferença não assumiu grande importância. Com o clima de diversidade referido, a música procura este significado no âmbito harmônico sentindo necessidade de migrar para cenários harmônicos mais distantes, o que começa a gerar problemas de distorção. Tal fato associado a impossibilidade de construção de teclados com muitas notas leva teóricos acústico-musicais a imaginar un novo sistema sobre o qual a música adquirisse liberdade de modulação.

A dinâmica apresentada leva tais pensadores a conceber não um sistema com várias quintas absolutamente puras e uma bem impura, mas numa nova arquitetura musical em que todas as quintas estivessem igualmente impuras. Os mecanismos mentais necessários a esse tipo de pensamento traduzem-se matematicamente no estabelecimento de um universo fechado agora numa ótica logaritimica, que abdica de concepções de frequências musicais relacionadas por números racionais, correspondentes aos intervaloss puros, para assumir relações de frequências na escala irracionais. A mudança para concepções incomensuráveis, sob o ponto de vista abordado, reflete-se numa ótica logaritimica em certa comensuralidade musical pois agora quaisquer dois intervalos se constroem como composição de um número inteiro de um certo intervalo básico.

As reflexões anteriores nos possibilitam ressaltar esquemas análogos entre as trajetórias da matemática e da música. Por exemplo, as modificações epistemológicas, sofridas pela matemática com relação a comensuralidade defendida pelo pitagorismo, propiciando novas concepções para a números, traduzem-se, no percurso da música, num corte epistemológico representado pelo *Temperamento*. Além disso, podemos observar que a *Série de Fourier* se reflete na história, no sentido de que os intervalos correspondentes a seus termos aparecem no percurso da música qualitativamnte na mesma ordem, ou seja, a história acompanha fractalmente as *Séries de Fourier*. O esquema correspondente a Séries de Fourier seria como um *arquétipo matemático* Outros arquétipos aparecem, por exemplo, no fato de que Kepler observa que as distâncias dos planetas obedecem mais ou menos as mesmas relações de frequências da escala musical,conjecturando, a partir disso em sua época, a existência de Urano> O pensador alemão possui grande contribuição para a música nesse sentido, observando por exemplo, que a relação entre as velocidades de cada planeta as posições de afélio e periélio repetem relações de consonâncias musicais, estabelecendo, a partir disso, o que seria a tradução para linguagem musical do movimento dos planetas

Do ponto de vista didático/pedagógico, o estabelecimento da relação entre razões de pequenos números inteiros e consonâncias por Pitágoras resignifica ambos os conceitos. Ainda no âmbito educacional, tal fato ganha relevante importância na medida em pode-se utilizar, sob uma ótica musical, a idéia de consonâncias na construção dó conceito de fração, que agora são ouvidas. Reciprocamente, as frações participam, sob uma ótica matemática da construção do conceito de consonância, que agora adquire representação matemática.

Analogias entre matemática e música tais como a *música dos planetas* de Kepler, construída em fita cassete, a correspondência entre a formação de escalas musicais temperadas e construção de calendários, e outros analogias sustentadas por *arquétipos* de mesma natureza podem assumir significativa no ambiente didático/pedagógico no que diz respeito a construção de significados.

Dinâmicas epistemológicas com as que propiciam a emergência do Teorema de Fourier podem agora ser reconstruídas em ambiente escolar, na construção multidirecional de significados, que propicia o establecimento acausal de uma espécie de *Gestalt*. As oficinas também tiveram um caráter de reconstrução em sala de aula da situação histórica possibilitando a revivência dos sentimentos e inquietações dos cientistas da época, a fim de observar de que maneira nesse percurso, reproduzido fractalmente no tempo, ocorria a construção de significados e formação de gestalt de conceitos.

A matemática oferece suporte silencioso a evolução dos sistemas musicais, ao mesmo tempo que a música manifesta arquétipos também presentes na matemática, que contribuem mutuamente a evolução coletiva da ciência. Por exemplo, o temperamento igual, muito cogitado, somente foi efetuado graças a descoberta do logarítmo por Neper no começo do século XVII. As gamas anteriormente predominantes também baseavam-se em conceitos matemáticos, tais como média harmônica, o que cosntrói tal conceito a partir da maneira como se manisfeta em uma ótica musical. A matemática através do temperamento igual, propiciou o surgimento de novos esquemas que incluem o próprio sistema tonal ampliando significativamente o universo da música.

No âmbito didático, as reflexões anteriores podem contribuir de diversas formas. Por exemplo, um aluno com deficiência no eixo lógico-matemático, mas promissor na competência musical pode assimilar o significado de Séries de Fourie apartir da metáfora onde se mira seus termos como harmônicos do som agora também relacionados com matemática e portanto com novo significado, assim como a melodia, a harmonia e todos os conceitos enredados direta ou indiretamente ao significado de Séries de Fourier e harmônicos do som.

Nesse caso, o aluno pode apreender o conceito en questão sentindo em seus ouvidos os termos da Série de Fourier, que agora agregam-se a sua rede afetiva. De maneira análoga, esse processo poderia ser aplicado por exemplo, na compreensão, como já mencionado, de construções de escalas musicais para a formação dos calendários ou vice-versa, no entendimento do processo que substitue o pitagorismo por concepções que incluem os números irracionais através da dinâmica de transformação do sistema musical num novo sistema que permite novas formas ou vice-versa, na compreensão da construção de escalas musicais pela formação de calendários ou vice-versa, bem como na construção de diversos outros conceitos, por reprodução histórica ou não em sala de aula, pertinentes a estas áreas sustentados por esquemas ou arquétipos análogos. A percepção de como tais esquemas e arquétipos se manifestam e emergem no decorrer da história permite, ainda, conjecturar, criar e inventar situações de ensino utilizando-se de analogias criteriosas entre distintos cenários para fins de construção de significados, tendo, num âmbito mais amplo, um sentido de conexão entre afeto e cognição.

Generalizando, mostra-se estratégia eficaz essa maneira de construção utilizando-se não somente as áreas alusidas, mas descobrindo esquemas e arquétipos a conceitos pertencentes a qualquer das competências da inteligência.

CONCLUSÃO

Analogias são recursos poderosos que podem favorecer o processo de construção de novos conceitos apoiados sobre os já familiares. O recurso analógico é utilizado frequentemente no processo heurístico e a afetividade mostra-se um fator de significativa relevância no sucesso da analogia, mais especificamente na busca de um análogo, uma vez que o sentimento está intimamente relacionado com experiência passada e sensibilidade.

Num processo que envolve o pensamento analógico, o trabalho mental não se limita a recuperar um análogo como um todo já preparado para ser utilizado no outro. Muitas vezes, a memória pode ser chamada para compilar um complexo de informações que não estavam conectados a priori, uma quantidade de informação é recuperada não somente de um análogo, mas de vários que se integram para aplicarem-se ao problema em questão e também a outros.

Este processo pode ser representado experimentando a observação do negativo de uma foto. A princípio, pode parecer apenas pontos pretos, que repentinamente tornam-se um todo. Vejo no conceito de multianalogia apresentado por Duit [1] uma similaridade bastante próxima desta experimentação, Neste processo, ocorrem transferências de partes de vários análogos para um determinado alvo, que organizadas muitas vezes através de um *insight*, possibilitam maior compreensão da situação em foco. Aqui, as transferências podem ser comparadas aos pontos do desenho, a organização ou o *insight* ao momento em que o observador deixa de ver apenas um agrupamento de pontos e enxerga um grupo de pontos compondo um todo. Este processo ainda poderia ser comparado a construção do significado em que utiliza-se metáforas e analogias propiciadoras da transferência de elementos para aquele significado, de forma análoga a foto. A partir desta simples metáfora, podemos reconhecer o influente papel da analogia na construção do significado no sentido de que este raciocínio integra e dá vida ao conceito, sugerindo a meu ver uma preocupação a nível principalmente estrutural de como as analogias atual iretamente e subliminarmente, o que implicaria no âmbito didático/pedagógico dos esquemas comuns a distintos conceitos.

BIBLIOGRAFIA

[1]ABDOUNUR, O. J. - Analogia: ferramenta indispensável na resolução de problemas e na criação científica. São Paulo, 1995. (Trabalho inédito)

[2] GARDNER, H. *Estruturas da mente: A Teoria das Inteligências Múltiplas* Porto Alegre, Artes Médicas Sul, 1994

[3] GARDNER, H. *Inteligências Múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1995

[4] HELMHOLTZ, H. *On the sensations of tone*, New York, Dover Publications, 1954

[5] LÉVY, P. - Tecnologias da inteligência, Editota 34, 1993

[6] MACHADO, N.J. - Epistemologia e Didática. São Paulo, Editora Cortez, 1995

[7] SADIE, S. (ed.) *Dicionário GROVE de música* Rio de Janeiro, Jorge Zahar Editor, 1988 (edição concisa)

[8] THAGARD, P. - "Analogy, Explanation and Education". In: Journal of Research in Science Teaching, vol.29 no. 6: 537-544, 1992.

THE VALUE OF MATHEMATICS—THE MEDIEVAL ISLAMIC VIEW AT THE TIME OF IBN SINA

George W. Heine, III

Mathematicians and teachers of mathematics are frequently asked by students, administrators, employers and society, "What is mathematics good for? Why should we (take this course, pay for this)?" We may be troubled by how often the question is asked, and we may find it difficult to give a satisfactory answer. Yet the question is clearly important, and its answers give insight into the relationship between our discipline and our culture.

The answers that we tend to give today tend to fall in three categories:

Pragmatic answers emphasize the essential role of mathematics in the natural sciences, engineering and computer science, economics, and other fields which are clearly central to our technological society.

Pedagogical answers state that the study of mathematics is useful for training the mind in abstract thought as a prelude to other subjects.

Hedonistic answers stress that mathematical problems can be interesting, challenging, satisfying, and otherwise bring pleasure to those who work on them.

To put our answers in perspective, it is interesting to examine how another culture might answer these questions.

In this paper, I will try to discern the view of mathematics in medieval Islam. My focus will be the lifetime and works of the Persian scholar Abu 'Ali al-Husayn ibn 'Abdullah ibn Sina (980-1037[1]), known in the west as Avicenna. This period has been called the "Golden Age" of Islamic science. It was an active and creative time, when Ibn Sina, al-Biruni, and a large number of other philosophers, mathematicians, natural scientists, and other creative thinkers were active. This culture shares many historical links with our own, and we might expect that it would assent to all three of the above justifications for mathematical activity, with perhaps a difference in emphasis. Yet the culture is also different from ours in many ways, and it is perhaps not surprising that we find some entirely alien elements.

Life and Background

We can be fairly certain about the facts in Ibn Sina's life; an autobiography, with the narrative completed after his death by one of his pupils, is extant [2]. He received his early education in Bukhara, at the far eastern corner of the caliphate, in what is today Uzbekistan. By the mid-tenth century, the 'Abbasid caliphate was in decline, and the

[1] All dates in this paper are C.E. unless otherwise noted.

[2] In preparing this paper, we used English translations appearing in [Arberry, 1951] and [Gohlman, 1974].

eastern part of the domain was under *de facto* control of a number of warring and semi-autonomous rulers. Like other scholars of the day, Ibn Sina made his livelihood at court as physician, astrologer, and engineer. Because of the instability of the times, he was forced to frequently move from one court to another, sometimes having to leave in the middle of the night. The biography hints that over-indulgence in drinking and sex may have contributed to his death at the relatively young age of fifty-eight.

Ibn Sina was a prolific writer; more than two hundred and fifty books, treatises, and letters have survived[3]. He was most well known in Europe for *al-Qanun fi-Tibb*, an encyclopedia of medical knowledge. There are relatively few specifically mathematical works. His works on arithmetic, geometry, and trigonometry seem to be largely summaries of Nichomachus, Euclid, and Ptolemy, although al-Daffa and Stroyls report that he has improved on the original in a few places and possibly even contributed a new theorem or two [4]. However, Ibn Sina was familiar with the mathematics and the attitudes toward mathematics in his culture, and carried on an extensive correspondence with the prominent mathematician al-Biruni [5].

The Pragmatist

In medieval Islam, as for centuries before and since, calculation was an everyday necessity in the business world. By the tenth century, the place-value method was widely known. Thus we read in Ibn Sina's autobiography that he was sent by his father to a vegetable seller to learn the art of "Indian calculation". Perhaps what is interesting in this account is that, in contrast to Plato's attitude, ordinary calculation is considered a respectable part of one's education. (Ibn Sina reports on studying calculation after studying the Qur'an, and before studying logic and geometry.) This may be due to the influence and reputation of al-Khowarizmi (d. 844) and other algebraists. An alternate text of the biography suggests that, at the same time as Ibn Sina studied calculation, he was learning algebra from a man known as "The Mathematician". The respectability of ordinary computation may have helped lead, at this time, to the invention of the method of prosthaphaeresis to do multiplication via addition and trigonometric tables [6].

Although medieval Islam would agree with us that mathematics has practical applications, some of those applications had the additional stimulus of religious duty. Certain specific religious requirements of the Qur'an have mathematical implications. For example, methods were needed for determining the *qibla*, or bearing to Mekka, as the prescribed direction in which to pray and to orient the mosque. This stimulated an intensive study in the early Muslim centuries of geography, astronomy, and spherical trigonometry. Al-Biruni's treatise *Kitab Tahdid al-Amakin* was written to solve the qibla problem for the city of Ghazna in present-day Afghanistan.

As another example, the complicated rules of inheritance in the Qur'an stimulated

[3] [Nasr, 1964], p.180.

[4] [Al-Daffa and Stroyls, 1984a]

[5] Samples of this correspondence can be found in Chapter 10 of [Nasr, 1964].

[6] There is some controversy about whether prosthaphaeresis was known to medieval Islam. See [Al-Daffa and Stroyls, 1984b].

he rejected the literal truth of those verses of the Qur'an which speak of the physical pleasures of paradise. This belief caused him to be charged with heresy during his lifetime, after his death, and definitively a century later by the polemicist al-Ghazali. We can do no better than quote his own words from the *Kitab al-Najat*, still eminently readable a thousand years later:

> "Now the peculiar perfection towards which the rational soul strives is that it should become as it were an intellectual microcosm, impressed with the form of the All...until it realizes completely within itself the shape of all Being, and thus converts itself into an intelligible cosmos of its own in correspondence with the whole existing Cosmos, contemplating perfect Comeliness, absolute Good, and true Beauty, and united therewith. So it will have become graven after its idea and pattern, and strung upon its thread as a pearl is strung upon a necklace, being refashioned into the self-same substance thereof.
>
> When this state is compared with those other perfections so ardently beloved of the other [sensual] faculties, it will be found to be of an order so exalted as to make it seem monstrous to describe it as more complete or more excellent than they; indeed, there is no relationship between it and them whatsoever, whether it be of excellence, completeness, abundance, or any other of the respects wherein deleight in sensual attainment is consummated."[12]

It is clear that Ibn Sina and the intellectuals of his period took pleasure in solving problems. Thus, they would assent to the "hedonistic" answer for studying mathematics. But their answer had a far deeper dimension. Intellectual pleasure became the basis for a whole doctrine of higher and lower pleasures, and was conceived as a means of purifying the soul, and reaching contemplation of the All. This leads us into a view of mathematics, and intellectual study in general, which is not familiar to our culture. We look more closely at this unfamiliar view in the next section.

The Mathematics of the Sacred

In Ibn Sina's autobiography, we read

> "My father was one of those who responded to the propagandist of the Egyptians and was reckoned among the Isma'iliyya. From them he, as well as my brother, heard the account of the soul and the intellect in the special manner in which they speak about it and know it. Sometimes they used to discuss this among themselves while I was listening to them and understanding what they were saying, but by soul would not accept it."[13]

The Ismai'iliyya were a sect of the Shi'ite muslims. Very approximately, their doctrine was that the Almighty produced the world through a series of ten "emanations", each successive emanation being more coarse and material than the previous. It is hard

[12] [Arberry, 1951], p. 67
[13] [Gohlman, 1974], p. 19.

interest in algebra, diophantine analysis, and combinatorics. A long line of mathematicians, beginning with al-Khowarizmi, have written solutions to inheritance problems.

David King [7] lists these and several other problems and suggests that each gave rise to two types of solutions: the approximate solutions, most commonly used in actual situations (for example, many mosques in the early centuries were simply built facing south), and the difficult, more exact, solutions devised by the scholars of the period. No doubt the scholars who set to work on these problems got the same satisfaction that we do from solving an intriguing and complex problem. But they must have also had the extra stimulus of performing a religious duty, and the extra reward of having benefitted and contributed to the piety of the whole community.

The Pedagogue

The notion that the study of mathematics trains the mind to abstract thought goes back at least to Plato's *Republic*. It is implicit in Ibn Sina's autobiography, since he studies first literature, then "Indian calculation", then Euclid, then Ptolemy, before turning to the study of philosophy. It was also explicit in his cultural milieu. A hundred years before, al-Kindi (d. 873) had written a book *In that Philosophy cannot be Attained except by way of Mathematics* [8]. Al-Kindi is reported to have said that "the first [science] in teaching is mathematics" [9]. After his time mathematics was referred to as "the first study" [10].

One consequence of this attitude seemed to be that no one could be taken seriously as a philosopher unless one actually did some mathematics. It may have been for this reason that Ibn Sina felt compelled to introduce summaries of Nichomachus and Euclid into his writings.

The pedagogical view in this period had a deeper significance than it does to us. Mathematics was not meant merely to train the mind, but also to purify the soul. Al-Farabi (870-950), in his treatise "On the Different Meanings of the Intellect," proposed that the intellect begins by dealing only with perceptions of the senses. Training it to comprehend abstractions is a step in the process which leads eventually to "communion, ecstasy, and inspiration" [11]. Ibn Sina, in the text quoted in the next section, became the foremost exponent of this theory.

The Hedonist

Although Ibn Sina's specifically mathematical output was small, there is no question that he viewed the exercise of intellect as the greatest pleasure available to the human mind. His devotion to this principle was so absolute that, despite his religious training,

[7] [King, 1993]

[8] See [Afnan, 1958], p. 22.

[9] Ibid.

[10] [Sharif, 1963], p. 424.

[11] Space does not permit us to do full justice to al-Farabi's theory of the intellect. See [Sharif, 1963], pp. 461-2, for a more complete summary.

to tell, at this distance whether Ibn Sina himself really subscribed to Ismai'ili beliefs and his denial in the autobiography is self-serving [14]. But in any case, he was certainly exposed to this body of beliefs.

Karen Armstrong writes that the Ismai'iliyya

> "had developed their own philosophy and science, which were not regarded as ends in themselves but as spiritual disciplines to enable them to perceive the inner meaning (*batin*) of the Koran. Contemplating the abstractions of science and mathematics purified their minds of sensual imagery and freed them from the limitations of their workaday consciousness. Instead of using science to gain an accurate and literal understanding of external reality, as we do, the Ismailis used it to develop their imaginations."[15]

Here is a *raison d'être* for mathematics which does not fit neatly into any of our three categories, and which hints at a totally alien way of thought. "Purifying the mind" and "freeing the consciousness" are only now becoming important to Western culture, and we certainly do not immediately associate them with mathematics.

It is hard to find Isma'ili literature which refers to mathematics specifically as a training ground for the imagination. The problem is complicated by the fact that almost all the Isma'iliyya wrote anonymously. Perhaps their attitude is best represented by the alchemical literature, in which erstwhile descriptions of physical processes (changing lead into gold) were meant as metaphors for spiritual processes (purifying the soul).

We find another hint of this different outlook in Ibn Sina's autobiography:

> "And because of those problems which used to baffle me, not being able to solve the middle term of the syllogism, I used to visit the mosque frequently and worship, praying humbly to the All-Creating until He opened the mystery of it to me and made the difficult seem easy."[16]

Although any research mathematician can sympathize with Ibn Sina's frustration, it is unlikely that such a sentence would appear in a modern biography. We are accustomed to think of mathematics and religion as quite irrelevant to one another.

Conclusion

It appears that medieval Islam would agree with all three of the reasons that we give for studying mathematics, but their answers would have a different significance. Mathematics was practical, but among its practical applications was the fulfillment of religious duty. Mathematics was good for training the mind, but not merely to study biology and economics; the grasp of abstractions was an essential step in the process leading the soul to heavenly consciousness. Mathematics was enjoyable, but this enjoyment had a

[14] See remarks in the introduction to [Arberry, 1951] and especially Chapter II of [Afnan, 1958].
[15] [Armstrong, 1993], p. 178.
[16] [Gohlman, 1974], p. 29.

deeper significance because it led the soul to appreciate higher, rather than merely sensual, pleasures. In brief summary, the medieval Islamic culture differed from ours in the ever-present consciousness of a metaphysical dimension.

Perhaps the most difficult part of this exercise has been the attempt to stand outside of my own twentieth-century Western culture. It is very easy to assume, unless we are very careful, that a historical person was motivated by the same things that motivate us today. I have only been partially successful in lifting the veils of my cultural prejudice. But it is a valuable study, and one that seems worth pursuing. Not only does it give us greater understanding of history, it prepares us to empathize with the different world-views of our colleagues, clients, and students today, and perhaps can lead to a more thoughtful personal answer to the question "Why is mathematics important?"

References

[Afnan, 1958] Afnan, S. M. (1958). *Avicenna—His Life and Works*. Unwin Brothers, London.

[Al-Daffa and Stroyls, 1984a] Al-Daffa, A. A. and Stroyls, J. J. (1984a). Ibn Sina as a mathematician. In *Studies in the Exact Sciences in Medieval Islam*, pages 60–118. John Wiley and Sons, New York.

[Al-Daffa and Stroyls, 1984b] Al-Daffa, A. A. and Stroyls, J. J. (1984b). Some myths about logarithms in near eastern mathematics. In *Studies in the Exact Sciences in Medieval Islam*, pages 26–30. John Wiley and Sons, New York.

[Arberry, 1951] Arberry, A. J. (1951). *Avicenna on Theology*. The Wisdom of the East. John Murray, London.

[Armstrong, 1993] Armstrong, K. (1993). *A History of God*. Alfred A. Knopf, New York.

[Gohlman, 1974] Gohlman, W. E. (1974). *The Life of Ibn Sina—A Critical Edition and Annotated Tranlation*. Studies in Islamic Philosopy and Science. State University of New York Press, Albany.

[King, 1993] King, D. A. (1993). Science in the service of religion: the case of Islam. In *Astronomy in the Service of Islam*, Variorum Collected Studies, chapter 1. Variorum, Ashgate Publishing, Brookfield, Vermont. reprint of a 1990 article published by U.N.E.S.C.O.

[Nasr, 1964] Nasr, S. H. (1964). *An Introduction to Islamic Cosmological Doctrines*. Belknap Press, Cambridge, Mass.

[Sharif, 1963] Sharif, M. M. (1963). *A History of Muslim Philosophy*. Otto Harrassowitz, Wiesbaden.

OS PARADOXOS NA MATEMÁTICA AO LONGO DA HISTÓRIA

Renato Sardinha de Souza, EVOLUTA, Goiânia-Goiás/BRASIL

Desde a minha entrada no curso de graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás, tenho ouvido a citação da existência de paradoxos na Matemática. Entretanto, não tive a oportunidade de conhecer melhor tais paradoxos ao longo da minha formação acadêmica. Foi justamente essa falta de oportunidade (movida por uma curiosidade constante) que levou-me a buscar um pouco mais de conhecimento sobre o assunto.

O texto que pretendo expor não aprofunda-se nas questões filosóficas das diferentes correntes matemáticas que surgiram ao longo da História (como o "logicismo", de Russel; o "intuicionismo", de Brouwer; ou o "formalismo", de Hilbert), pois tais questões fugiriam do escopo ora pretendido.

A palavra "paradoxo", na linguagem do cotidiano, pode ser empregada para fazer referência a determinadas situações que parecem impossíveis ou autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras. Outra concepção de paradoxo é quando se está na situação de mostrar, por meio de raciocínio lícito (aparentemente) *que algo deve ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo*. Tomando essa concepção, vamos expor a seguir o "paradoxo de Epimênides" que, pela clareza de suas idéias, pode ser apresentado sem a necessidade de maior aprofundamento que o assunto aqui tratado requer.

Para formularmos o paradoxo de Epimênides, precisamos sempre admitir que:

i) Epimênides era cretense (da Ilha de Creta, Grécia);
ii) ele afirmou que os cretenses sempre mentem;
iii) todas as afirmações feitas pelos cretenses eram mentirosas.

Cada uma dessas hipóteses, isoladamente considerada, parece perfeitamente cabível e tem-se a *impressão* de que seria possível torná-las verdadeiras como um todo. Se fossem verdadeiras, no entanto, em bloco, viria a seguinte questão: e o enunciado de Epimênides, seria verdadeiro ou seria falso? Supor que Epimênides dizia a verdade acarretaria que ele havia feito uma afirmação falsa; admitir que ele fosse mentiroso acarretaria que havia dito uma verdade. A situação exposta, portanto, é paradoxal, pois parece-nos que a frase de Epimênides teria de ser, *simultaneamente*, verdadeira e falsa.

Os famosos paradoxos de Zeno (Eléia, Grécia, ±450 a.C.) eram argumentos que pareciam satisfatórios e que, não obstante, chegavam à conclusão absurdamente falsa de que nada neste mundo chega a se mover.

A colocação dos paradoxos de Zeno, o eleata, causou grande perturbação aos matemáticos gregos de sua época e, a partir dessa colocação, parece ter havido grandes influências no desenvolvimento da matemática grega. A título de análise, vejamos os seguintes paradoxos apresentados por Zeno:

i) **a Dicotomia**

Este paradoxo nos diz que antes que um móvel possa percorrer uma distância dada, deve percorrer a primeira metade dessa distância; mas, antes disto, deve percorrer o primeiro quarto; e, antes disto, o primeiro oitavo; e assim por diante, através de uma infinidade de subdivisões da distância pretendida.

Assim, um corredor que quer pôr-se em movimento precisa fazer infinitas interferências num tempo finito; ora, sabemos ser impossível esgotar todos os elementos de uma coleção infinita (no caso, a coleção são todas as distâncias a serem percorridas), portanto, torna-se impossível iniciar o movimento!

ii) **o Aquiles**

Refere-se este paradoxo a uma suposta corrida pretendida pelo lendário corredor grego e por uma lenta tartaruguinha. Coloca-se que a tartaruga saia com vantagem na frente do corredor mas que, por mais depressa que Aquiles corra, jamais alcançará a pobre tartaruguinha. Este paradoxo é semelhante ao primeiro, só que a subdivisão infinita é progressiva, em vez de regressiva, e explica-se pelo seguinte: quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá se adiantado um pouco; e quando Aquiles percorrer essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais. Continuando indefinidamente este processo, chega-se à conclusão de que Aquiles *jamais* poderá alcançar a lenta tartaruguinha...

Os paradoxos anteriores nos mostram que o movimento é *impossível* sob a hipótese da subdivisibilidade indefinida do espaço e do tempo.

iii) **a Flecha**

Neste paradoxo, Zeno coloca que um objeto em vôo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo; mas aquilo que ocupa um espaço igual a si mesmo *não está* (!) em movimento. Portanto, a flecha que voa, atirada por um arqueiro, está sempre parada. Logo, o seu movimento é apenas uma ilusão!!

iv) **o *Stadium***

Sem dúvida, é o mais interessante e o mais difícil de se expor dos paradoxos de Zeno. Tentaremos, agora, descrevê-lo. Consideremos $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ e $\alpha 4$ corpos de tamanhos iguais, parados; sejam $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ e $\beta 4$, corpos do mesmo tamanho dos α's, que se movem para a direita, de modo que cada β passa por um α num instante - o menor intervalo de tempo possível. Sejam $\delta 1$, $\delta 2$, $\delta 3$ e $\delta 4$ (também do mesmo tamanho de α e β) e movendo-se uniformemente para a esquerda com relação aos α's, de modo que cada δ passa por um α num certo instante de tempo. Suponhamos que, num dado momento, os corpos ocupem as seguintes posições relativas:

(imóvel)			$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$		
	$\beta 1$	$\beta 2$	$\beta 3$	$\beta 4$	(para a direita)			
(para a esquerda)					$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$

Após uma subdivisão indivisível do tempo (*sic*), isto é, passado *um único instante*, as novas posições serão:

$\alpha 1$	$\alpha 2$	$\alpha 3$	$\alpha 4$
$\beta 1$	$\beta 2$	$\beta 3$	$\beta 4$
$\delta 1$	$\delta 2$	$\delta 3$	$\delta 4$

É claro, então, que δ1 terá passado por *dois* dos β's; logo, o instante não pode ser o intervalo de tempo mínimo, pois podemos tomar como uma unidade nova e menor o tempo que δ1 leva para passar por um β. Conclusão: a situação acima exposta é, também, paradoxal.

Vários outros paradoxos existem que poderíamos analisar, como o "*Paradoxo de Cantor*". Observe o seguinte enunciado:

"Há um conjunto tal que, seja qual for X, X é um elemento desse conjunto se, e somente se, X for um conjunto que não seja um elemento de si mesmo." [Exemplo: O conjunto de coelhos não é um coelho, de modo que não pertence a si mesmo].

Este enunciado assevera a existência de um conjunto de todos os conjuntos que não sejam elementos de si mesmos. Admitindo que a existência de tal conjunto está assegurada, podemos dar-lhe um nome - digamos, "K" - e também propor questões a seu respeito. Perguntemos, em particular, o seguinte: será esse conjunto K um elemento de si mesmo? Parece que estamos em condições de afirmar: "Ou K é um elemento de K, ou não é um elemento de K."

Suponhamos que K seja um elemento de si mesmo; K deixaria, nesse caso, de preencher a condição que qualquer coisa precisa preencher a fim de pertencer a K. Teríamos, portanto, que K não pertenceria a si mesmo; satisfaria, então, a condição que é suficiente para torná-lo um elemento de si mesmo.

Demonstramos, assim, que há um conjunto K *que é, e não é, simultaneamente, um elemento de si mesmo*. E isso é uma flagrante contradição, portanto, constitui-se num paradoxo.

Pelo pouco que aqui vimos, percebe-se o quanto as questões paradoxais mexem com a nossa imaginação. Colocar questões desse tipo na sala de aula é uma boa estratégia para estimular os alunos a debates, onde o professor deverá valorizar as idéias de cada um, e enriquecê-los com fatos da História da Matemática, que levaram o homem a grandes evoluções do pensamento.

Aos colegas que desejarem trocas de experiências em Educação e História da Matemática, favor enviar correspondência para Rua C-194, Qd. 492, Lt. 10, CEP: 74270-130, Goiânia-Goiás/BRASIL.

BIBLIOGRAFIA:

BARKER, Stephen F.*Filosofia da Matemática*.Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1976.

BARON, Margaret E. *A Matemática Grega*. Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Brasília, Editora da Universidade de Brasília, 1985.

BOYER, Carl Benjamim. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

COSTA, Newton C. Affonso da. *Introdução aos Fundamentos da Matemática*. Rio Grande do Sul, Editora Hucitec, 1977.

Papers of HEM Braga 96 without texts included in these proceedings
Communications de HEM Braga 96 dont les textes ne sont pas inclus dans les actes
Comunicações de HEM Braga 96 cujos textos não estão incluídos nestas actas

P17: *A duplicação do cubo: como usá-la em sala de aula de matemática*
Eduardo Sebastiani Ferreira, Universidade de Campinas, Brasil

P21: *Regula Falsi: Some Reactions of Elementary School Teachers*
Greisy Winicki Landman, Dep. of Education in Technology and Science - Technion, Israel

P32: *Sidónio Pais (1872-1918), Matemático e Político Subsídios para a História da Faculdade de Matemática, Universidade de Coimbra*
Armando B. Malheiro da Silva, Universidade do Minho, Portugal; Jaime Carvalho e Silva, Universidade de Coimbra, Portugal

P43: *Deux aspects de la Renaissance dans un énoncé mathématique — L'Appendice Algébraique de Simon Stevin*
Paul Van Praag, Université de Mons-Hainaut, Bélgique

P51: *Valor posicional na educação da criança e na História das civilizações: uma conjunção na dificuldade e no desenvolvimento tardio*
Pedro Palhares, Universidade do Minho, Portugal

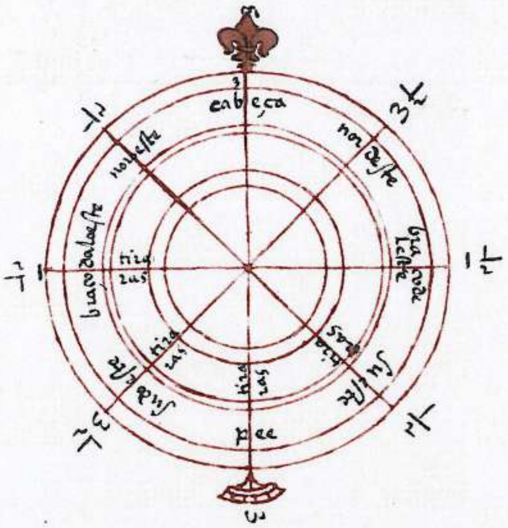
P54: *Histoire de la Théorie des Moindres-Carrés*
Roger Godard, Royal Military College, Canada

P62: *Non-Euclidean Geometries in Colombia: The Euclidean option of Professor Julio Garavito Armero (1865-1920)*
Luis Carlos Arboleda, Universidad del Valle, Colombia

P63: *Traditional games and the concept of probability: implications for teaching*
Abdulcarimo Ismael, Universidade Pedagógica, Maputo, Moçambique

P64: *Developing mathematical ideas by exploring a weaving board*
Marcos Cherinda, Universidade Pedagógica, Maputo, Moçambique

P72: *Teachers' Responses to Students who Discover Mathematics for Themselves*
Coralie Daniel, University of Otago, New Zealand



In the final form of the *Regiment of the North* (set of rules for compute the latitude from the Polaris altitude) a more general wheel was used. The pilots applied the corrections indicated on the wheel to the measured Polaris altitude and obtained in this way the latitude. The wheel could be used anywhere, not only near Lisbon. There is no man represented, but only the names of the directions (*cabeça* in Portuguese means head, for instance). This figure appears in the book *Livro de Marinharia*, by João de Lisboa, 1518.

Dans la forme finale du *Règlement du Nord* (ensemble de règles pour déterminer la latitude à partir de l'hauteur de l'Étoile Polaire), une roue plus générale était utilisée. Pour obtenir la latitude, les navigateurs appliquaient les corrections indiquées sur la roue à l'hauteur mesurée de la Polaire. La roue pouvait être utilisée partout, et non seulement près de Lisbonne. Il n'y a plus la figure de l'homme, mais les positions de la Kochab continuent à être indiquées de la même façon (*cabeça* signifie tête en portugais, par exemple). La figure se trouve dans le livre *Livro de Marinharia*, de João de Lisboa, ed. 1518.

Na forma final do *Regimento do Norte* (conjunto de regras para determinar a latitude a partir da altura da Polar), uma roda mais geral era utilizada. Para obter a latitude, os pilotos aplicavam as correcções indicadas na roda à altura que mediam da Polar. A roda podia ser utilizada em qualquer parte, e não apenas perto de Lisboa. As posições da Kochab continuavam a ser indicadas pelos mesmos nomes, mas agora sem estar desenhada a figura do homem sobre o pólo norte celeste. Esta roda está incluída no *Livro de Marinharia* de João de Lisboa, ed. 1518.

Bibliografia

Albuquerque, Luis de, *Astronomical Navigation*, Comissão Nacional para as Comemorações dos Descobrimentos Portugueses, 1988.

Nota: reprodução da figura autorizada pelos Arquivos Nacionais/Torre do Tombo.